第３回春期研究大会論文集
創成型課題研究の部

数学的な表現を通して他者と関わる活動とその評価に関する一考察

A note on the interactions via mathematical representations and its' evaluation

岩田耕司
福岡教育大学

要　約

本稿では，全国学力・学習状況調査の主として「活用」に関する問題の，問題作成の基本理念や枠組みを他者との関わりという視点から再考し，表現に関わる数学的なプロセスの具体化を試みた。表現に関わる数学的活動には，表現を対象とする数学的活動と，表現を方法とする数学的活動とがあり（和田, 2009），後者の活動に位置付けられる「数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動」の過程では，表現を対象とした数学的活動の過程と比べ，「他者が解釈（評価）することを前提に，表現を構成（操作）すること」や「他者が構成（操作）した表現を解釈（評価）したり，その解釈（評価）に基づいて表現を構成（操作）したりすること」が求められることを明らかにした。また，そのような数学的プロセスに基づいて，授業において具現化されるべき数学的活動や，今後の学力調査において開発が期待される評価問題の例を示した。

キーワード：全国学力・学習状況調査，表現，説明し伝え合う活動

１．はじめに

今日的に育成すべき人間像をめぐっては，断片化された知識や技能ではなく，人間の全体的な能力をコンピテンシーとして定義し，それをもとに目標を設定したり，政策をデザインしたりする動きが広がっている（勝野, 2014)。我が国においても，次期学習指導要領の改訂へ向けて，児童生徒に育成すべき資質・能力を明確化した上で，各教科等でどのような教育目標・内容を扱うべきか，また，指導の改善を図るための学習評価はどうあるべきかといった視点からの議論が進められている（文部科学省, 2014)。

我が国の数学教育において，児童生徒が身に付けるべき学力をどのようにとらえればよいか。この問いは，ある意味でオープンエンドな問いであり，これからの社会の有り様によっても変わりうる。一方で，我が国の数学教育における大規模学力調査の問題や，その問題作成の理念，枠組みを読み解くことで，

今現在，我が国の数学教育において求められている学力や，測ろうとしている学力を読み解くことは,限定的ではあるが可能であろう。本研究課題は，我が国でこれまでに実施されてきた算数・数学の大規模学力調査の設計と分析の手法，及び得られた知見等について総合的に考察し，数学教育における学力論の再構築を図り，重層的かつ多面的な学力調査の新たな枠組みと手法を提示するとともに，学力調査の結果を活かした指導改善のあり方を提言することを目的としている（清水，2014, p.3)。岩田（2014）では，その基礎的な考察として平成 19 年から実施されている全国学力・学習状況調査（以下，全国調査）中学校数学に焦点を当て，実際に出題された問題から，我が国の数学教育において求められている学力や測ろうとしている学力を読み取ることを試みた。その結果，実際に出題された問題と調査の枠組みとの間には小さなズレがあり，全国的な学力調査の実施方法等に関する専門家検討会議（2006）の報告書（以下,『報告書』)で示された問題作成の基本理念を踏まえつつ,実際に出題された問題には「方法知」や「他者と関わり合う力」への学力観の拡張が見られることを指摘した。

本稿では，数学教育における学力論の再構築に向けて，特に後者に焦点を当てて検討を進める。すなわち，全国調査の主として「活用」に関する問題の問題作成の枠組みにおける「数学的なプロセス」を，他者との関わりという視点から再考し，学力調査の設計と分析に対する示唆を得ることが本稿の目的である。そのためにまず，全国調査の枠組みにおける数学的プロセスを，他者とのかかわりという視点から再考することの必要性について述べ，調査問題に見られる学力観の拡張は，学習指導要領で指導すべき内容の一つに位置付けられた「数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動」に関わることを指摘する。次に，その活動の，問題作成の枠組みにおける位置付けを検討するために，表現と数学的活動の関係を分類整理し，表現に関わる数学的なプロセスの具体化を試みる。最後に，そのような数学的プロセスを問題作成の枠組みに位置づけることによって得られる示唆を検討し，今後の課題について述べる。

２．枠組みを再考することの必要性

全国調査における「活用」の問題の出題範囲・内容について，専門家検討会議の『報告書』では，各学校段階における各教科等の土台となる基盤的な事項に絞った上で，以下のように問題作成の基本理念を整理することが適当であるとしている（p.7)。

