

[資料]

数学科における生徒が自律的に学習を行うことができる教材づくり
ー自己評価からフィードバックを行う仕組みの作成ー

Design of Instructional Materials that Enable Autonomous Learning for Students in a Mathematics

Department

- Creation of a mechanism for receiving self-assessment feedback -

原 田 雅 文

Masafumi HARADA

福岡教育大学大学院教育学研究科教職実践専攻教育実践力開発コース
中等教科教育高度実践力プログラム

(2024 年 1 月 31 日受理)

数学的な見方・考え方を働かせるために、知識・技能等の習得が求められている。本稿では、その基本的な知識・技能を用いて解く問題について、なぜその問題を解くことが難しいのか、その要因について考察し、そしてその要因を解決することで、生徒が自力で問題を解くことができるようになることを目指した。そのための教材として、生徒が自分の分からないことをチェックする「自己評価表」、生徒が自らの力で問題を解くことができるようにするための「ヒントカード」を作成した。

キーワード：数学的な見方・考え方、知識・技能、自己評価

1 問題の所在と本稿の目的

現行の学習指導要領においては、各教科の見方・考え方を働かせた授業を行うことが目指されている。この数学的な見方・考え方について、文部科学省（2019）は、「既に身に付けた資質・能力の三つの柱によって支えられた「見方・考え方」が、習得・活用・探究という学びの過程の中で働くことを通じて、資質・能力が更に伸ばされたり、新たな資質・能力が育まれたりし、それによって「見方・考え方」が更に豊かになる、という相互の関係にある」（p.23）としている。また、「数学的な考え方」について、文部科学省（2019）は、「目的に応じて、数、式、図、表、グラフ等を活用しつつ、論理的に考え、問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識及び技能を関連付けながら、統合的・発展的に考えたり、体系的に考えたりすること」（p.24）としている。このことから、数学的な見方・考え方を働かせた授業においては、資質・能力の三つの柱が土台であること、加えて、数学的な考え方が可能な状態として、目的に応じ

た数学的表現を選択すること、既習の知識・技能などの内容を生徒が理解し、それらを活用することで新たな数学の概念等を見出すことと解釈できる。

一方で、私の生徒時代の経験や学部・大学院での実習における生徒の姿を見てみると、生徒は授業で教科書にある例題の解答の解説を授業者から受ける。その後、教科書にある練習問題を生徒が解くのだが、教科書にある例題の解答を見ながら、時には、例の解答中の数を練習問題の数に置き換えて、計算だけを行うという場面が見られた。この場合、生徒は数学の授業において数学的に考えているとは言えないと考えられる。さらに、そのように取り組んでいる生徒の解いている様子を見ると、例題では、正の数に関する問題で、練習では負の数に関する問題となっていたときに、解けなくなるという場面が見られた。ここで、ある出版社の教科書を見ると、例題について、坪井ほか（2021）では、「基本的な問題、および重要で代表的な問題である。「解」「証明」は解答の簡潔な発表形式の一例である」（p.4）とある。発表形式が何

を指しているのか不明な点があるが、この記述を見ると、答案の書き方の例ととらえることができる。したがって、教科書にあるような「解」、「証明」は解き方の例を記しているのではないと解釈することができる。

そこで本稿では、教科書に掲載されているような問題の自力解決並びに生徒が問題を解くことができなかつたときに、生徒自身が何が原因で解くことができなかつたのかを生徒自身が見直し、数学の学習へと向かうことができる一助となることを目指し、教材の開発を行った。この教材によって、数学的な見方・考え方を働かせる授業を行うことにつなげたいと考える。

本稿の流れは、第2章では、「自己評価表」、「ヒントカード」という作成した教材の詳細について述べる。最後の第3章では、課題と今後の方向性について述べる。

2 研究の手順および方法

(1) 問題解決の阻害要因

第1章において、生徒たちは教科書の練習問題について、教科書の例を見ながら解いている現状があることを述べた。そのことや問題を解くことができないということに対して、実習中に相談が生徒からあった。その際の生徒の話は、次の三つに分類された。

- ① 数学の公式や定理など、問題を解くうえでどの公式や定理などを使うかが分からない。
- ② 数学の公式や定理などをどのように使うのか、なぜ使う必要があるのかが分からない。
- ③ そもそもどの段階から分からなくなっているのか分かっていない。

