第４回春期研究大会論文集
創成型課題研究の部

# 課題探究として証明することのカリキュラム開発
# ー領域「関数」における学習レベルとその移行ー

## Curriculum Development of Explorative Proving: Levels of Learning Proofs in ‘Functions’ and its progression

岩田耕司　宮崎樹夫　牧野智彦　藤田太郎
福岡教育大学　信州大学　宇都宮大学　University of Exeter

要　約

中学校数学科の領域「関数」では，事柄が正しい理由を説明することは，実際に学習活動として展開され，評価の対象とされているにもかかわらず，その扱いは潜在的なものに留まっていると言わざるを得ない（宮崎ほか，2015）．本稿では，領域「関数」における課題探究として証明することのカリキュラム開発の枠組みの構築へ向けて，領域「関数」における証明の構想やその学習レベルを検討し，岩田ほか（2015）で検討した証明の構成の学習レベルと組合せることで，領域「関数」における証明の学習レベルの移行過程を設定した．また，それらの移行過程に基づき意図される活動と，各学年の学習内容とを対応付けることで，領域「関数」における証明の「内容‒活動対応表」を作成した．この「内容‒活動対応表」を今後，授業としてどのように形づくるかが重要な検討課題となる．

**キーワード**：課題探究，証明すること，中学校数学，関数，カリキュラム開発

## １．はじめに

我が国の中学校数学科において証明の学習は，従来，主に領域「図形」で扱われ，領域「数と式」においても「文字式による説明」等として顕在的に扱われてきた．これに対し領域「関数」では，事柄が正しい理由を説明することは実際に学習活動として展開され，評価の対象とされているにもかかわらず，その扱いは潜在的なものに留まっていると言わざるを得ない（宮崎ほか，2015）．

そのような認識のもと，岩田ほか（2015）では，領域「関数」における課題探究として証明することのカリキュラム開発の枠組みの構築へ向けて，特に，領域「関数」における「書かれる」証明としてどのような証明が望ましいかを検討し，その証明の構成に関する学習レベルを検討した．その一方で，課題探究として証明することの全体像から見たときに，領域「関数」における「証明の構想」や「評価・改善・発展」をどのように捉えれば

よいかや，証明の構成や構想の学習レベルの移行に基づき意図される活動を，実際の学習内容とどのように対応付けるかなどは未検討のまま残されていた．本稿は，それら残された課題のうち，以下の 3 つの課題に取り組むものである．

1）領域「関数」における証明の構想やその学習レベルを検討すること．
2）領域「関数」における証明の学習レベルの移行過程を設定すること．
3）学習レベルの移行に基づき意図される活動と各学年の学習内容とを対応付けること．

## ２．証明の構成の学習レベル

### （1）領域「関数」における証明すること

関数指導の一つの大きなねらいは，関数的な見方や考え方を養うことである（文部科学省，2008b）．本研究では，このような関数指導の意義に鑑み，領域「関数」における証明の対象としての「事柄」や「事柄の生成」を，「関数の性質に関する命題を予想すること」だけでなく,「具体的な事象に関する観察や実験の結果を関数とみなすことによって未知の状況を予測したり，事象を解釈したりすること」も含めて捉えている．特に本研究では後者の活動に焦点を当てて，領域「関数」における課題探究として証明することを捉える．つまり,本研究で対象とする「証明すること」は,「関数を活用して予測したり,解釈したりした結果を正当化すること」である．

### （2）領域「関数」における証明の要件

数学的証明において，推論の過程の適切さが検証の対象であることと同様に，解釈や予測の正当化に関しても，その結論を導くまでの過程が適切かどうかの検証は必要不可欠である．そのような，関数を活用して予測したり，解釈したりする過程は一般に，数学的モデル化の過程とみることができ，それゆえ，領域「関数」における証明の要件は数学的モデル化の過程を視点として考えることができる．岩田ほか（2015）では，以上のような考えのもとに，領域「関数」における証明の要件を，数学的モデル化の主要な過程である定式化（formulate）, 運用（employ）, 解釈（interpret）という 3 つの過程から具体化した．本稿ではそのうち，運用や解釈のレベルの表現に若干の修正を加え，領域「関数」における証明の要件を，次のようにレベル化して捉える．

《定式化（formulate）の正当化》

F1．課題解決に用いる関数を示す．

F2．課題解決にその関数を用いることの妥当性を，数学的根拠に基づいて示す．

F3．課題解決にその関数を用いることの妥当性を，理想化・単純化等に言及し，数学的根拠に基づいて示す．

《運用（employ）の正当化》[1)]

E1．データから数学的結果を導く数学的処理の過程を記述する．

E2．データから数学的結果を導く数学的処理の過程を，用いた数学的モデルを明示して記述する．

《解釈（interpret）の正当化》[2)]

