# 方向付けを明確にする算数・数学科授業構成の試み -問題を2段階に設定する指導—

Constitution of Mathematics Classes for Clarifying Orientation at Introduction —through two steps of problem posing—

# 京 極 邦 明

Kuniaki KYOGOKU 教職実践講座

(平成23年9月29日受理)

# 要約

授業の導入は、学習のめあてをもたせ、子どもを目標に向けて動機付けたり、方向付けたりするための過程として重要な段階である。ここでの指導の成否が目標の達成の大きなカギを握っているといっても過言ではない。にも拘わらず、導入のときに設定された問題(導入問題)が、あまり深められずに展開、終末へと進んでしまい、目標が曖昧なままで終わってしまう授業がかなりたくさんみられるのも現実である。そうした場合、導入課題を掘り下げ、その時間に追究する真の問題(主問題)を明確にする指導つまり、第二の導入とでもいうべき二段構えの指導が、展開の段階で必要になる。本稿は、このような視点から、授業で取り上げる問題を2段階に設定し、導入を二段構えで行う授業の在り方について、算数・数学の具体的な授業例をもとに言及するものである。

キーワード: 導入, 方向付け, 授業構成, 課題, 問題

#### Ⅰ 先行研究のまとめ

#### 1 授業における初期の指導

湯浅(1987)は導入を次のように位置づけている。「導入は、一般には授業過程を構成する教授段階の最初の部分をいう。教授段階とは、教科内容を伝達したり、一つの授業で子どもをその授業の目標へ到達させるための教授の順序や区切りを意味し、教授学史上さまざまな立場からの教授段階論が説かれている。導入については、ヘルバルト派の五段階教授(形式段階説)における「予備」(新しい概念の統覚に必要な既有の観念を整理すること、観念の同化が適切に行われように準備し、学習の態勢をつくること)「提示」(新教材の提示)が典型の一つとして知られる。」このように、授業の初めの導入においては、通常、その授業で取り扱う内容の概要や、それらを身に付けることの意義が語られることになる。こうしたことは、子どもたちの興味・関心をひきおこす、いわば動機付けのために不可欠と言ってよいものである。

# 2 導入の機能

三村(2003)は「単に授業時間の初めにある段階を導入というのではない。予期せぬ形で具体化された 教材や発問を通した方向性をもった教授行為によって教科内容に向かっての関心・意欲・態度が刺激され, 能動的な学習活動が呼び起こされたとき,それが導入となる。」と述べている。また,半田(1995)は算 数・数学教育において「導入は子どもを授業に集中させ,課題のもつ真の状況の中に子どもを引きこんで, 算数・数学の本質的な内容を包含したことがらに自分の課題を意識させること」と導入の意義を説いてい る。このように、導入においては、教材内容について、関心をもたせ問題意識を高めて、学習意欲を喚起させるための動機付けだけでなく、学習目標の確認を行い、学習展開の方向を明確に認識させる方向づけの指導が必要なのである。

#### 3 正木の「二段階教授論」より

ここで,正木(2007)の唱える「二段階教授論」にふれておきたい。正木は「能動から受動へ-算数科二段階授業をもとめて-」の中で,授業の目標を「能動」「受動」の二段階に設定した授業を提言している。

「受動」の段階は、「対象に他動的に働きかける」段階であり、何が問題かははっきりしないが、自分の考えや操作が契機になって問題が生じ、次第に対象の周辺が見えてくる。明瞭ではないが問いの芽が発生しているのが、「受動」の段階である。次に、新しいことが見えてきて、やってみたいことが湧いてくる「受動」から「能動」への移行の段階を経て、自分でやってみたいことができる「能動」の段階に進む。子どもたちの問いが発生しているということがこの段階を特徴づける重要な視点である。このように、正木は1時間の授業全体が実質的に2つの段階で構成されていることを主張している。