上記の解決のため、以下で詳細をのべる「自己評価表」と「ヒントカード」の作成を行った。

(2) 作成物の具体

今回作成した教材は、問題を解くために必要な公式や定理、考え方を一覧にした「自己評価表」、どのように公式や定理を使うかといった「ヒントカード」からなる。「自己評価表」については、生徒たちが何が分からなくて問題を解くことができなかったのかということを見出し、それに関する公式などを教科書で確認を行ったり、その公式などを用いる練習を教科書とは別の問題を解くことで行ったりすることを念頭に作成した。これによって2(1)の問題が解けない要因の①、③の状況の解決を行うことができると考えている。

また、「ヒントカード」については、主に教科書

の節末や章末にある問題での利用を想定している。この節末や章末にある問題については、坪井(2021)は、「節で学んだ内容を身につけるための問題」、「章で学習した内容全体の復習問題」、「総合的な復習問題や応用的なやや程度の高い問題」(p.4)などとしている。問題を解くために必要な公式や定理等については、すでに生徒たちが学習していることを想定し、それらの復習や考え方を育成する目的で設定されていると解釈できる。そのため、これらの問題については一度生徒たちが考え、解ききることが生徒たちが問題を解く力の育成につながり、加えて数学の学習に対して面白さを感じるようになるのではないかと考える。一方で、2(1)の問題が解けない要因①、②にあるように、生徒が問題を自力で解くことに難しさを感じていることも事実である。そのため、生徒が自力で問題を解くことができた実感することができるように、段階ごとにヒントとなるものを設定し、また生徒が考えないといけないことを明確にすることが必要だと考え、「ヒントカード」の作成を行った。

これらの教材について、数学Ⅱ「図形と方程式」を念頭に、図1に記している問題に対して、作成したものを巻末資料1,2として掲載している。巻末資料2のグラフの図は、GeoGebraを用いて作成した。

(3) 教材作成の流れ

ここでは、どのように作成にあたったのかを、図1の8、「円 $x^2 + y^2 = 8$ と直線 $y = -x + k$ について、次の問いに答えよ。(1)円と直線が共有点をもつとき、定数 k の値の範囲を求めよ。」を例に述べる。まずは「自己評価表」について述べる。

手順①

ここでは問題を解くことを行つた。解決過程は、以下のようになった。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \dots \textcircled{1} \\ y = -x + k \dots \textcircled{2} \end{cases} \text{ について.}$$

$$\textcircled{2} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入すると } x^2 + (-x+k)^2 = 8$$

$$\text{これを整理すると } 2x^2 - 2kx + k^2 - 8 = 0 \dots \textcircled{3}$$

$$\text{この2次方程式の判別式をDとすると}$$

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - 2(k^2 - 8) = -k^2 + 16 = -(k+4)(k-4)$$

(1) 円と直線が共有点をもつ条件は $D \geq 0$ なので

$$-(k+4)(k-4) \geq 0$$

$$\text{これを解くと } -4 \leq k \leq 4$$

図2 解決過程の記述

手順②

①の解答を基に必要な知識等の抽出を行う。抽出を行う視点は「解決のために用いた定理や公式」

「数学の用語」の2点である。なお、問題を解くために必要な四則演算や分数や小数に関する知識、正の数や負の数の演算、二乗の計算等については基本的な計算に関わる内容であるため、ここでは触れないこととした。上記の問題においては、必要な知識は、「共有点とは何か」、「円と直線の位置関係に関する条件式」、「二次方程式の判別式」が挙げられる。また問題を解くために行ったこと、

例えば「図を描いて状況を把握すること」や、「問題文にある内分に関する情報を式化すること」を「必要な考え方」として整理することも、この「自己評価表」については行う。

