第４回春期研究大会論文集
創成型課題研究の部

複数の事象の関係を捉え統合する過程の分析

Analyzing the Process of Grasping the Relations among Several Events and Integrating them in Mathematics

岩田耕司　　　清水美憲
福岡教育大学　筑波大学

要　約

全国学力・学習状況調査（以下，全国調査）の「活用」に関する問題作成の枠組みに示された「数学的なプロセス」は，数学的活動の諸相を学力評価の目的から整理したものである．この「数学的なプロセス」は，知識・技能等を実生活の様々な場面に活用する力（α）と，様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力（β）を中核とし，さらにはそれらの両方に関わる力（γ）の三つの力から構成されている．本稿では，特に，この第三の力が用いられる過程について，実際に出題された調査問題とその結果から分析し，一つの事象と他の事象との関係を捉えることや，複数の事象を統合することの下位の過程を分析的に明らかにし，カリキュラムへの位置づけを考察した．

キーワード：数学的活動，数学的なプロセス，全国学力・学習状況調査

１．研究の目的と方法

周知の通り，平成20年に告示された中学校学習指導要領では，教育課程の基準として初めて「数学的活動」を各学年の指導内容に規定し，特に重視する数学的活動のタイプを明示した（文部科学省，2008）．

本稿では，このように強調された数学的活動を生徒の数学学習のあり方を示す一つのプロセススタンダードと捉え，その一つの側面に焦点を当てることで，生徒の数学学習のプロセスに焦点を当てた学習指導のあり方について考える．そのために，全国調査（中学校数学）の主として「活用」に関する問題作成の枠組み（例えば，国立教育政策研究所，2015）における「数学的なプロセス」のうち，知識・技能等を実生活の様々な場面に活用する力（α）と，様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力（β）の両方に関わる力（γ）を分析する．この第三の力が用いられる過程について，実際に出題された調

査問題とその結果から分析し，一つの事象と他の事象との関係を捉えることや，複数の事象を統合することの下位の過程を分析的に明らかにする．

２．数学的方法への着目

現在の学習指導要領（平成 20 年告示）において，中学校数学科で特に重視されている数学的活動は次の三つである．

ア　既習の数学を基にして，数や図形の性質などを見いだし，発展させる活動

イ　日常生活や社会で数学を利用する活動

ウ　数学的な表現を用いて，根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動

このような，数学学習における活動の様相について具体的に考える際に，全国調査（中学校数学）における主として「活用」に関する問題作成の枠組み（例えば，国立教育政策研究所，2015）が参考になる．この枠組みでは，数学的な知識や技能等が活用される文脈･状況（実生活や身の回りの事象での考察，他教科などの学習，算数・数学の世界での考察）や，そこで用いられる力と数学的なプロセス，そして数学的内容の三つの観点から問題作成のカテゴリーが整理されている．このうち，数学的活動の過程や方法という観点から注目されるのは，「活用する力」と「数学的なプロセス」（表 1）である．

「数学的なプロセス」は，全国的な学力調査の実施方法等に関する専門家検討会議（2006）の報告書（以下,『報告書』）の中で，主として「活用」に関する問題の，問題作成の基本理念や評価対象として示された「知識・技能等を実生活の様々な場面に活用する力」や,「様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力」を数学科の立場から捉え直したものである．実際には，日常的な事象や数学の世界の事象にアプローチする際に用いられる様々な数学的方法を示すものと捉えることができ，数学的活動の諸相を，

表１．活用する力と数学的なプロセス
（国立教育政策研究所，2015）

α：知識・技能などを実生活の様々な場面で活用する力

α1：日常的な事象等を数学化すること
- α1 (1) ものごとを数・量・図形等に着目して観察すること
- α1 (2) ものごとの特徴を的確に捉えること
- α1 (3) 理想化，単純化すること

α2：情報を活用すること
- α2 (1) 与えられた情報を分類整理すること
- α2 (2) 必要な情報を適切に選択し判断すること

α3：数学的に解釈することや表現すること
- α3 (1) 数学的な結果を事象に即して解釈すること
- α3 (2) 解決の結果を数学的に表現すること

β：様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力

β1：問題解決のための構想を立て実践すること
- β1 (1) 筋道を立てて考えること
- β1 (2) 解決の方針を立てること
- β1 (3) 方針に基づいて解決すること