# 4 導入と授業構成

# (1) 問題を2段階に設定する指導

正木の説では、授業全体を二段階で構成することを論じているが、本研究では、能動・受動という明確に区分された二つの段階を設定するという考え方を、導入と展開の段階で行うという立場をとることにしたのである。なお、筆者は全ての授業で、問題を2段階に設定することを主張しているのではない。目標や、単元の位置づけにより、授業の最初に教師から提示する問題の難易度により、導入問題だけで授業を構成していくことが困難なことがあるので、そのような場合は、展開の段階で、主問題を設定することが必要かつ有効であるという立場に立っているのである。

このように、指導のねらいを実現させようとすると、目標や課題の難易度によっては、導入問題だけでは、不可能な場合がある。時として展開の段階で、導入問題から導出される主問題が明確になるように授業をつくる必要があることが生じるのである。この場合、授業の各段階において、生徒に課す問題、生徒の活動、教師の働きかけは、それぞれ次の表のようにまとめることができる。このような授業構成をとる指導を、本研究では、問題を2段階に設定する指導とよぶことにする。それが三村のいう「方向性をもった教授行為によって教科内容に向かって関心・意欲・態度が刺激され、能動的な学習活動が呼び起こされ」や半田のいう「自分の課題を意識すること」につながる。

表丨	段階ことの問題,	<b>沽</b> 動,	教師の役割

授業の段階	問題•課題	生徒の活動	教師の働きかけ
導入	導入問題	教師の指示での働きかけ	導入問題の提示,めあての設定
導入から 展開へ	導入問題から 主問題へ	問いの発生	本時の主問題を導く発問等
展開	主問題	主問題の考察・処理・解決	主問題の明確化

#### (2) 問題を 2 段階に設定する指導での授業構成

一般的な授業の構成と、筆者が主張する問題を2段階に設定する授業の構成とを対比させてみよう。

#### 表 2 問題を 2 段階に設定する指導での授業構成の特徴

【通常の授業構成】

導入…めあての設定,導入問題設定

展開前段…見通しをもつ

展開後段…見通しに従った活動

まとめ…振り返りめあてに対応するまとめ

⇒ 【問題を2段階に設定した指導での授業構成】 導入…めあての設定,導入問題設定,見通し 展開前段 \ 主問題の明確化 展開後段 ∫ 主問題の考察,その解決 まとめ…振り返り,めあてに対応するまとめ

上述のように、筆者が主張するのは、これまでと 180° 異なる授業構成にしようという意図ではない。また、すべての授業で、問題を 2 段階に設定する指導にすべきでありそれが可能であると主張しているわけではない。あくまでも、授業の目標をよりよく達成するためには、時として問題を 2 段階に設定する授業構成もあり、それが可能であるということを主張しているだけである。

#### (3) 課題と問題

しばしば、課題と問題の違いが問われることがある。例えば、山口(2010)は、「『問題』は子ども自身によって解決すべきものとして真に認識されたものである。したがって、『問題』は、子どもの興味・関心や解決意欲を喚起するものであるとともに、主体的かつ能動的な学習を促すものである。『課題』と『問題』を区別する理由はこの点にある。この点をふまえ、『問題』の前段に位置づく『課題』は、既習の知識・技能や考え方によって解決できないものや、子どもたちの疑問や認知的葛藤を生じさせるものなど、本時の主題に焦点化された『問題』につながるものであることが望ましい」と述べている。山口の説を引用したのは、課題と問題の区別をするためではなく、授業の目標を達成するために、時には問題を2段階に設定する指導が必要で、それに応じた授業構成を考える必要があるということを示唆しているからである。

#### Ⅱ 問題を2段階に設定する指導における授業構成と本研究のねらい

二段階教授論の実際の指導例を正木の著書から引いて,「導入問題」「導入問題に対する子どもの反応」 「展開での主問題の明確化」という視点から整理してみよう。事例は小学校2年生のものである。

表 3 事例の分析

導入問題	導入問題に対する子どもの反応と評価	主問題は何か?
$3 \times 4 = 12$ , $3 \times 5 = 15$ , $3 \times 6 = 18$ , $3 \times 7 = 21$ , $3 \times 8 = 24$ , $3 \times 9 = 27$ 教師が「おもしろいね」と独りつぶやく。「きまりをみつ	• 「全部ある」と口走る。 ⇒ この子の言っていることがわかる かな。では、見えていることを言葉を 使わないで、手だけで発表してみよう か。	だろうか」という子どもたちが問いをもつ。 「一の位に $1$ から $9$ までの数が全部出てくる九九は他にどの段があるだろう」