「ヒントカード」の作成についても上記手順①、②を行う。その後、問題を解くうえで用いる知識は何か「自己評価表」を作成する際に挙げた知識等を引き出す問いを載せる。

A（「自己評価表」に対する問題）

- 3点 $A(1,-2)$, $B(4,2)$, $C(2,6)$ を頂点とする $\triangle ABC$ はどのような三角形かを求めよ。
- 2点 $A(2,6)$, $B(-4,9)$ を結ぶ線分 AB について、次の点の座標を求めよ。
(1) 2:1 に内分する点 (2) 中点 (3) 3:1 に外分する点 (4) 1:3 に外分する点
- 点 $A(-2,2)$ に関して、点 $B(1,-1)$ と対称な点 C の座標を求めよ。
- 次の二直線は、それぞれ平行、垂直のいずれか。
(1) $2x + 3y = 1$, $4x + 6y = 3$ (2) $-3x + 2y - 6 = 0$, $2x + 3y - 2 = 0$
- 二直線 $2x - y + 3 = 0$, $-3x + by + c = 0$ が1点で交わるための必要十分条件を求めよ。また、一致するための必要十分条件を求めよ。
- 直線 $3x - y - 2 = 0$ に関して、点 $A(2,3)$ と対称な点の座標を求めよ。
- 次の方程式はどのような図形を表すか。
(1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ (2) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13 = 0$
- 円 $x^2 + y^2 = 8$ と直線 $y = -x + k$ について、
(1) 円と直線が共有点をもつ k の範囲を求めよ。
(2) 円と直線が接するとき、 k の値と接点の座標を求めよ。
- 直線 $y = -x + 2$ が円 $x^2 + y^2 = 8$ によって切り取られてできる線分の長さを求めよ。
- 円 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ と中心が $(-2,-2)$ である円 C が外接するとき、 C の方程式を求めよ。
- 二円 $x^2 + y^2 = 17$, $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 17$ の共有点の座標を求めよ。
- 点 Q が円 $x^2 + y^2 = 36$ 上を動くとき、点 $A(4,2)$ と点 Q を結ぶ線分 AQ の中点を P とするとき、 P の軌跡を求めよ。

B（ヒントカードに対する問題）

- 二直線 $sx + ty - m = 0$, $ux + vy - n = 0$ に対して、
(1) 二直線が平行 $\Leftrightarrow sv - tu = 0$ (2) 二直線が垂直 $\Leftrightarrow su + tv = 0$
- x, y が不等式 $2x - y \leq 4$, $x + 3y \geq -9$, $5x + y \geq 11$ を満たすとき、 $x - 2y$ の最大値、最小値を求めよ。

図1 教材作成に対する問題一覧

また、生徒にとって考えに飛躍がありそうな個所を予測し、それを補うために生徒が考える必要がある場所はどこかを教師が考える。上記の問題においては、「円と直線が共有点を持つ条件とは何か？」ということが挙げられる。

(4) 具体的な運用について

具体的な運用について、「自己評価表」や「ヒントカード」を classroom など生徒に電子ファイルとして配布を行うことを考えている。

「自己評価表」については、授業中に解くことができなかったときに、自身の問題解決の状況と、「自己評価表」を照らし合わせることで、生徒自身が自分がうまく使えていない公式や定理が何かを特定し、その部分を復習することができるようにすることを考えている。

また、この「図形と方程式」については、中学校第二学年の「一次関数」と直線の方程式、連立方程式の内容と、数学I「二次関数」と二次方程式が実数解をもつ条件の内容と関連の強い内容である。そのため、それらの内容を復習することができるように、必要な公式や性質などをまとめておき、問題集の問題番号を付しておくことや単元に入る前に、これらの問題を解くことができるかを確認することで、生徒たちが安心して学習に臨むことができるようにすることを考えている。

「ヒントカード」については、対象としては教科書の節末や章末にある問題での運用を想定している。この内容について、授業で扱う前に、生徒に自分で問題を解くことの大切さを伝えたいので、学習した内容によってこれらの問題を解くことができることを伝えておく。そのうえで問題が難しいと感じたときに、ヒントとなるものを用意しており、それらを参考にすることを伝える。

3 本稿のまとめ

(1) 本稿の成果

本稿ではまず生徒たちの自力での問題解決の阻害要因について整理することができたことである。また、その要因の解決のための教材の土台を作ることができたことである。

(2) 今後の課題

今後の課題については、3点ある。まずは、生徒の自力での問題解決を阻害する要因について、先行研究や生徒に対する詳細な実態調査を行うことが挙げられる。本稿での要因の背景には何があるのかということについて考察を行ったり、ほかの要因や要因の複合がないかということ进行调查し、その結果に合わせて、教材の見直しや新規作成を行ったりする必要があると考えている。

また教材を作成する中で、今回はある単元に焦点を当てて作成を行った。しかしながら、他の単元に流用できる考え方が存在することが考えられる。そのため、数学における問題解決の手法に基づいて作成を行うことができると考える。ついては、Polya (1975) の「いかにして問題を解くか」を視座に考察を行うことを計画している。