β2：結果を評価し改善すること
- β2 (1) 結果を振り返って考えること
- β2 (2) 結果を改善すること
- β2 (3) 発展的に考えること

γ：上記α，βの両方に関わる力

γ1：他の事象との関係を捉えること
γ2：複数の事象を統合すること
γ3：多面的にものを見ること

そこで用いられる力に焦点を当て，下位の項目に整理したものとみられる．つまり，数学的活動の諸相において活動を支え，またその活動を遂行するために必要となる資質や能力を示しているとみることができる．

また，ここでは，専門家検討会議の『報告書』の中で示された,「知識・技能等を実生活の様々な場面に活用する力」（α）と「様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力」（β）だけでなく，数学科の立場から，その両方に関わる力（γ）を第三の力として独自に位置づけていることも注目に値する．第三の力としての「γ」は,「他の事象との関係を捉えること」,「複数の事象を統合すること」,「多面的にものを見ること」の三つ

のプロセスから構成されているが，それらの示し方は，他の「α」,「β」と比較して大きな括りに留まっている．数学的活動が指導内容に位置づけられた学習指導要領において，このようなプロセスの下位の過程を明らかにすることで，指導内容としての数学的なプロセスが一層明確になり，教科書の紙面，教室での学習指導の過程，学習評価の課題等に反映されることが期待できる．

３．「γ」の問題の出題とその結果

全国調査（中学校数学）において，「γ」を評価対象とする過去の出題を，出題年度，問題の名称，評価対象のプロセス，問題の特徴の観点から整理すると表 2 のようになる．平成 19 年度から平成 27 年度までの 9 年間，主として「活用」に関する問題が，毎年，大問で 5 題もしくは 6 題ずつ出題されていることを考えると,「γ」を評価対象とする出題が極めて少ないことが分かる．これは，数学的なプロセスとしての「γ」が,「α」と「β」の両者に関わる総合的な力であり，簡単には評価できないことや，ペーパーテストによる評価方法のある種の限界を表している．

ここでは，複数の事象の関係を捉えることに関わる「γ1」と「γ2」に絞って，具体的な調査問題とその結果について見てみたい．まず,「γ」としての最初の出題となった平成 20 年度の $\boxed{3}$「ベニヤ板と釘」の問題では，設問（3）で，先に示された二つの事象（ベニヤ板全体の厚さと枚数，釘全体の重さと本数）に共通する数量の関係としての比例の関係や，ベニヤ板の枚数や釘の本数を求める方法に共通する考えとしての比例の考えに着目し，それら二つの事象を統合的に捉えることが求められた（図 1）．正答率は 50.5%であり，誤答としては,「総数を重さから求めている」を選択した類型 3 の反応率が 25.8%と高かった．

また，平成 24 年度の $\boxed{4}$「作図と図形の対称性」の問題も，設問（3）で,「ベニヤ板と釘」の問題と同様，先に示された二つの事象（直線ℓ上の点 P を通るℓの垂線の作図と直線ℓ上にない点 P を通るℓの垂線の作図）に共通して用いられている図形の性質に着目し，それら二つの事象を統合的に捉えることが求められた（図 2）．正答率は 58.2%であり，両年度に共通して，複数の事象を統合的に捉えることに課題が見られた．

一方，平成 25 年度の $\boxed{3}$「水温の変化と気温の変化」の問題では，一つの事象（水を熱した時間と水温の変化）に関する問題解決の場面を先に示し，設問（3）で，それと同様に考えることのできる他の事象として，一次関数でモデル化された事象に着目することが求められた（図 3）．正答率は 27.5%であり，その直前の設問である設問（2）の，事象を数学的に解釈し，問題解決の方法を数学的に説明することができるかどうかをみる問題（正答率