この正木の指導事例から、問題を2段階に設定する指導の可能性が示唆される。そのことを受けて、本研究のねらいを、問題を2段階に設定する指導の可能性を実際の授業例について考察することと設定した。

#### Ⅲ 問題の2段階設定による授業改善

まず、算数の授業実践例を一つ取り上げてみる。これは平成22年8月に東京の国立大学法人の附属小学校で行われた4年生を対象にした授業である。指導案も練られていて、実際に子どもたちが授業に取りくむ姿勢も積極的であり、日頃から楽しく充実した算数の授業が行われている様子を垣間見ることができた。しか

し、筆者はこの授業を参観していて、第二の導入が適切になされ、本時の主問題を明確にすることができたならば、こどもたちはこの授業の価値を一層深く認識することができたであろうという感をいだいた。実はそのことが、本稿をまとめる動機になっていたのである。

まず、指導案の概要をみていきたい。

- 1 小学校4年「変わり方」
- 2 指導計画全5時間

第1次 変わり方にきまりがあることを見つけ、表や式に表して問題解決をする。(3時間) 第2次 変わり方をグラフに表して問題解決をする。(2時間)

- 3 本時の学習指導案
  - ① ねらい
    - ・2量の依存関係から見つけたきまりを用いて、問題を解決することができる。
    - ・きまりの普遍性に気付き、あらゆる場合に用いることができるよさに着目することができる。
  - ② 展開概要

#### 表 4 参観した授業の学習指導案

	留意点			
<ul> <li>1 問題場面を把握する</li> <li>T: この机 1 つには、5 人座ることができます。 机を横に 2 つつけると、何人座れるでしょう。</li> <li>C: 5 × 2 で10人</li> <li>C: くっついた所はすわれないから、8 人だよ。</li> <li>T: では</li></ul>	図や表を提示し、問題構造を視覚的にわかりやすくし、机の数と人数それぞれの変化に着目して考えることができるようにする。			
柳を□こくっつけたら 布	図や表を基にして、解決の見通しをもつことができる。【考】 可人座ることができるかな?			
	1,7/12 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0			
予想される児童の解決法				
☆ 図を用いて考える $C3: \pm 7$ 人,下 $8$ 人,横 $2$ 人で, $7+8+2=17$ C4: 両はしの $2$ 人をぬかすと, $1$ つの机には $3$ 人座って ことにから, $3\times 5=15$ 。それにはじの $2$ 人をたし	000000			
15+2=17 C5:両はしの机に4人ずつで、あとの3つが3人ずつだ。 4×2+3×3 C6:1つの机に5人座れるから5×5=25。重なったと	• 0 0 0 0 0			
には重なった所には座れないから、そこから $\triangle$ の 8 を引いて $25-8=17$ 3 それぞれのやり方について話し合う	<ul><li>※自分なりの表現を用いて、きまりを用いて解決の根拠を説明</li></ul>			

C:表を使ったやり方だとわかりやすいし、3つずつたしてい することができる。【考】

けばよいから,確実だね。

- C: C4もC5も3人ずつ増えていることを考えているから, 表で考えた人と似ているね。
- C: C6 は考え方は、わかりやすいけど、後で重なっていると ころを引くのがややこしい。
- C:C3のやり方は、いくつに机が増えても簡単にできそうだ │ □にどのような数値が入っても簡単に解決することができる よ。
- 4 別の場合について考える
- T:□に別の数が入っても?10個だったら?
- C: 机の数が 2 倍だから, $17 \times 2 = 34$ だ。
- C:それじゃ重なっている部分を考えていないことになっちゃ うから、ちゃんと計算しなくちゃ。
- C:17人に3人ずつ5回たしていくから、17+3+3+3+3+3で32人だ。
- C: bhallow C > b
- C:だったら、C4のやり方で、 $3 \times 10 + 2$ でやれば簡単だ。
- C:うん。これなら机がいくつでも簡単だ。
- C:最初に言っていた100個なら、 $3 \times 100 + 2$  だから、302人 座れるよ。
- 5 学習のまとめをする。
  - 机の数が1つ増えると、人数がどのように変わるの かを考えて, 表や式にすれば, 簡単に人数を求めるこ とができる。

