

確率空間を通した「じゃんけん問題」についての深い学び

Deep learning for the “rock-paper-scissors problem” via probability space

前 田 成 喜

Naruki MAEDA

(大学院教育学研究科)

中 田 寿 夫

Toshio NAKATA

(数学教育講座)

(平成30年8月29日受付, 平成30年12月3日受理)

要 約

数え上げを伴う確率の問題は, 数え上げの対象が何であるかを把握し, 問題を正しく理解することが第一に求められる。本報告では, 数え上げの対象に応じて集合(確率空間)を導入することにより, 算数・数学の教員を志望している大学生に対する「深い学び」を目指す。具体的には, 清水, 山田(2010)による「じゃんけん問題」を取り上げ, 問題の一般化について考察する。このことについて, ポリアによる問題解決を通して議論する。

キーワード: 数学教育, 確率空間, じゃんけん問題, 深い学び

I. はじめに

1. 中学校, 高等学校, 大学での「確率」

昨今では「統計」教育の重要性が強調されているようであるが, 「確率」教育に関する重要性が失われているわけではなく, 旧来どおり深い学びが求められている。ここでは現行の教育課程での「確率」教育について手短かにまとめておくことにする。小学校段階では「確率」は直接扱われず, 中学校第2学年で最初に学習することになっている。不確定な事象についての観察や実験などの活動を通して「統計的確率」が導入され, それを踏まえて「同様に確からしい」場合についての確率概念である「数学的確率」について学ぶ¹⁾。そこでは場合の数の数え上げが中心的な内容となる。数え上げる際, 頻繁に使われるのが樹形図であり, これを用いて正確に数え上げることができるかどうかが問われる。高等学校では, 数え上げについて対称性に着目しながら階乗や二項係数などの乗算の道具を使った手法を学び, 独立性などの理解に繋げていく。

大学では公理的確率を扱うことが多い。公理的確率はいわゆる「確率空間」を定めることにより不確定な事象を定義するわけである。抽象的な確率空間の一般論は難解であるものの, 簡易的なものであれば高等学校までの数学の知識で十分対応できる。実際, 中田, 内藤[2, 第2章, 19ページ]には以下のように書かれている。つまり, 確率空間とは (Ω, P) のペアで

- (K1) $0 \leq P(A) \leq 1 \quad (A \subset \Omega)$
- (K2) $P(\Omega) = 1$
- (K3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
(ただし $A \cap B = \emptyset$)

をみたすものをいう。(K1), (K2), (K3) をみたすものを全て「確率」とよび, それ自体は確率の意味が問われることはなく, モデルを設定した人が確率の意味を考えて解釈する。導入部分が実際の確率現象ではなく, このような立場であるため, 初等中等教育ではあまりなじまない。しかしながら, 後で見るように有限の場合においては樹形図との親和性も高く, 典型例の場合であれば理解が容易である。さらには, 高等学校までに習ってきた確率とは違う数学的な見方, 考え方を簡単に体験できる利点がある。

これらの観点を鑑みると, 将来, 中学校や高等学校の教員になって確率を教える大学生は, 確率の考え方の違いを認識するためにも確率空間の扱いについて一度は体験しておくのも価値があると考えられる。

2. 思考をたすけるための記号の導入

確率空間が真価を発揮するのは全事象 Ω が非可算無限集合のときである。有限集合である場合はいちいち確率空間を明記することが煩わしい場合がほとんどであるため省略されることが多い。「同様に確からしい」という前提で有限集合に一樣な確率を入れているときには, 確率空間は実際は数え上げの対象物に記号を導入し, 集合で記述するということに他ならない。しかしながら, これを意識的に記述することが無意味であるとは言い切れない。実際に確率の問題を解く際に何を数え上げるかを明確に理解していないことが少なからず見受けられる。確率空間を意識し記号を導入することにより, 「どのような確率現象であるのか」ということを明らかにすることができる。問題解決の際の記号の導入については, ポリア[3, 125ページ,

項目 10] において「数学の記号という言葉が思考をたすける」と書かれている。本報告では確率空間やそれに付随する記号をいくつか導入して議論するが、ポリアの記述どおり実際に思考をたすけるものとなっている。

3. 「じゃんけん問題」に関するふり返りの研究

数え上げに関する個人ごとの理解については、例えば、清水、山田 [4] (2010) による「じゃんけん問題」を通した被験者のインタビューにより具体的に観察することができる。この論文では、「算数・数学を専攻する教員志望の大学生」(清水、山田 [4, 44 ページ]) の 5 名の被験者に対して次節に示す [問題 1], [問題 2] が提示されている。さらに、それぞれの問題解決過程が「[問題 1] の解決」「[問題 1] の解決終了後のふり返し」「[問題 2] の解決」「[問題 2] の解決終了後のふり返し」の 4 つの場面ごとに記述されている。ここでいう「ふり返し」とは、ポリア [3] の問題解決の 4 段階「理解」「計画」「実行」「ふり返し」の最終項目のことである。インタビューを見ると、答えだけが正しいが考え方が不備である場合など確率の理解の度合いを見る上で興味深い。