表２．数学的なプロセスγの出題

年度	問題の名称	評価対象のプロセス	問題の特徴
H20（2008）	$\boxed{3}$ベニヤ板と釘	γ2：複数の事象を統合的に捉えること	複数の事象に共通する数量の関係や問題解決に使った考えとして，比例に着目すること
H24（2012）	$\boxed{4}$作図と図形の対称性	γ2：複数の事象を統合的に捉えること	二つの作図に用いられている共通な図形の性質に着目すること
H25（2013）	$\boxed{3}$水温の変化と気温の変化	γ1：他の事象との関係を捉えること	同様に考えることのできる他の事象として，一次関数でモデル化された事象に着目すること
H25（2013）	$\boxed{6}$碁石の総数	γ3：事象を多面的にみること	碁石の個数を求める複数の方法を解釈すること

32.6%）に正答した生徒ですら，62.9%の割合で本設問に誤答していることが報告されている（国立教育政策研究所，2013）.

このように，数学的な場面や日常生活の場面における複数の事象が提示され，それらの関係を捉えたり，見かけ上異なるものを数学的な関係の共通性に着目して統合的に捉えたりするタイプの問題はいずれも正答率が低く，このようなプロセス（活動）については，その要素を分析的に整理して，カリキュラムに位置づけることが必要であろう.

４．事象の関係を捉え統合する過程の分析

一つの事象と他の事象との関係を捉えたり，複数の事象を統合したりすることの下位の過程を分析するにあたり，「γ」の観点から出題された問題の，各設問に対する解答状況をより詳しく見てみよう.

平成 20 年度の$\boxed{3}$「ベニヤ板と釘」の問題では，設問（1）において，ベニヤ板 1 枚の厚さが分かっているときにベニヤ板の枚数を求める方法が示され，そこで用いられている数量を明らかにすることが求められている．正答率は 72.3%であり，7 割以上の生徒が，厚さや高さ，長さなど，ベニヤ板の枚数を求めるために用いられた数量を答えることができていた．また，設問（2）は，釘全体の重さが分かっているときに釘の本数を求める方法を説明する問題であり，正答率は 51.9%であった．一見すると，あまり良くない結果ではあるものの，釘の本数を求めるために釘全体の重さ以外に調べる必要のある数量（用いるもの）として，「釘 1 本の重さ」を選べている解答は，類型 1 から 6 までを合わせると 89.1%にのぼり，およそ 9 割もの生徒が，釘の本数を求めるために用いる数量を把握できていたことに

（3）同じものがたくさんあるときには，その総数を工夫して求めることができます。（1）や（2）の場合で，総数を求める方法に共通する考えを，下のアからオの中から１つ選びなさい。

ア　総数を直接数える。

イ　総数を厚さから求める。

ウ　総数を重さから求める。

エ　比例を利用する。

オ　反比例を利用する。

図１．H20$\boxed{3}$「ベニヤ板と釘」

図１（前ページ）と図２のように，点Ｐが直線 ℓ 上にある場合も ℓ 上にない場合も，同じ手順①，②，③で垂線が作図できます。このように作図できるのは，この手順による点Ｑ，Ａ，Ｐ，Ｂを順に結んでできる図形が，どちらの場合も，ある性質をもつ図形だからです。その図形が下のアからエまでの中にあります。正しいものを１つ選びなさい。

ア　直線ＰＱを対称の軸とする線対称な図形

イ　直線 ℓ を対称の軸とする線対称な図形

ウ　点Ｑを対称の中心とする点対称な図形

エ　直線 ℓ と直線ＰＱの交点を対称の中心とする点対称な図形

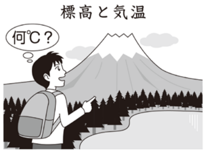
図２．H24$\boxed{4}$「作図と図形の対称性」

（3）（2）では，水を熱し始めてから x 分後の水温 y ℃について調べました。そこでは，２つの数量 x，y の値の組を調べ，それらの関係を表す点がグラフ上で一直線上にあると考えました。