I1．数学的結果を解釈した結果を示す．

I2．数学的結果を解釈した結果を示すとともに，解釈した結果には制約が伴うこととその要因について記述する．

### （3）証明の構成の学習レベル

中学校数学科の領域「関数」において，目標となる証明のレベルは，定式化（F），運用（E），解釈（I）それぞれについて，前述した F3，E2，I2 の要件を同時に満たす証明（以後，（F3；E2；I2）レベルの証明のように略記する）である．しかしながら，このような証明を生徒がすぐに構成できるようになるとは考え難く，その学習には相当の困難が伴うことが予想される．それゆえ，このレベルに至るまでの段階を意図的に仕組む必要がある．

まず，その一つの段階として領域「関数」における証明の「骨格」を学ぶ段階が考えられる．つまり，（F1；E1；I1）レベルの証明を

構成することを意図する段階である．証明を素朴に，前提と結論，そして，それらを結ぶ根拠の 3 要素で捉えれば，（F1；E1；I1）レベルの記述はそれら 3 つの要素を最低限満たす記述と捉えられ，このような証明を構成することを一つの目標に据えることは合理的である．それゆえこの段階を，領域「関数」における証明を構成することの学習に関する第一のレベル（C1）に設定する（C1 のことを，以後，C1（F1；E1；I1）のようにも表す）．

次に，学んだ証明の「骨格」に肉付けしていく段階が考えられる．つまり，定式化（F），運用（E），解釈（I）それぞれの記述の質を高める段階である．その際，（F2；E2；I2）レベルの証明を構成することを意図し，その後，（F3；E2；I2）レベルの証明を構成することを意図することも考えられるが，本研究では（F2；E2；I1）を経て，（F3；E2；I2）へと高めることを想定する．なぜなら，解釈 I2 の要件である結果の制約やその要因について記述するためには，定式化 F3 の要件である理想化・単純化への意識が必要不可欠と考えるからである．それゆえ，領域「関数」における証明を構成することの学習に関する第二のレベル（C2）として（F2；E2；I1）レベルの証明を，第三のレベル（C3）として（F3；E2；I2）レベルの証明を，それぞれ構成できるようにすることを意図する段階を設定する．

## ３．証明の構想の学習レベル

証明を構想するとは，事柄の前提と結論を演繹的な推論によってどのように結びつけるかについて探る営みである（辻山，2011）．この営みでは，前提と結論を結びつけるために，どのような着想に基づいて，何を（対象），どのように用いればよいのか（方法）を捉えることが必要である（宮崎・藤田，2013）．領域「関数」において，前提に当たるものは与えられたデータや具体的な事象に関する観察や実験の結果であり，結論に当たるものは，関数を活用して予測したり，解釈したりした結果である．そして，それら前提と結論を結びつけるものが関数であり，その用い方は，数学的モデル化の各過程（定式化，運用，解釈）を視点として捉えることができる．このように，前提と結論を結び付けるために必要な関数とその用い方を，数学的モデル化の各過程を視点として探ることが，領域「関数」における証明を構想することの学習に関する第一のレベル（P1）である．

一方，関数とその用い方をより深く探る場合には，数学的モデル化の各過程に加え，それら各過程の正当化の要件を視点とすることが必要である．例えば，定式化の正当化には関数判断の数学的根拠を示す必要がある，運用の正当化には，運用した数学的モデルを明示する必要があるといった視点をもとに，証明に必要な記述を探ることである．これが，領域「関数」における証明を構想することの学習に関する第二のレベル（P2）である．

また，数学的モデル化の各過程は個々独立したものではなく，相互に関連する過程である．例えば，結果の解釈に制約が伴う要因の一つは，具体的な事象における数量の関係を理想化・単純化したことであり，これは，定式化と解釈の過程が相互に関連することを示している．それゆえ，関数とその用い方を探る場合には，数学的モデル化の各過程を独立した視点として捉えるのではなく，相互に関連した視点として捉える必要がある．このように，前提と結論を結び付けるために必要な関数とその用い方を，数学的モデル化の過程全体を視点として探ることが，領域「関数」における証明を構想することの学習に関する第三のレベル（P3）である．

以上のことから，証明を構想することの学習に関するレベルとして次の 3 つを設定する．

P1：前提と結論を結び付けるために必要な関数とその用い方を，数学的モデル化の各過程を視点として探る．

P2：前提と結論を結び付けるために必要な関数とその用い方を，数学的モデル化の各過程における正当化の要件を視点として探る.

P3：前提と結論を結び付けるために必要な関数とその用い方を，数学的モデル化の過程を視点として探る.

## ４．証明の学習レベルの移行過程

これまでに述べた，証明を構想することの 3 つのレベル P1，P2，P3 と，証明を構成することの 3 つのレベル C1，C2，C3 とを組合せることによって，（P1，C1）から（P3，C3）までの 9 つの学習レベルが想定されうる．また，証明を構想することと証明を構成することが未分化であっても，いずれか一方を意図する学習レベルが想定され，それぞれ，証明を構想することに関しては P1，P2，P3，証明を構成することに関しては C1，C2，C3 と表す．さらに，証明を構想することと構成することの両者が未分化である学習レベルが想定されうる．このレベルを O と表す.

以上のことから，図 1 のような，16 の学習レベルが領域「関数」における証明の学習レベルとして想定されうる.