4. 樹形図と確率空間

有限集合の数え上げにおいては、数え上げの対象を関係性でまとめた「グラフ」、特に「樹形図」を用いることが多い。他にも 2 個のサイコロを同時に投げる際に使われる全ての目の出かたを表す「表」を活用することもある。樹形図でも表でも同じことであるが、全事象を正しく捉えることが問題の理解にとって極めて重要なこととなる。特に、樹形図は視覚的にも見通しが良く、確率空間を記述するために必要な集合に関する知識や訓練も特に必要ない。問題に応じて樹形図や表を正しく描くことができている者は、数式としての表記はともかくとして確率空間を意識していると考えてよい。問題によっては樹形図や表を描くのが困難なものもあるが、問題を理解する上で少なくともこれらを意識をする必要はあろう。ところが、これらのことを意識せずに数え上げに関する代数的な計算だけを行ったり、誤った樹形図を描いてしまったりすることもしばしばある²⁾。このことの要因は、確率空間または扱われる事象の認識が明確でなかったり誤っていたりすることが考えられる³⁾。

5. 本報告の目的と構成

本報告では、清水、山田 [4] (2010) でとり上げられている「じゃんけん問題」を通して、確率空間を導入してその理解について述べる。

算数・数学の教員を志望している大学生は集合を通して数学を語る訓練を少なからず行っているはずであるため、彼らにはそれに応じた深い理解が望まれる。

本報告では、確率空間をはじめいくつかの記号を導入して、それを用いて自然に行っていた議論を明確に説明していく。すなわち、「数学の記号という言葉が思考をたすける」ということを意識した議論を行う。そのような体験を通して、実際に算数・数学の教員になって、児童、生徒にふり返しを促す際に、深い理解に裏打ちされた助言を行うことができるようになることを期待している⁴⁾。

本報告の構成は以下の通りである。まず、第Ⅱ節ではじゃんけんする人の人数に関して「じゃんけん問題」を [問題 1], [問題 2], [問題 3] に分けて段階的に述べる。第Ⅲ節では「じゃんけん問題」を扱う際に必要な確率空間を明記した上で、[問題 1] に関する考察を与える。さらに、第Ⅳ節では [問題 3] である n 人のじゃんけんに関しての問題についての数え上げの一般的な議論を行う。その際に「じゃんけん問題」の本質的な部分を記号を用いて指摘し、数え上げの方法を説明する。第Ⅴ節において教育現場で扱われる「確率」との関係性を述べ、まとめの議論を行う。

Ⅱ. じゃんけん問題

問題 1 A, B, C の 3 人でじゃんけんをします。1 回のじゃんけんで勝ち、負け、引き分けを決めます。例えば A が「グー」、B が「グー」、C が「チョキ」のときは A, B が勝ち、C が負けとなります。また、A が「チョキ」、B が「パー」、C が「グー」のときは引き分けとなります。このとき、A が勝つ確率を求めなさい。

問題 2 A, B, C, D, E の 5 人でじゃんけんをします。1 回のじゃんけんで勝ち、負け、引き分けを決めます。例えば A が「グー」、B が「グー」、C が「チョキ」、D が「チョキ」、E が「チョキ」のときは A, B が勝ち、C, D, E が負けとなります。また、A が「グー」、B が「グー」、C が「チョキ」、D が「パー」、E が「パー」のときは引き分けとなります。このとき、A が勝つ確率を求めなさい。

[問題 1] は中学校第 2 学年での学習において現れる内容であり、高等学校では一般化に向けた方向で問題が提起される。そのために、まずは、[問題 2] のように人数を少し増やしたものについて樹形図を描くことで、効率的な数え上げの訓練が行われるわけである。実際に、清水、山田 [4] (2010) でのインタビューはふり返りのために「この解き方は人数が増えても使えますか？」という質問を行っているが、教員としては以下にある [問題 3] のように n 人でも対応できる見通しをもっておく必要がある。

問題3 競技者1, ..., 競技者 n の n 人でじゃんけんをします。1回のじゃんけんで勝ち、負け、引き分けを決めます。このとき、競技者1が勝つ確率を求めなさい。

問題3の導入はポリアによる問題解決の4段階における「計画」の中の一つの「一般化」に分類される。実際、**問題1**、**問題2**は**問題3**の $n = 3, 5$ にそれぞれ該当する。**問題3**を経由せず、 $n = 7$ などの問題にうつってもよいが、かなりの難問となろう。これに関して、ポリア[3, 68ページ]では「1つの問題から他の問題へとうつってゆきながら、われわれは時折り新しい、もっと野心的な問題の方がもとの問題よりもときやすいと感ずることがある（発明家のパラドックス）」という記述があるが、**問題3**はポリアの言葉を借りると「野心的な問題」となる。