これと同じように考えて求められるものが，下のアからエまでの中にあります。正しいものを１つ選びなさい。

ア

標高と気温



求めるもの
富士山のふもとにある河口湖観測所（標高 860 m）の気温が 23.3 ℃のときの富士山６合目（標高 2500 m）の気温

知られていること
ある地域の気温 y ℃は，地上から１万 m ぐらいまでは，高さ x m が高くなるのにともなって，100 m ごとに約 0.6 ℃下がる。

イ

速さと時間

求めるもの
家から 2100 m 離れた図書館まで分速 70 m で移動するときにかかる時間

知られていること
ある道のりを分速 x m で y 分間移動するとき，x と y の積は一定である。

ウ

重さと料金

求めるもの
送りたい郵便物の重さが 90 g のときの料金

知られていること
重さ x g の定形外郵便物の料金 y 円は，50 g までが 120 円，100 g までが 140 円のように，重さによって決められている。

エ

時刻と気温

求めるもの
日の出の気温が 10 ℃だった日の 15 時の気温

知られていること
晴れの日，日の出から x 時間後の気温 y ℃は，日の出から 14 時ごろまでほぼ上がり続け，その後翌日の日の出までほぼ下がり続ける。

図３．H25$\boxed{3}$「水温の変化と気温の変化」

なる．また，平成 24 年度の$\boxed{4}$「作図と図形の対称性」の問題でも，設問（1）は，作図によってできた図形の特徴として，ある直線で折ったときに重なる点を答える問題であるが，正答率は 89.7%と高く，多くの生徒は垂線を折り目として左右がぴったり重なるイメージを持てていたように思われる．

このように考えると，多くの生徒は，それぞれの問題解決の結果を振り返り（β2(1)），それぞれの特徴として用いられた数量や図形の特徴を捉えること（α1 (2)）まではできているものの，それらの数量の関係や図形の特徴を数学的な概念や表現という水準で捉え直すことができていないものと考えられる．事実，「γ」の観点からの出題ではないものの，α1(2)「ものごとの特徴を的確に捉えること」の観点から出題されている問題では，表 3 に示すように，ものごとの特徴を数学的な概念や表現を用いて捉えることに課題が見られる．

つまり，複数の事象を統合することの下位の過程では，ものごとを数・量・図形等に着目して観察し，その特徴を捉えること，および，その捉えた特徴を数学的な概念や表現を用いて捉え直すことが求められ，その捉え直しが生徒にとって難しいものと考えられる．

このことは，一つの事象と他の事象との関係を捉えることについても同様のことが言えるであろう．例えば，平成 25 年度の$\boxed{3}$「水温の変化と気温の変化」の設問（3）では，熱した時間と水温の変化と同様に考えることのできる他の事象として，標高と気温の関係を選ぶためには，「標高が高くなるのにともなって 100m ごとに気温が 0.6℃下がる」ということの数学的な意味を捉え直さなければならない．

このように考えれば，一つの事象と他の事象との関係を捉えることや，複数の事象を統合することの下位の過程には，「振り返って考えること」や「ものごとを数・量・図形等に着目して観察すること」，「ものごとの特徴を的確に捉えること」などの「α」や「β」のプロセスに加え，「ものごとの特徴を数学的な概念や表現を用いて捉え直すこと」が位置づき，他の事象を考える際にはその数学的な概念や表現に基づいて，また，統合する過程においてはそれらの共通性に着目して以後の考察が進められることになる．例えば，平成 21 年度に出題された$\boxed{1}$「紋切り遊び」の問題（図 4）でも，紋切り遊びでできる図形の特徴を，線対称や対称軸など，数学的な概念や表現を用いて捉え直すことで，見かけ上異なる模様

表 3．ものごとの特徴を的確に捉えること（α1(2)）の出題例

問題番号	設問の概要	設問の趣旨	正答率
H20$\boxed{5}$（2） 富士山の気温	高さの増大に伴って，気温が一定の割合で減少することから，高さと気温との関係を選ぶ	事象を理想化・単純化してとらえ，言葉で表現された事柄の数学的な意味を考えることができる	25.0%
H21$\boxed{1}$（2） 紋切り遊び	「紋切り遊び」でできる模様だけにみられる図形の性質を説明する	事柄の特徴を的確にとらえ，数学的な表現を用いて説明することができる	47.2%
H22$\boxed{6}$（1） 厚紙と封筒	L 字型の厚紙を引き出すとき，その長さと面積の関係を表すグラフの特徴を説明する	グラフに表れた変化する数量の特徴を数学的に表現することができる	40.9%
H24$\boxed{6}$（2） 正多角形の外角	正多角形の頂点の数と正多角形の 1 つの外角の大きさの関係を，「…は…の関数である」という形で表現する	図形の性質を数量の関係に着目して捉え直し，その特徴を捉え，数学的に表現することができる	19.3%