・知識・技能等を実生活の様々な場面に活用する力や，様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力などにかかわる内容（主として「活用」に関する問題）

また，算数・数学の具体的な調査問題の作成に当たっては，以下のような観点を盛り込むことや工夫をすることが提案されているが，具体的には調査問題の作成過程における検討に委ねるとしている（p.8)。

・物事を数・量・図形などに着目して観察し的確にとらえること
・与えられた情報を分類整理したり必要なものを適切に選択したりすること
・筋道を立てて考えたり振り返って考えたりすること
・事象を数学的に解釈したり自分の考えを数学的に表現したりすること　など

小学校算数および中学校数学では，上記の観点をもとに「活用」の問題が作成・出題されているが，中学校数学ではさらに上記の観点を細分化した「主として「活用」に関する問題作成の枠組み」（表 1）に基づいて，それ

ぞれの調査問題が生徒の「どのような」活用力の評価を意図しているかをより詳細に示している。このような専門家検討会議の『報告書』に示された問題作成の基本理念や中学校数学における問題作成の枠組み（表 1）は，一見すると，主として個人の活動に着目しているように見える。しかしながら，実際に出題された調査問題を見てみると，学力調査で意図されている評価は必ずしも個人の活動だけに着目したものではなく，教室の中で行われる他者との活動に対する評価を意図するものも含まれる。例えば，平成 19 年度調査数学 B$\boxed{4}$（以下, H19 数学 B$\boxed{4}$のように略記する）では，他者の構成した証明を評価し改善する問題が，H25 数学 B$\boxed{6}$では，他者の構成した表現（文字式）を事象に即して解釈する問題などが出題されており，数学的な表現を通して他者と考えを交流したり，考えを発展させたりする，いわば，数学的活動の社会的な側面までもその評価の射程に入れているものと見られる（岩田, 2014）。

数学を活用する協同的な問題解決の場面では，自分の考えを表現することだけでなく，他者の考えやその意図を読み取ったり，そこから自身の考えを発展させたりすることが必要である。カリキュラムの構成原理に数学的なプロセスを位置付けた先駆的な取り組みの一つである NCTM のスタンダード（NCTM, 2000）では，プロセス・スタンダードの一つに位置付ける「コミュニケーション」[1] について次のように述べられている。

> 他の生徒とともに問題に取り組む過程において，学習者は幾つかの利益を得る。しばしば，問題に対する一つの見方しか持たない生徒は，他の生徒の見方から利益を得

表 1．主として「活用」に関する問題作成の枠組み（国立教育政策研究所，2014）

活用する力	文脈や状況	主たる評価の観点	数学科の内容	数学的なプロセス
α： 知識・技能などを実生活の様々な場面で活用する力	実生活や身の回りの事象での考察 他教科などの学習 算数・数学の世界での考察	数学的な見方や考え方 数学的な技能 数量や図形などについての知識・理解	数と式 図　形 関　数 資料の活用	α1：日常的な事象等を数学化すること α1 (1) ものごとを数・量・図形等に着目して観察すること α1 (2) ものごとの特徴を的確にとらえること α1 (3) 理想化・単純化すること α2：情報を活用すること α2 (1) 与えられた情報を分類整理すること α2 (2) 必要な情報を適切に選択し判断すること α3：数学的に解釈することや表現すること α3 (1) 数学的な結果を事象に即して解釈すること α3 (2) 解決の結果を数学的に表現すること
β： 様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力				β1：問題解決のための構想を立て実践すること β1 (1) 筋道を立てて考えること β1 (2) 解決の方針を立てること β1 (3) 方針に基づいて解決すること β2：結果を評価し改善すること β2 (1) 結果を振り返って考えること β2 (2) 結果を改善すること β2 (3) 発展的に考えること
γ： 上記α，βの両方にかかわる力				γ1：他の事象との関係をとらえること γ2：複数の事象を統合すること γ3：多面的にものを見ること

ることができる。（中略）生徒はまた，発展途上のアイデアを明確にするために，他者の思考について質問したり，探ったりすることを学ばなければならない。さらには，全ての方法が等しく価値があるわけではないので，生徒は他者の方法とアイデアの長所と限界を見極めるために，それらを吟味することを学ばなければならない。他者の主張を注意深く聞き，それについて考えることによって，生徒は数学についての批判的思考者になることを学ぶ（pp. 62-63）。