Ⅲ. 確率空間の導入

1. n 人のじゃんけんにおける確率空間の導入

まず、「じゃんけん問題」を記号を用いて表すことを考える。確率空間は(K1), (K2), (K3)をみたすものとして確率現象とは関係なく定義されていることは前述の通りである。以下において、確率現象として意味をもたせることにする。ここでは**問題3**をモデル化するため、 n 人で1回じゃんけんをするときの確率空間を導入する。 $n = 3, 5$ とすれば**問題1**、**問題2**にそれぞれ対応するので、一般的に n で定義しておいた方がよい。 $n \geq 2$ を自然数として、確率空間 (Ω_n, P) を

$$\begin{cases} \Omega_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in J\}, \\ P(A) = \frac{|A|}{|\Omega_n|} \quad (A \subset \Omega_n) \end{cases} \quad (\text{Ⅲ.1})$$

とする。ただし、全事象 Ω_n は n が決まれば変わるので、後の区別のために添字として n を付けて表記している⁵⁾。 J はじゃんけんの出し方

$$J = \{ \text{グ}, \text{チ}, \text{パ} \} \quad (\text{Ⅲ.2})$$

を表す記号であり、 J の要素をグー、チョキ、パーと問題文どおり表記するのが煩わしいので上記のよう頭文字だけにしている。事象 $A \subset \Omega_n$ について $|A|$ は A の要素数を意味する。以上で、「 n 人での1回のじゃんけん」のモデル化を行い、確率現象として意味をもたせたわけである。実際、 Ω_n の要素は (x_1, \dots, x_n) で表され、 i 番目の座標 x_i で競技者 i のじゃんけんの出し方を意味する。また、 n 人の全てのじゃんけんの出し方の場合の数は $|\Omega_n| = 3^n$ 通りある。さらに、 $A \subset \Omega_n$ は A で定められる特定の n 人のじゃんけんの出し方を表しており、 A の確率がいつでも(Ⅲ.1)で定ま

るということを意味する。特に、 $A = \{(x_1, \dots, x_n)\}$ と1点からだけの事象として選ぶと任意の $x_1, \dots, x_n \in J$ について

$$P(\{(x_1, \dots, x_n)\}) = \frac{1}{3^n}$$

となる。このことは、 n 人のどのような出し方も等確率であられ「同様に確からしい」ことを意味している。(Ⅲ.1)が確率空間の定義(K1), (K2), (K3)をみたすことはチェックする必要があるがここでは省略する⁶⁾。

また、高等学校で定義した「数学的確率」は、「同様に確からしい」試行を前提として(Ⅲ.1)で定義されるが、確率空間の議論では「同様に確からしい」ことは直接的には仮定していないことに注意すべきである。

2. 3人のじゃんけんにおける確率空間と樹形図

以下の例Ⅲ.1で $n = 3$ と小さいときに樹形図を通してこれを確かめてみる。

例Ⅲ.1 (**問題1**における確率空間の導入) Ω_3 に対応する樹形図は以下の図1の通りである。

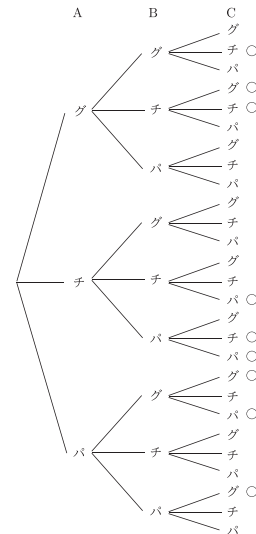


図1 Ω_3 の樹形図

樹形図の「根」から「葉」にあたる3つの頂点を通る「経路」に $\Omega_3 =$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{グ}, \text{グ}, \text{グ}), (\text{グ}, \text{グ}, \text{チ}), (\text{グ}, \text{グ}, \text{パ}), \\ (\text{グ}, \text{チ}, \text{グ}), (\text{グ}, \text{チ}, \text{チ}), (\text{グ}, \text{チ}, \text{パ}), \\ (\text{グ}, \text{パ}, \text{グ}), (\text{グ}, \text{パ}, \text{チ}), (\text{グ}, \text{パ}, \text{パ}), \\ (\text{チ}, \text{グ}, \text{グ}), (\text{チ}, \text{グ}, \text{チ}), (\text{チ}, \text{グ}, \text{パ}), \\ (\text{チ}, \text{チ}, \text{グ}), (\text{チ}, \text{チ}, \text{チ}), (\text{チ}, \text{チ}, \text{パ}), \\ (\text{チ}, \text{パ}, \text{グ}), (\text{チ}, \text{パ}, \text{チ}), (\text{チ}, \text{パ}, \text{パ}), \\ (\text{パ}, \text{グ}, \text{グ}), (\text{パ}, \text{グ}, \text{チ}), (\text{パ}, \text{グ}, \text{パ}), \\ (\text{パ}, \text{チ}, \text{グ}), (\text{パ}, \text{チ}, \text{チ}), (\text{パ}, \text{チ}, \text{パ}), \\ (\text{パ}, \text{パ}, \text{グ}), (\text{パ}, \text{パ}, \text{チ}), (\text{パ}, \text{パ}, \text{パ}) \end{array} \right\}$$