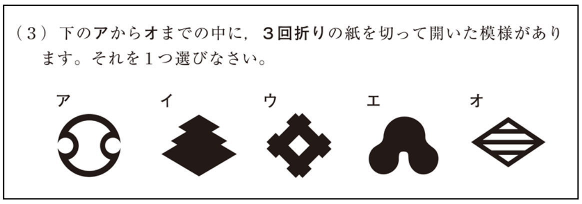


図４．H21 $\boxed{1}$「紋切り遊び」

を対称軸の本数という共通性に着目して分類・整理したり，紋切り遊びと同じ概念や手法を用いて考察できる事象に，作図や光の反射などの事象があることに気づいたりできると考えられる．

以上のことから，複数の事象の関係を捉えることに関わる「γ1」と「γ2」のプロセスは，以下のように整理し直すことができる．

γ1'：事象の関係を捉え，統合すること

- γ1'(1) ものごとの特徴を数学的な概念や表現を用いて捉え直すこと
- γ1'(2) 数学的な概念や表現に基づいて類似な事象を考えること
- γ1'(3) 数学的な概念や表現の共通性に着目すること

このように，ものごとの特徴を捉えることと，その特徴を数学的な概念や表現を用いて捉え直すこととを分けて捉え，段階的に指導することで，他の事象との関係を考えたり，統合したりすることの指導がより一層明確になると考える．また，それら数学的なプロセスの下位の過程を明らかにすることで，以前の枠組みでは必ずしも明示的でなかった，数学的な考え方としての「帰納的な考え方」と「類推的な考え方」を，枠組みに明示的に位置づけることができる．

５．まとめと今後の課題

全国学力・学習状況調査の「活用」に関する問題作成の枠組みにおける「数学的なプロセス」は，数学的活動の諸相を学力評価の目的から整理したものである．この「数学的なプロセス」は，知識・技能等を実生活の様々な場面に活用する力（α）と，様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力（β）を中核とし，それらの両方に関わる力（γ）から構成されている．

本稿では，学力評価の対象となるこの第三の力が用いられる過程について，実際に出題された調査問題とその結果から分析し，一つの事象と他の事象との関係を捉えることや，複数の事象を統合することの下位の過程を分析的に明らかにした．数学的活動が内容として位置づけられた学習指導要領において，このような活動の下位の過程を明示的に位置づけることで，指導内容としての数学的なプロセスが一層明確になり，教科書の紙面，教室での学習指導の過程，学習評価の課題等に反映されることが望ましい．

謝辞　本研究は JSPS 科研費（No. 23330251 及び No. 26381219）の助成を受けています．謹んで感謝の意を表します．

引用・参考文献

国立教育政策研究所 (2013).『平成 25 年度全国学力・学習状況調査報告書中学校数学』.

国立教育政策研究所 (2015).『平成 27 年度全国学力･学習状況調査解説資料中学校数学』.

清水美憲 (2012). 評価問題作成における数学的なプロセスへの焦点化－全国学力・学習状況調査（中学校数学）の動向と課題－，日本数学教育学会誌『数学教育』, 第 94 巻，第 9 号，pp. 30-33.

清水美憲 (2014). 数学教育における学力論の再構築に向けて，日本数学教育学会『第 2 回春期研究大会論文集』，pp. 1-4.

全国的な学力調査の実施方法等に関する専門家検討会議（2006).『全国的な学力調査の具体的な実施方法等について（報告)』.

文部科学省（2008).『中学校学習指導要領解説数学編』（平成 20 年 9 月)，教育出版.