このように，NCTM のスタンダードでは，他者の考えを吟味したり，それをもとに考えたりすることが重要な数学的プロセスの一つに位置付けられており，我が国においても，平成 20 年に告示された中学校学習指導要領（文部科学省, 2008）で，「数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動」が指導すべき数学的活動の一つに明確に位置付けられた。誤解を恐れずに言えば，他の「数や図形の性質を見いだす活動」と「数学を利用する活動」は，大まかではあるが, 問題作成の枠組み（表 1）における活用する力「β: 様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力」と「α：知識・技能等を実生活の様々な場面に活用する力」にそれぞれ対応付けて捉えることができる。その一方で,「数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動」については，問題作成の基本理念や枠組みでの明確な位置付けがなされないままでいると見ることもできる。数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動が，他の二つの活動と一連のものとして扱われる必要があることを踏まえると（文部科学省, 2008), 数学的な表現を用いて説明し伝え合うことは，問題作成の枠組みにおける α と β の両者に関わる新たな軸 γ として設定されるべきものなのかもしれない。

このように，実際に出題された調査問題に見られる学力観の拡張は，学習指導要領で指導すべき内容の一つに位置付けられた「数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動」と関連していると見られる。そこで次章では，その活動の，問題作成の枠組みにおける位置付けを検討するために，表現と数学的活動の関係を分類整理し，表現に関わる数学的なプロセスの具体化を試みたい。

３．表現に関わる数学的活動

数学では，直接見ることのできない抽象的な対象を，何らかの形で表現し，あたかもそれが目に見えるかのように扱うことによって思考を発展させる。それゆえ，数学教育における「表現」は，学習の目標ともなり，学習の内容ともなり，学習の方法ともなる（中原, 1995, p. 193）。和田（2009, 2013）は，数学教育における「表現」を，学習対象としての表現と学習方法としての表現とに分け，表現に関わる数学的活動を記号論的視座から分析している。表現を対象とした数学的活動については，三輪（1996）の文字式利用の図式を一般化し，そのプロセスを図 1 のように表している（和田, 2009）。また，表現を方法とした数学的活動については，対象としての表現を明示しながら方法としての表現を用いる活動とし，学習指導要領における「数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動」がこれにあたるとしている（和田, 2013）[2)]。

この捉え方に従えば，対象としての表現は図 1 の「表現」または「表現’」と捉えることができる。それゆえ，対象としての表現を明示しながら方法としての表現を用いる数学的活動，すなわち「数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動」の基本的なプロセスは，図 2 のような図式で捉えることができるであろう。そして，これら二つの図式を対比することによって，数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動の過程では，表現を対象とした数学的活動の過程と比べ，さらに次のようなプロセスが加わることが分かる。

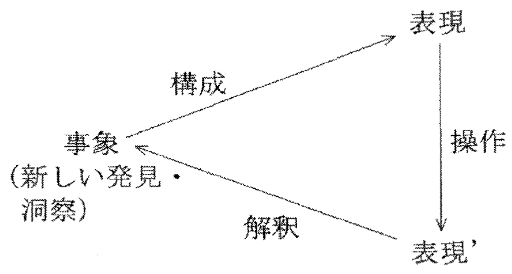

図１　表現を対象とした数学的活動の図式
（和田，2009，p.17）

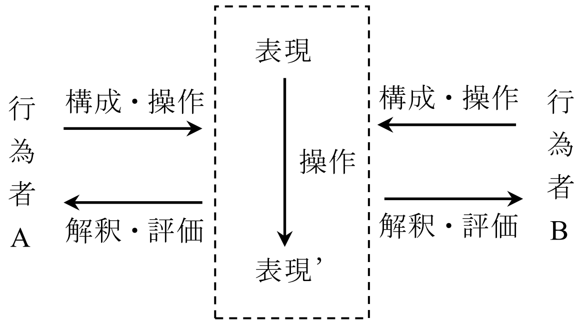

図２　表現を方法とした数学的活動の図式

・他者が解釈（評価）することを前提に，表現を構成（操作）すること
・他者が構成（操作）した表現を解釈（評価）したり，その解釈（評価）に基づいて表現を構成（操作）したりすること

本稿では，これらの数学的プロセスを,「数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動」に対応する観点として，問題作成の枠組みにおける α と β の両者に関わる新たな軸 γ に位置付けることを提案する。