○ それぞれのやり方を比較検討し、よさを考えていくことで、 やり方のよさに気づかせる。

| ※机の数がどんな場合でも、用いることができるきまりに気付 |き,関数の考えのよさを理解する。【知】

#### IV 指導の実際と分析

児童はよく反応し、大局的にみれば指導案に示された流れに沿って活動していた。例えば、次のようなや りとりが交わされていた。

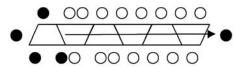
# 表 5 発表部分の記録(抜粋)

- T:机の数が $\square$ こだったら、何人すわることができるかな?
- C:たとえば4こだったら14人。
- C:つくえが1つ増えるにつれて、人数が3人ずつ増えている。 4こだったら14人。5こだったら17人。

T:ここに何が入っても大丈夫?やってみる? 6 こだったら。 ノートに自分の考えを書いてみよう。

つくえの数(こ)	1	2	3	4	5	6
座れる人数(人)	5	8	11	14	17	20

- C:机が1こ増えると人数は3人増える。6こまでかくと、20人になる。
- T: なんで20人?
- C:机の数を6こまでかく。
- C: 4 こだったら14人でている。 1 こ机をたすと 3 人分増え、 2 こ増やすと、  $3 \times 2 = 6$ 14 + 6 = 20
- C:合わさっているところが5か所。1か所に2人座れなくなり、 $5 \times 2 = 10$ 人座れなくなる。  $5 \times 6 = 30$ , 30 - 10 = 20
- T: 一番最初に戻ると、この式 (14+3+3)
- C: 5+3+3+3+3+3
- $T:5 \circ \tau?$
- C:1このときに座る人数
- $T:3 \circ \tau?$
- C:1こにつき人数が3ずつ増える,増える数の3
- $C : 5 + 3 \times 5$



上の記録からも読み取ることができるが、本時で教師が意図した主問題を捉え、ねらいを達成したかという観点からすると、疑問が残る。ねらいからみた本時の主問題は、何であろうか。教師がこの授業でねらったことは、先ず「6個の場合にいろいろな数え方をさせる」そして、「それぞれの数え方が、100個の場合の人数でも見通すことができる方法になっているかどうかを吟味する」ことである。前者のねらいは、「机を□こくっつけたら、何人座ることができるかな?」という発問に始まる第一の導入における指導により、達成させることが可能で、この授業でも達成されている。

しかし、第一の導入だけでは、後者のねらいを達成することはできない。後者のねらいを達成するには、 児童から実際に出た方法について、具体的に、「その方法は100個の場合でも通用するのですか」と発問する、 つまり主問題を提示し、二段構えの導入を設定する必要がある。主問題がないと、児童は「人数を数えるい ろいろな数え方がある」と受け止めるだけで、終わってしまうからである。

後者のねらいを達成するためには、上で指摘したことを踏まえて、授業を構想するときに、次のような指導案にする必要がある。「3 それぞれのやり方について話し合う」を、話し合う方向性を「その方法は100個の場合でも通用するのですか」という課題意識のもとに、どれでもよいから児童から出された一つの方法について検討させることに向ける必要がある。さもないと、焦点が定まらずに、拡散したままで、授業がオープンの形で終わってしまう。実際にはそうした授業が多く、そのための策を講じることが筆者の問題意識であった。

#### V この授業を改善するための提案

指導案を次のように修正して主問題を明確にしていくことを構想した。1の「問題場面を把握する」いわゆる導入の段階,2の「自力解決をし、発表する」いわゆる展開前段の見通しをたて、解決する段階はこのままにすると仮定する。3の「それぞれのやり方について話し合う」を具体的に出された下の図1のような考えをとりあげ、「この考え方は、つくえが100この場合でも、同じように説明できるのですか」と考えを深