の各要素を対応付ける (要素数は $|\Omega_3| = 3^3 = 27$)。

「同様に確からしい」ということは、これらが一様な確率で現れ、結局 (Ⅲ.1) の $n = 3$ で定義される確率で表現されるという理解である。A を競技者 1 と考え、第 1 座標として表す。このとき、「A が勝つ」という事象を A とすると Ω_3 の 9 個の要素をもつ真部分集合であり、樹形図では葉の部分に○がついている箇所がその要素となっている。これらを数え上げると $|A| = 9$ となり答えは

$$P(A) = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

となる。**問題 1** は Ω_3 に該当する樹形図を描いて数え上げることが基本である。樹形図は Ω_3 の順序構造を反映させて系統的に図示したものに他ならず、「同様に確からしい」(確率論の用語としては一様分布) 場合は、樹形図だけで確率空間の情報を全て表現できる。数え上げによる確率の計算の理解は、確率空間と対象となる事象が把握できたかどうかにより決まり、例Ⅲ.1 のように樹形図により視覚的にも明らかにすべきところである。

3. 対称性を利用した数え上げの簡略化

問題 1 において例Ⅲ.1 のように事象 A を数え上げる際に、A はグーでもチョキでもパーでも対称なので例えば、「A がグーを出した」として数え上げたとする。このとき、

$$|A| \stackrel{(*)}{=} 3 \times \left| \left\{ \begin{array}{l} (\text{グ}, \text{グ}, \text{チ}), \\ (\text{グ}, \text{チ}, \text{グ}), (\text{グ}, \text{チ}, \text{チ}) \end{array} \right\} \right| \quad (\text{Ⅲ.3})$$

となり、全てを列挙しなくても以下の通り $|A| = 9$ がわかり、

$$P(A) = \frac{3 \times 3}{|\Omega_3|} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3} \quad (\text{Ⅲ.4})$$

である。(*) は自明であるが、自明な部分であるからこそ算数・数学の教員を志望している大学生に対しては、その説明を求めたいところである⁷⁾。なお、この議論は「A がグーを出した」という条件付き確率を用いて説明することもできる⁸⁾。しかしながら、きちんとした議論を行うためにいくつかの準備が必要なのでここでは割愛する。

以下では、 n 人のじゃんけんを確率空間 (Ⅲ.1) を通して考えていく。

IV. n 人のじゃんけん

問題 3 の解法はいくつかあるが、ここでは前節までの考え方を一般化していくことにする。一般化に際して困難な点としては

- (i) 人数を一般化すること
- (ii) 勝者に競技者 1 が含まれること

の双方に配慮しなければならないことが挙げられる。そもそも、この問題を考える際には競技者 1 を含めた競技者が何人勝つかを考慮に入れなければならないが、(i) を考える際、 n 人の競技者のうち、 k 人が勝つとして考える。まずは、じゃんけんのもつ対称性を直接的に利用するため(ii)は行わず、(i)のみに絞って考えることにする。

問題 3' 競技者 1, \dots , 競技者 n の n 人でじゃんけんをします。1 回のじゃんけんで勝ち、負け、引き分けを決めます。このとき、 k 人が勝つ確率を求めなさい。ただし、 $k = 1, \dots, n-1$ とします。

まず、 $k = 0, n$ のときは「 k 人が勝つ」ということが意味をなさないため除外されていることに注意しておく。なお、**問題 3'** は文言を変えているものの本質的には中田、内藤 [2, 章末問題 2.21, 35 ページ] の問題である。ポリア [3, 69 ページ] でいう「補助問題」と考えられ、「踏み石」と表現されている。つまり、「みぞのまん中の石は向う岸よりは近いところ」にあり、その踏み石にたどりつけばむこう岸へ渡することは容易である」(ポリア [3, 47 ページ]) という位置付けである。

問題 3' については(ii)は行わないので、じゃんけんで勝負がつくことだけに絞った考察ができる。2 人であっても n 人であっても勝ち負けの関係は同じで、以下に気付くことが求められる：

$$\begin{aligned} \text{勝負がつく} &\iff \\ \text{じゃんけんの出し方が全体で 2 種類} \end{aligned} \quad (\text{IV.1})$$

言い換えると、じゃんけんの出し方が全体で l 種類 ($1 \leq l \leq 3$) であるとしたときに、 $l = 1$ または $l = 3$ であれば勝負がつかずあいこになることを意味する。**問題 1**、**問題 2**、**問題 3** は A (競技者 1) が勝たなければいけない上、正確に数え上げを要求されるため、樹形図を描いても (IV.1) に気付かないかもしれない。そのために **問題 3'** を用意することに意味がある。**問題 3'** は (IV.1) を n 人で行うことに限定した問題であり、「じゃんけんに勝つ」という部分の本質的な理解が進むことが考えられる。**問題 3'** においても、まずは $n = 3, 5$ の場合などで具体的に確かめて (IV.1) の性質に気付くことが必要であろう。**問題 3'** を解決した後に **問題 3** を考えると、特定の人が勝つことの意味を理解しやすい。