４．表現に関わる数学的プロセスによる示唆

このような数学的プロセスを,「活用」に関する問題作成の枠組みに位置付けることによって，どのようなことが期待できるであろうか。以下では，特に二つの視点を取り上げて検討してみたい。

(1) 出題の趣旨の明確化による指導への示唆

例えば，H26 数学 B $\boxed{2}$ の問題（図 3）を見てみよう。この問題の趣旨について,『解説資料』（国立教育政策研究所, 2014）では次のような解説がなされている（pp. 97-99）。

［出題の趣旨］
見いだされた事柄について筋道を立てて考え，次のことができるかどうかをみる。
・事柄が成り立つことや成り立たないことの説明を場面に即して解釈すること
・事柄が成り立つか成り立たないかを判断し，説明すること

［各設問の趣旨］
設問（1）: 事柄が成り立つ理由を説明する場面において，与えられた説明の筋道を読み取り，式を適切に変形することで，その説明を完成することができるかどうかをみる。
設問（2）: 事柄が成り立たない理由を説明する場面において，与えられた説明の筋道を読み取り，反例をあげることで，その説明を完成することができるかどうかをみる。
設問（3）: 予想された事柄が成り立たないことを判断し，その事柄が成り立たない理由を説明することができるかどうかをみる。

このように，主題の趣旨では,「筋道を立てて考え」や「説明を場面に即して解釈する」といった，問題作成の枠組みにおける数学的なプロセス $\alpha3$（1）や $\beta1$（1）に即した文言が使われている一方で，各設問の趣旨では,「与えられた説明の筋道を読み取る」といった文言に変わっており，対応する数学的なプロセスを明確に示すことができていないように思われる。これは，問題作成の枠組みの限界を端的に表していると見ることができよう。もし仮にこの問題を，出題の趣旨にあるような $\alpha3$ (1)「数学的な結果を事象に即して解釈すること」に位置づけるのであれば，そのプ

ロセスは本来的には前述の「表現を対象とした数学的活動の図式」(図 1) における「表現'」から「事象（新しい発見・洞察）」に向かう矢印（解釈）に対応するプロセスであるがゆえに，このままの出題の仕方ではそのプロセスが問えていないことになる[3)]。つまり，この設問で意図する評価は, 図 1 における「解釈」ではなく，図 2 における「解釈」(他者の構成した表現の意味や意図を読み取ること）であることが分かる[4)]。

このことは，出題の趣旨や問題に対する批判を意図しているわけではなく，むしろ，この問題が「数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動」に対応した出題であることを明確にすることで，指導への示唆を得ることが本意である。近年，言語活動の充実という標語の流行も相まって，ペアやグループでの話し合いや意見発表などの活動を取り入れる授業が以前よりも増えてきたように感じている。それは決して悪いことではないが，問題は，その活動がそのまま「数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動」になるとは限らないということである。和田（2013）の言うように「数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動」を，対象としての表現を明示しながら方法としての表現を用いる活動と捉えるのであれば，その話し合い活動において，議論の対象となる「対象としての表現」が明示的でなければならない。また，対象としての表現を構成・操作するプロセスや，対象としての表現を解釈・評価するプロセスが明示的でなければならない。このような観点からすれば，この問題のように，他者の構成した説明（証明）を解釈・評価したり，それに基づいて説明（証

$\boxed{2}$ 一郎さんは，２つの偶数の性質について調べています。

次の(１)から(３)までの各問いに答えなさい。

（１）２つの偶数の和は，偶数になります。この理由は，次のように説明できます。**説明１**の $\boxed{\quad}$ には，同じ式が当てはまります。$\boxed{\quad}$ に当てはまる式を書き，**説明１**を完成しなさい。

説明１

m，n を整数とすると，２つの偶数は，$2m$，$2n$ と表される。
このとき，その和は，
$2m + 2n = \boxed{\quad}$
$m + n$ は整数だから，$\boxed{\quad}$ は偶数である。
したがって，２つの偶数の和は，偶数である。

差の場合も，同じように説明できるね。

（２）一郎さんは，和を積に変えて，２つの偶数の積がどんな数になるかを考えています。

２，４ のとき　$2 \times 4 = 8 = 8 \times 1$
４，６ のとき　$4 \times 6 = 24 = 8 \times 3$
10，16 のとき　$10 \times 16 = 160 = 8 \times 20$