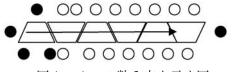


図1 1つの数え方を示す図

める問いをだし、本時の真のねらいが単に、□にどんな数をいれても「つくえの数が□このときの座れる人数」を求めるだけではなく て、「6この場合を基にして、100この場合でも同じようにできるということを、図をかかなくても、説明することである」と理解させる点にある。「6このときの考え方は、つくえが100この場合でも、同じように説明できるのか」という主問題が、授業の目標達成に不

可欠であり、それを明確な形で出すことを筆者は主張しているのである。教育現場では、このような主問題がない授業が実に多いのである。主問題を提示しなくても、本時の目標、めあてが達成されるのが本来のあり方であるかもしれない。しかし、実際の授業では、展開の段階になると、子どもは自分が何を考えているのかが曖昧になり、方向を見失なうような様相を呈することもある。教師も、子どもの反応を集約して問題点を絞ろうとするが、予想した反応との違いに対応できなかったり、問題点を絞り切れずにまとめを迎えるということに陥るというのが一般的といっても過言ではない。そのような場合、上述のような、主問題を設定し、方向付けを明確にする指導によって生徒の眼を覚醒させることが必要である。

#### VI 中学校数学科の事例

問題を2段階に設定する二段構えの指導を構想・実践した2つの事例を示す。事例1,2とも,紙幅の関係で,導入,展開,終末を簡潔に記す。

事例 1 中学校 2 年生 連立方程式

【導入】は次のように行う。20個のマグネットを使って「左々立」ゲームをするとしよう。マグネットを 黒板のやや左側に置く。この遊戯は本来二人で行なうが、教室では「教師」と「生徒代表1名」で両者とい う図式になり、他の生徒はオーデイアンスとして加わっている。

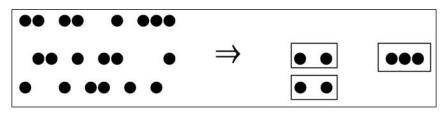


図2 ゲームをする場を示す図

生徒の代表1名が黒板の前に出て、マグネットを2個または3個ずつ黒板の右側に、図のように置いていく。先生は黒板を見ないでその他の生徒の方を向いている。先生は代表の生徒に、「置くときに必ず、「『バタン』という音がよく聞こえるように置きなさい」と指示し、耳を澄まして『バタン』という音を聴いている。代表生徒が20個のマグネットを置き終わるとき、先生はこういう。

「3個の組が4つで,2個の組が4つ」

#### 【導入問題】

先生は3個の組が4つで、2個の組が4つということを、どのようにあてているのだろう。

【展開】生徒は様々な方法で、組の数を考えようとする。たとえば、「全部 3 個の組だとしたら、マグネットは全部で24ことなる。」というように鶴亀 算的な発想で考えたり求められた結果を右のような表をつくって規則性を予想したりあるいは、3x+2y=20 というような方程式をつくったり…、などである。それらを個々に発表させ、他の生徒に理解させるだけでも、精一杯 かもしれない。主問題が何かが絞り切れないとそうかもしれない。

 2個の組
 4
 1
 7

 3個の組
 4
 6
 2

表6 答えの組

そこで、生徒が考えだした様々な着想を結びつけたり、構造化させたりすることにより、主問題に入る。この課題から、(3個の組の数) = (マグネットの総数) - (音の数)  $\times$  2 という一般的な求め方を浮き彫りにさせるのである。「音の数からなぜ組の数がわかるのか」という課題意識が種明かしへの原動力なのである。そして、こういった関数眼に基づいた課題意識が連立方程式につながるのである。そこに焦点をあてて、次の主問題を設定し、方向付けを明確にする。

主問題:先生は(3個の組の数) =  $(マグネットの総数) - (音の数) \times 2$ を使ってあてているのです。この式はどのようにすれば、導くことができるのでしょう。

【終末】 3x+2y=20, x+y=8 から y を消去すると  $x=20-y\times 2$  を導くことができる。これは上の式と一致しているので、方程式を変形する時の手掛かりになっている。