1. n 人のじゃんけんのモデル化

n 人のじゃんけんを行ったときに k 人だけ勝つ事象を用意して、実際に **問題 3'** のために記号を導入する。 $n \geq 2$ を固定して、

$$[n] = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\mathcal{I}_k^{(n)} = \{I \subset [n] \mid |I| = k\} \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

と定義する。 $\mathcal{I}_k^{(n)}$ は $[n]$ の中から選ばれた k 個の集合の族であるので、二項係数の組み合わせとしての定義から

$$|\mathcal{I}_k^{(n)}| = \binom{n}{k} \quad (\text{IV.2})$$

がわかる⁹⁾。

定義IV.1 n 人のじゃんけんで k 人が勝つ事象を $B_k^{(n)}$ とする。ただし、 $1 \leq k \leq n-1$ である。

$B_k^{(n)}$ は事象であるが、事象とは Ω_n の部分集合であり、具体的に集合で書くと、

$$B_k^{(n)} = \bigcup_{I \in \mathcal{I}_k^{(n)}} C^{(n)}(I) \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad (\text{IV.3})$$

となる。ただし、 $C^{(n)}(I)$ は $I \in \mathcal{I}_k^{(n)}$ について

$$C^{(n)}(I) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_n \mid x_I \succ x_{I^c}\} \quad (\text{IV.4})$$

と定義され、 $I^c = [n] \setminus I$ で I の補集合を意味し、 \succ は「じゃんけんの勝負」の以下による定式化である。

$$\text{グ} \succ \text{チ}, \text{チ} \succ \text{パ}, \text{パ} \succ \text{グ}. \quad (\text{IV.5})$$

また、 x_I は任意の $i \in I$ について $x_i \in J$ が一定であることを意味する。つまり、 I を $[n]$ の中の特定のグループを $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ としたとき、 $x_{i_1} = \dots = x_{i_k}$ となるわけである。 $I \subset \Omega_n$ に対して I^c が決まるが、 $I^c = \{j_1, \dots, j_{n-k}\}$ とする。このとき、 $x_I \succ x_{I^c}$ とは $x_{i_1} = \dots = x_{i_k}$ かつ $x_{j_1} = \dots = x_{j_{n-k}}$ つまり、 i_1, \dots, i_k である k 人とそれ以外の j_1, \dots, j_{n-k} である $n-k$ 人がそれぞれが同一の出し方で、(IV.5) に基づいて勝負がつき、 k 人のグループ I の出し方が $n-k$ 人のグループ I^c の出し方に勝つことを意味する。これにより、 $C^{(n)}(I)$ は I が勝つ事象を表すことが理解できる。(IV.3) は $[n]$ のうち k 人のグループ $I \in \mathcal{I}_k^{(n)}$ をすべて動かすことにより $B_k^{(n)}$ が定まることを意味する。なお、 I が決まるごとにグー、チョキ、パーの3通りの勝ち方があるため、任意の $I \in \mathcal{I}_k^{(n)}$ について

$$|C^{(n)}(I)| = 3 \quad (\text{IV.6})$$

であり、 I に依存せずに一定であることに注意する。(IV.6) はじゃんけんの対称性を表現しており、(III.3) の式に現れる3倍も (IV.6) を通して解釈することもできる。

2. 「問題3」の解法とその考察

求める確率は $P(B_k^{(n)})$ である。 $|B_k^{(n)}| \stackrel{(*)}{=} 3 \binom{n}{k}$ であるため答えは

$$P(B_k^{(n)}) \stackrel{(\text{III.1})}{=} \frac{|B_k^{(n)}|}{|\Omega_n|} = \binom{n}{k} \frac{1}{3^{n-1}} \quad (\text{IV.7})$$

となる。ここで、(*) である理由は以下の通りである：

$$\begin{aligned} |B_k^{(n)}| &\stackrel{(\text{IV.3})}{=} \left| \bigcup_{I \in \mathcal{I}_k^{(n)}} C^{(n)}(I) \right| \\ &\stackrel{(\text{K3})}{=} \sum_{I \in \mathcal{I}_k^{(n)}} |C^{(n)}(I)| \\ &\stackrel{(\text{IV.6})}{=} 3 |\mathcal{I}_k^{(n)}| \stackrel{(\text{IV.2})}{=} 3 \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

上記の式は、 n 人のうち k 人が勝つ場合の数が $3 \binom{n}{k}$ 通りであるという自明とも言えることをわざわざ式を用いて述べている。途中の式変形と用いた関係式によりどうやって数え上げたかを明らかにしたわけであるが、もしこのことを自然言語だけで説明しようと思うと骨が折れることであろう。そればかりか、詳細な部分が伝わらない可能性も考えられる。