さらに本教材についてはあくまで案である。そのため、実際に生徒たちが使うことによって、生徒の問題の自力解決につなげることができたかということを調査したり、改善を行ったりすることが必要であると考えている。

引用・参考文献

- GeoGebra <https://www.geogebra.org/>
 文部科学省 (2019) . 高等学校学習指導要領 (平成 30 年告示) 解説 数学編 理数編. 学校図書.
 G. Polya (1975) . いかにして問題をとくか (柿内賢信訳) . 丸善出版. (原著出版 1954 年)
 坪井俊ほか 12 名 (2021) . 数学II. 数研出版.

巻末資料 1 「自己評価表」

問題番号	必要な知識		必要な考え方		問題集のページ
1	二点間の距離の公式	三角形が直角三角形となる条件			
2	内分点の座標	外分点の座標			
3	点対称とは	中点の座標	問題を図式化する		
4	二直線の平行条件	二直線の垂直条件			
5	二直線と二元連立方程式の関係				
6	線対称とは	中点の座標	問題を図式化する		

7	平方完成	円の方程式			
8	共有点とは	円と直線の位置関係			
	二次方程式の判別式				
9	切り取られてできる線分の長さとは	点と直線の距離の公式	問題を図式化する	必要な数量を明らかにする	
	円の方程式	三平方の定理			
10	二点間の距離の公式	二つの円の位置関係の条件式	条件を式で表す		
11	共有点とは				
12	軌跡とは	中点の座標	条件を式で表す	自分で設定した文字は消去する	
	円の方程式				


※必要な知識については、その内容をまとめたファイルへのリンクを貼り付ける予定である。

※問題集のページは、学校で採択されている問題集のページを記入したり、別の問題のファイルのリンクを貼り付けを行ったりする予定である。

巻末資料2 「ヒントカード」

使い方

○問題番号を押すと、その問題の方針を見ることができます。

○を押すと、目次に移動することができます。

1

目次

問題番号	必要な知識		
	二直線の平行条件 同値	二直線の垂直条件	
1			解答を見る
2	不等式の表す領域の図示	y切片	解答を見る

2

1の方針①

○2直線の平行・垂直であるための条件として何があったでしょうか？



3

1の方針②

2直線の平行，垂直

2直線 $y = ax + b$, $y = a'x + b'$ について

2直線が平行 $\Leftrightarrow a = a'$

2直線が垂直 $\Leftrightarrow aa' = -1$

○上の必要十分条件にあるように傾きを考えることで，2直線の平行，垂直を考えました。

○問題の式を変形し，傾きを求めると， \Leftrightarrow の右側はどのように書くことができるでしょうか？



4

2の方針①

○いくつかの不等式を満たすときの、最大値・最小値はどのように求めたでしょうか？



5

2の方針②

○いくつかの不等式を満たすときの、最大値・最小値は、

①連立不等式の表す領域を図示する。

②〈最大値・最小値を求める式〉= k において、この直線が①で描いた領域と共有点を持つように考える。

のようにして考えました。

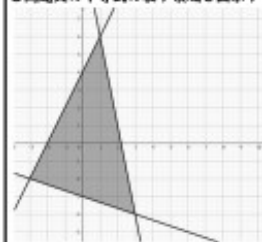
○まずは不等式の表す領域を図示しましょう。



6

2の方針③

○問題文の不等式の表す領域を図示すると、下のようになりました。



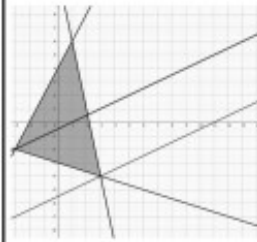
図は問題文の不等式で表す領域。

○次は、 $x - 2y = k$ …①において、①と不等式の表す領域が共有点を持つのはどのようなときかを考えてみましょう。



7

2の方針④



図は問題文の不等式で表す領域。

○①は傾きが $\frac{1}{2}$ 、切片が k の直線を表します。
①と図示した領域が共有点を持っている場合として、左図のような場合があります。

○左図のようにして領域と①が共有点を持つとき、①の切片が最大となるのは、直線①がどの点 (x, y) を通るときでしょうか。また、最小となるのは、直線①がどの点 (x, y) を通るときでしょうか。

○いくつか直線を描いてみて、考えてみましょう。



8