一郎さんは，これらの結果から，２つの偶数の積は，いつでも８の倍数になると予想しました。
しかし，よく調べてみると，この予想は成り立たないことがわかります。このことは，次ページのように説明できます。

説明２

２つの偶数が，例えば，$\boxed{①}$，$\boxed{②}$ のとき，
$\boxed{①} \times \boxed{②}$ を計算すると，積は $\boxed{③}$ となり，
８の倍数ではない。
したがって，２つの偶数の積は，８の倍数になるとは限らない。

上の**説明２**の $\boxed{①}$ から $\boxed{③}$ までに当てはまる整数をそれぞれ書きなさい。

（３）一郎さんは，和を商に変えたとき，２つの偶数の商は，いつでも偶数になると予想しました。この予想は成り立ちますか。下のア，イの中から正しいものを１つ選び，それが正しいことの理由を説明しなさい。

ア　２つの偶数の商は，偶数になる。

イ　２つの偶数の商は，偶数になるとは限らない。

図３　H26 数学Ｂ$\boxed{2}$「反例をあげて説明すること」

明）を構成・操作したりすることを意図した活動は,「数学的な表現を用いて説明し，伝え合う活動」の典型であると捉えることができよう。授業においては，完成された，間違いのない表現だけではなく，未完成のものや誤りのある表現を取り上げることで，多様な活動を実現することが期待される。

（2）評価問題を開発する視点としての機能

また，このような「数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動」に関する数学的なプロセスを顕在化し，問題作成の枠組みに位置づけることによって，それらが，評価問題を開発する際の新たな視点として機能することも期待できる。例えば，表現を方法とした数学的活動においては，他者を意識して表現することや,説明を受ける側の意識も重要である。自分なりに表現することだけでなく，他者を意識して，説明する相手や目的に応じて適切な表現を選択したり，構成・操作したり，評価・改善したりすることもまた必要な力である。例えば，集めたデータをもとに，自分の主張を分かりやすく説明するにはどのようなグラフをどのように示せば効果的か，この場面では，表，式，グラフのどれを用いればよいかなど，場面や目的に応じて表現形式を選択したり，表現を評価し改善したりする活動の評価も考えられる。このような観点からの出題は，筆者の知る限り，H26 算数 B$\boxed{2}$（3）の設問（図 4）のみであり，中学校数学や小学校算数でのさらなる評価問題の開発が望まれる。

(3)　あきらさんは，６・７月の水の使用量が１年間の水の使用量の $\frac{1}{4}$ より多いことを説明します。下の **1** から **4** までのどのグラフを使うと最もわかりやすいですか。１つ選んで，その番号を書きましょう。