3. 「問題3」の解法とその考察

「問題3」を下に「問題3」の解答を与える。ここで、 $B_k^{(n)}$ と対応する事象を定義しておく。

定義IV.2

- (i) $A_k^{(n)}$ を n 人の中で k 人が勝ち、その中に競技者1が含まれている事象とする。ただし、 $1 \leq k \leq n-1$ である。
- (ii) A を競技者1が勝者である事象とする。

このとき、

$$\begin{cases} A_k^{(n)} = \bigcup_{I \in \mathcal{I}_k^{(n)}, 1 \in I} C^{(n)}(I) \\ (1 \leq k \leq n-1) \\ A = \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

であることがわかる。 $A_k^{(n)}$ を $B_k^{(n)}$ を通して考えることが「問題3」の役割の一つであったわけである。

主張IV.1 競技者1が勝つ場合の数は以下で求められる。

$$|A_k^{(n)}| = \begin{cases} 3 & (k=1) \\ |B_{k-1}^{(n-1)}| & (2 \leq k \leq n-1). \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

[証明] $k=1$ の場合は競技者1がグー、チョキ、パーの勝ち方があり、他の競技者はそれに応じて全て同

じ出し方で負けるので3通りである。次に、 $2 \leq k \leq n-1$ の場合を考える。(IV.9) で用いられた事象 $B_{k-1}^{(n-1)}$ は定義IV.1 から $n-1$ 人のうち $k-1$ 人が勝つじゃんけんの出し方すべてである。これについて、新たに競技者1が参加して、その人も勝ちに加わるとする。そのための場合の数は n 人のうち k 人が勝つ場合の数と等しく左辺と等しくなる。樹形図では以下の図2の通りであり、網掛けの3つの部分はそれぞれ $B_{k-1}^{(n-1)}$ を表し、全体で $A_k^{(n)}$ を表す。樹形図を見ることにより、これらの集合の間に全単射を与えることができる¹⁰⁾。

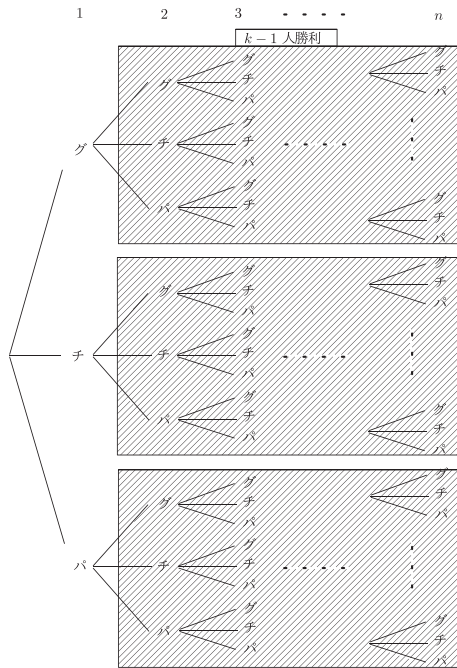


図2 $|A_k^{(n)}| = |B_{k-1}^{(n-1)}|$ をあらわす樹形図

これで「問題3」の解答する準備が整った。以下では集合を用いて確率(数え上げ)の計算を詳細に述べる。

(1) 「問題3」の解答(その1)

定義IV.2 で定義された事象 A について

$$\begin{aligned}
 P(A) &\stackrel{(IV.8)}{=} P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k^{(n)}\right) \\
 &\stackrel{(K3)}{=} \sum_{k=1}^{n-1} P\left(A_k^{(n)}\right) \stackrel{(III.1)}{=} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|A_k^{(n)}|}{|\Omega_n|} \\
 &\stackrel{(IV.9)}{=} \left(3 + \sum_{k=2}^{n-1} |B_{k-1}^{(n-1)}|\right) \frac{1}{3^n} \\
 &\stackrel{(IV.7)}{=} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{3^{n-1}} \stackrel{(*)}{=} \frac{2^{n-1} - 1}{3^{n-1}}
 \end{aligned}$$

となる。(*)の等号は

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad (IV.10)$$

であることから従う。

$A_k^{(n)}$ の数え上げを「問題3'」で行った方法で直接数える事も考えられるが、次ではそれを行う。

(2) 「問題3」の解答(その2)

定義IV.2 で定義された事象 $A_k^{(n)}$ について

$$\begin{aligned}
 P\left(A_k^{(n)}\right) &\stackrel{(IV.8)}{=} P\left(\bigcup_{I \in \mathcal{I}_k^{(n)}, 1 \in I} C^{(n)}(I)\right) \\
 &\stackrel{(K3)}{=} \sum_{I \in \mathcal{I}_k^{(n)}, 1 \in I} P\left(C^{(n)}(I)\right) \\
 &\stackrel{(*)}{=} |\{I \in \mathcal{I}_k^{(n)}, 1 \in I\}| \times \frac{|C^{(n)}(I)|}{|\Omega_n|} \\
 &\stackrel{(**)}{=} \binom{n-1}{k-1} \times \frac{1}{3^{n-1}}
 \end{aligned}$$