なお、事例 1 に関して、筆者のこれまでの指導では、主問題をこのように明確に位置付けた実践は行っていない。

#### 事例2 中学校3年 「三平方の定理を導く」

|導入問題: 合同な直角三角形 4 枚を使って、いろいろな四角形をつくりなさい。

【導入】で設定するめあてはたとえば、次のようなものが考えられる。

「合同な直角三角形4枚を使うと、何種類の四角形がつくれるか、ルールを決めて調べてみよう。」

【展開】では、まず前段で、次のような四角形を構成させる。

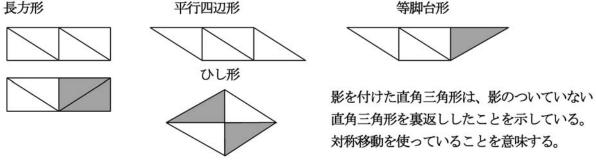
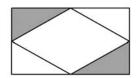


図3 構成された四角形

次に後段で、ひし形の別の作り方を考えさせる。実は、これが授業の主問題に直結する問題である。ここでは、図4のように、「空」の部分にひし形ができる。これは観点変更が促される問題であり、条件変更をしなければならない。最初から「空」でもよいという設定にすると、生徒はあまり困らないで、図形をつくる。深く考えさせることに意義を見い出す授業では、生徒を困らせてから条件を検討するのである。

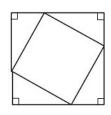


# 図4 条件変更によるひし形の構成

それでも、まだ目的はみえていない。ここで、方向付けを明確にするため、次の主問題を設定する。

主問題:合同な直角三角形4枚を使って、正方形をつくることはできるでしょうか?

「空」を生かすことができるので、ひし形の場合を踏まえて、生徒たちは図5左図のような正方形を構成する。ただし、この場合、裏は使わなくてもできるという点は、ひし形と異なるということにも着目させたい。また、左図の4つの直角三角形を、斜辺の中点を中心に $180^\circ$ 回転移動させると、図5右図ができる。



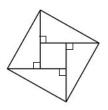
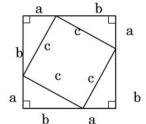


図5 構成された正方形

【終末】 この図 7 に示されている図形の面積の関係を式で表現して、三平方の定理を導かせる。直角三角形の辺の長さを図 6 のように設定し、下の図 7 から面積の関係を  $(a+b)^2=c^2+a\times b\div 2\times 4$  ととらえさせ、 $a^2+b^2=c^2$  を導く。





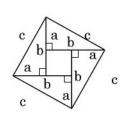


図 6 文字で長さ を表す

図7 式を立てるための図

事例1と異なり事例2は、筆者が全面的に実践したものである。

## VII 今後の課題

VIO 2つの中学校の事例は、問題を 2 段階に設定する二段構えの指導を構想・実践したもの、また、 $III \sim V$ の小学校の事例は、実践を基に問題を 2 段階に設定する二段構えの指導に改善するときの基本的な考え方及び指導案の部分的な修正を行ったものであり、ともに筆者の主張を具体化し、例証する役目を負うものである。今後は、既に実施された授業をこのような視点から振り返ることにより、問題を 2 段階に設定する二段構えの指導へと改善するための指導案を修正したり、新たに授業を構想する場合は、問題を 2 段階に設定するときの導入問題の条件の明確化ということに取り組む必要がある。

# <参考文献>

- 湯浅恭正 「導入」吉本均責任編集 現代授業研究大辞典 1987年 明治図書 p486~p487
- 三村和則 「導入とヤマ場」 山崎英即・片山宗二編集委員代表 教育用語辞典 ミネルバ書房 2003年 p399
- 正木孝昌 受動から能動へ-算数科 2 段階授業をもとめて- 2007年 東洋館出版社
- 半田進編著 考えさせる授業 算数・数学 実践編 1995年 東京書籍
- 山口武志 「なぜ課題と問題を区別する?-指導目標,問題意識,葛藤一」日本数学教育学会誌 2010 第92 巻第11号 p18~p19