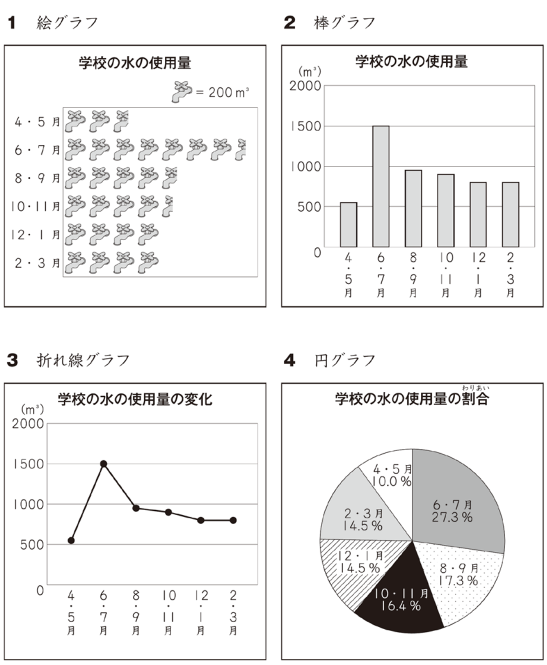

図４　H26 算数Ｂ$\boxed{2}$（3）「目的に応じた表現」

５．おわりに

本稿では，全国調査の主として「活用」に関する問題の問題作成の枠組みにおける「数学的なプロセス」を，他者との関わりという視点から再考し，表現に関わる数学的なプロセスの具体化を試みた。表現に関わる数学的活動には，表現を対象とする数学的活動と，表現を方法とする数学的活動とがあり，後者の活動に位置付けられる「数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動」の過程では，表現を対象とした数学的活動の過程と比べ，さらに,「他者が解釈（評価）することを前提に,表現を構成（操作）すること」や「他者が構成（操作）した表現を解釈（評価）したり，その解釈（評価）に基づいて表現を構成（操作）したりすること」が求められることを明らかにした。また，そのような数学的プロセスを具体化することによって，数学の授業において具現化されるべき数学的活動の例や，今後の学力調査において開発が期待される評価問題の例を示すことができた。児童生徒の学力の実態をよりよく把握し，学習指導の適切な評価と改善の方向性を探るために，それらをより具体的に捉え，示していくことが今後の主要な課題である。

注

1）NCTM のスタンダード（NCTM, 2000）では，その他に，「問題解決」，「推論と証明」，「関連付け」，「表現」の 4 つがプロセス・スタンダードに位置付けられている。

2）この分類に従えば，専門家検討会議の『報告書』に示された観点「事象を数学的に解釈したり自分の考えを数学的に表現したりすること」や問題作成の枠組みにおける数学的なプロセス $\alpha 3$ は，主として「表現を対象とした数学的活動」の評価を意図した観点と捉えることができるであろう。

3）例えば，設問（1）で言えば，式変形の過程（$2m+2n = 2(m+n)$）を示し，$2(m+n)$ から読み取れることは何かを問うような設問になるだろう。

4）もしこの問題の趣旨を，本稿で提案する数学的プロセスの文言を用いて表せば，概ね次のように表すことができるであろう。

設問（1）：事柄が成り立つ理由を説明する場面において，他者の構成した説明を解釈し，その解釈に基づいて，式を適切に変形することで説明を完成することができるかどうかを見る。

設問（2）：事柄が成り立たない理由を説明する場面において，他者の構成した説明を解釈し，その解釈に基づいて，反例をあげることで説明を完成することができるかどうかを見る。

設問(3)：他者の予想した事柄を評価し，その評価に基づいて説明を構成することができるかどうかをみる。

引用・参考文献

岩田耕司. (2014). 隠れた学力観とその顕在化による可能性－全国学力・学習状況調査（中学校数学）にみる学力観－. 日本数学教育学会『第 2 回春期研究大会論文集』, pp. 5-12.

勝野頼彦ほか. (2014).『資質や能力の包括的育成に向けた教育課程の基準の原理［改訂版］』（教育課程の編成に関する基礎的研究報告書 7）. Retrieved from http://www.nier.go.jp/kaihatsu/pdf/Houkokusho-7.pdf

国立教育政策研究所. (2014a).『平成 26 年度全国学力・学習状況調査解説資料小学校算数』.

国立教育政策研究所. (2014b).『平成 26 年度全国学力・学習状況調査解説資料中学校数学』.

清水美憲. (2012). 評価問題作成における数学的なプロセスへの焦点化－全国学力・学習状況調査（中学校数学）の動向と課題－. 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第 94 巻, 第 9 号，pp. 30-33.

清水美憲. (2014). 数学教育における学力論の再構築に向けて. 日本数学教育学会『第 2 回春期研究大会論文集』，pp. 1-4.

全国的な学力調査の実施方法等に関する専門家検討会議 (2006).『全国的な学力調査の具体的な実施方法等について（報告）』.

中原忠男. (1995).『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』，聖文社.

三輪辰郎. (1996). 文字式の指導序説.『筑波数学教育研究』，第 15 号，pp. 1-14.

文部科学省. (2008).『中学校学習指導要領解説数学編』（平成 20 年 9 月），教育出版.

文部科学省. (2014).『育成すべき資質・能力を踏まえた教育目標・内容と評価の在り方に関する検討会－論点整理－』（平成 26 年 3 月 31 日）. Retrieved from http://www.mext.go.jp/component/b_menu/shingi/toushin/__icsFiles/afieldfile/2014/07/22/1346335_02.pdf

和田信哉. (2009). 表現からみた数学的活動. 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第 91 巻, 第 9 号，pp. 15-20.

和田信哉. (2013). 数学教育における表現活動に関する一考察.『鹿児島大学教育学部研究紀要 教育科学編』，第 64 巻，pp. 29-38.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA.

付記：本研究は，JSPS 科研費（No. 23330251, 26381219）の助成を受けて行われています。