となる。(*)は(IV.6)であるため直前の式のシグマの中が I に依存しないことを用いた。(**)は、 $|\{I \in \mathcal{I}_k^{(n)}, 1 \in I\}| = |\mathcal{I}_{k-1}^{(n-1)}|$ と(IV.2)により従う¹¹⁾。後の k による和の計算は(その1)と同様で(IV.10)を用いて計算する。

注意

- ・ (その1), (その2) の違いは単に異った方法で数え上げていることを意味する。
- ・ (その1), (その2) のどちらの計算も確率空間を定めたこと以外に独立の概念など何も使用していないことに注意する。

V. おわりに

確率に関する考え方は、そのときに学んでいる数学の段階に応じて変わっていく。例えば、直感的に明らかに思われる議論も記号を通して明確に理解できることもある¹²⁾。そのため、確率を教える教員には色々な段階について対応できるような能力が求められる。算数・数学の教員を志望している大学生は中学校、高等学校の生徒よりも深い理解が必要であり¹³⁾、確率空間を通した集合による明確な理解がそのうちのひとつとして考えられる。

記号の導入により議論が面倒になり、かえって理解し辛い面もあるだろう。実際、マークシートの試験のように問題を解いて答えだけを導く際には価値は見出せない。しかしながら、無意識に使用している細部に至るメカニズムを自然言語ではなく数式を用いて明確

に理解することの体験は算数・数学の教員を志望している大学生にとって大変重要なことである¹⁴⁾。というのも、大学で習ってきた集合や記号に関する訓練が無駄にならず、数学の用語や記号のよさ、数学的处理のよさを直接的に体感できるからである。

彼らが本報告で使われた記号を注意を払って見たときには、数理現象を明確に理解するための自然なものとして映るはずである。また、**問題1**、**問題2**の具体的な計算から**問題3**、**問題3'**のような一般化へ進んでいく際に、じゃんけんについての本質的な部分に気付くことが期待される。**問題3**、**問題3'**のような一般化による深い理解を通した後で**問題1**、**問題2**を眺めると問題の見え方や助言の方法に幅が出てくるはずである¹⁵⁾。

初等中等教育の教育現場では正答、誤答を含んだ多様な考え方が現れるが、正しい論理での解答であればそれを確率空間の言葉を通して「翻訳」することが可能である。その際には、確率空間という言葉や記号を表に出す必要はない。その代わりに「同様に確からしい」場合の「数学的確率」の定義を「樹形図」を通して問題に照らし合わせて確認することから始めることが基本となる。異なる解法が存在するのは確率空間を違ったものに設定しているか、確率空間が同じでも数え上げの方法が異なっているだけであることを認識するのも良いかもしれない。

確率に関して深い理解を与えるために、初等中等教育の教育現場で具体的にどのように実践すれば効果的なのかは今後に残された課題である。

注 意

- 1) 近年では「統計的確率」「数学的確率」の用語は初等中等教育の中においても用語として積極的に用いられない方向のようである。
- 2) 清水、山田 [4] にいくつかの誤った認識の例が書かれている。特に順列や組み合わせを学習した後は、技術的な側面にばかり目を奪われその傾向が顕著に見られるように感じられる。
- 3) 問題に関する理解の様子を知るには、どのように確率を計算するのか樹形図を意識的に描かせてそれを説明させるのも良い。つまりは、確率空間を正しく認識しているかをチェックするわけである。なお、順列と組み合わせの違い等で確率空間が違う場合がある。その際においても、多くの問題は正しく理解していれば簡単な同一視等により本質的な差異はないことがわかり、正しい答を導くことができる。しかしながら、確率空間のとり方が異なることが原因で求める確率が変わってしまい、パラドックスとして扱われる場合もある(中田、内藤 [2], 章末問題 2.1 など)。確率空間をどうとればよいのかの判断が困難な場合もあるが、「オープンエンド」の趣旨でない限り確率の

問題としては不備と言えよう。また、確率の題材は代数や幾何など他の数学の分野と比べて正確さに劣るような印象を持つ人もいるが、確率空間のとり方を明確にせずに曖昧にしたまま議論していることに起因していると考えられる。確率空間が定まった後は厳密な議論のみで展開されるため、曖昧にはならず、基本的にはパラドックスも起かない。それゆえ、高等数学の立場からは確率空間を第一に定めることが求められる。

- 4) 中学校や高等学校の授業に本報告の内容をそのまま使用することは現実的ではなく、本報告はそれを目的とはしていない。数え上げる際に自然に行っている操作を「数式や集合で説明できる」という体験して問題を深く理解してもらうことを第一の目標とする。さらに、それを通して授業作りに繋げることを更なる目標としている。
- 5) 本来ならば、 Ω_n にあわせて確率をあらわす P も P_n と書くべきであるが、中学校、高等学校で使い慣れている記号にあわせて P と表記した。
- 6) 証明は中田、内藤 [2, 問 2.1] にある。(K3) については共通部分のない集合の要素に関する「加法公式」[1, 47 ページ] が使われる。
- 7) (*) のような自明な部分の理由を問われた際は、「数えていくと同じだから」などという自然言語の言い換えが求められているわけではない。この問題では「 A を第 1 座標で区別する排反な 3 つの事象に分割する。このとき、3 つのうち任意の 2 つの事象について自然な全単射がとれるため」という内容を質問者の要求に応じた厳密さのレベルで答える。じゃんけんにおける置換を用いた全単射を具体的に明記することにより完全な解答がえられるが、このことは樹形図を用いて説明すると理解しやすい。
- 8) 「条件付き確率」という自然に導かれた別の確率空間として扱ったという解釈である。
- 9) 二項係数 $\binom{n}{k}$ は nC_k と同じ意味であり、 n 種類のものから k 個取り出したときの組合せで定義される。同値な定義がいくつかあるため注意が必要である。例えば、中田、内藤 [2, 28 ページ] を参照すること。
- 10) 実際の全単射を具体的に与えることは「言語活動」において良い訓練となる。このような対話的な訓練は、数学の専門家の指導の下での卒業論文に係したセミナーでは発表者の理解度を確かめるためにも日常的に行われている。確率空間など集合を積極的に用いて数理現象を表現することの訓練は、高等教育に特化したものではあるが「主体的・対話的で深い学び」と考えられる。
- 11) $|I \in \mathcal{I}_k^{(n)}, 1 \in I| = |\mathcal{I}_{k-1}^{(n-1)}|$ の等号は、 n 人から k 人を選ぶ際に、特定の一人が必ず入っているときには、 $n-1$ 人から $k-1$ 人を選ぶことと同じで

あることを意味している。厳密に言うとそれぞれの集合についての全単射をとることにより正当化される。

- 12) 記号の導入により議論が面倒になり、かえって本質を見失うこともあるが、そうになってしまうと元も子もない。しかしながら、記号の導入により、現象を白日の下に晒すこともあり、それによって数学的に本質的な事を見出すこともある。問題を深く理解するためには、一度は手間を惜しまず記号を積極的に導入した議論を行うべきであろう。
- 13) 例えば、(IV.1)に気付かなくても $n = 3, 5$ 程度であれば数え上げる作業を正確に行えば正解に辿りつく。しかしながら、樹形図だけでなく (IV.1) を理解していれば [問題1](#)、[問題2](#) にとっても数え上げを間違える危険を減らすことができる。それだけでなく、じゃんけんに対する理解が深まるはずである。
- 14) 数学的に広い見地を持つことにより、初等中等教育の内容を見つめなおすことができるはずである。例えば、確率空間を通して考えれば、[問題1](#) で「A がグーを出す事象」と「B がチョキを出す事象」が独立であるということが、直感や仮定ではなく「証明」できる。このことは、「事象の独立」を明確に定義した後に初めて成立する議論であるが、高等学校で自然言語で定義された「試行の独立」との関係、位置付けを考えても良いかもしれない。
- 15) 教師が (IV.1) を認識していなければ、正確に数えることが困難な生徒に対しても「もっと注意して正確に数え上げなさい」という類の助言しかできないはずである。しかしながら、(IV.1) を理解し

ていれば「じゃんけんの出し方が全体で2種類のものだけに着目してみなさい」などという助言ができるはずである。清水, 山田 [4] (2010) では「何か気付いたことはありませんか?」「別の解き方はありませんか?」という自然な質問により、ふり返り活動が促されたことが報告されている。問題を解き終わった後でも、(IV.1)の重要性を認識している教師であれば [問題1](#)、[問題2](#) のような具体的な問題でも児童・生徒に (IV.1) を自然と気付かせるような質問が想定され、ふり返り活動がより効果的になると考えられる。ただし、ポリア [3, 25 ページ] によると、教師からの質問は「押しつけがましくないような自然なもので、学生自身が自分に問いかけるようなものであるのが望ましい」とのことである。個々の理解に応じたものが望まれるわけであるが、実際にどのようにすればポリアの言う「望ましい問いかけ」になるのかは難しいところであろう。

参考文献

- [1] 文部科学省, 高等学校学習指導要領解説数学編, 平成 21 年 11 月.
- [2] 中田寿夫, 内藤貫太, 確率・統計, 2017, 学術図書出版.
- [3] G. ポリア, 柿内賢信 (訳), いかにして問題をとくか, 1975, 丸善.
- [4] 清水紀宏, 山田篤史, 数学的問題解決におけるふり返り活動による解法の進展について:「じゃんけん問題」の解決におけるふり返り活動の分析, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』16 巻, 1 号, 2010, pp.43-56.