領域「関数」における課題探究として証明することのカリキュラムにおいて，移行の基点となるのは学習レベル O，すなわち証明を構想することと構成することが未分化なレベルである．一方，学習目標として，最終的に到達されるべき学習レベルは（P3，C3）である．カリキュラムの設計上，証明を構想することと証明を構成することの各レベルは上がることはあっても下がることはなく，その意味で，学習レベル O を基点とし（P3，C3）に至るまでの移行過程には，理論上，20 通りの経路が想定されうる．それらの経路のうち，カリキュラム開発の枠組みとして，どの経路を採用すべきであろうか. 本研究ではそれを，次の 2 つの原理によって特定する.

一つは，証明を構成することの学習は，証明を構想することの学習に先行するということである．証明を構想するためには，構想の対象である証明がどのようなものかを予め知っておく必要があり，構成の学習レベル C が上がること無しに，構想の学習レベル P が自然と上がることは期待できない．つまり，O →P1 や（P1，C1）→（P2，C1）などの経路は考え難い.

もう一つは，証明を構想することと証明を構成することとは，相補的かつ互恵的な関係をもつということである（宮崎・藤田, 2013）．証明を構成することだけでなく，証明を構想することによって，証明の満たすべき要件についての理解が深められる．それゆえ，学習レベルの移行を考える際には，証明を構想することと，証明を構成することのレベルを交互に上げていく必要がある.

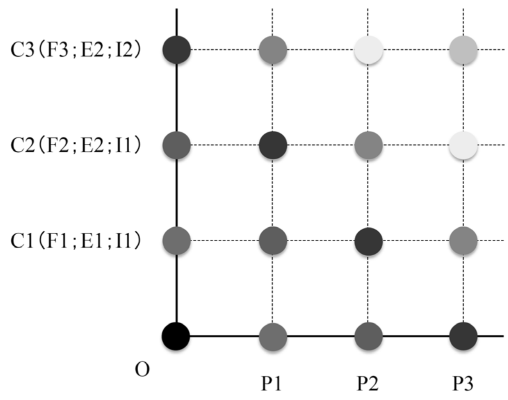

図 1．学習レベル

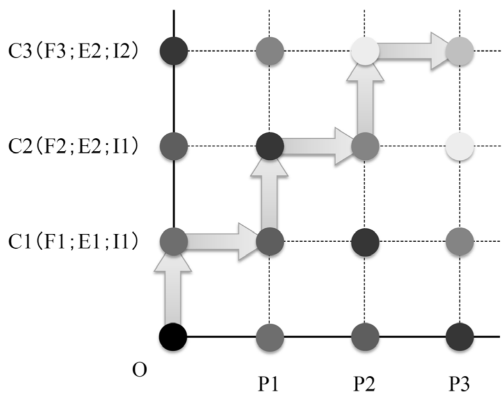

図 2．学習レベルの移行過程

このように考えると，学習レベル O から学習レベル（P3, C3）に至るまでの移行過程は，図 2 のように設定されうる．

## ５．移行過程と学年との対応付け

学習レベルの移行過程に基づいて，中学校数学科の領域「関数」のカリキュラムを構成するためには，移行過程と各学年とを対応付ける必要がある．また，現行の学習指導要領（平成 20 年告示）では，小学校第六学年において，比例の関係を用いて問題を解決することが位置付けられており（文部科学省, 2008a），本研究では，学習レベルの移行過程を中学校数学科のみならず，小学校算数科の学習も含めて考える．

まず，現行（平成 26 年検定）の算数科教科書（6 社 6 種類）を見てみると，紙の枚数やくぎの本数を重さから求める場面などで，比例の関係を用いて問題を解決することが意図されている．また，そのうち半数の教科書で解答例が示されており，それらは図 3 のような解答である．これらの記述では，F1 の要件に関する記述が明示的ではないものの，比例を用いることが問題解決の前提となっていることを勘案すれば, 小学校算数科の授業では, 総じて C1 レベルの記述が求められていると考えることができるであろう．それゆえ，現行の学習指導要領と教科書を前提とすれば，学習レベル C1 が，中学校数学科での「初期状態」となる．また，現行の学習指導要領と教科書を前提とせずに，前述した，証明を構想することと証明を構成することの相補的かつ互恵的な関係を考えれば，理想的には，学習レベル（P1，C1）までの移行過程を小学校算数科が担うことが考えられる．

その上で，中学校数学科においては，学習レベル C1（または，（P1，C1））から（P3，C3）までの移行過程について，第一学年で学習レベル（P2，C2）までの移行を意図し，第二学年で（P3，C3）までの移行を意図することが考えられる（図 4）．なお，この場合，第三学年は第二学年によって実現される学習レベル（P3，C3）において，証明を生成することについて評価・改善・発展することを一層充実することになる．

## ６．おわりに

本稿では，領域「関数」における課題探究として証明することのカリキュラム開発の枠組みの構築へ向けて，領域「関数」における証明の構想や構成の学習レベルを検討し，それらを組合せることで証明の学習レベルの移行過程を設定した．これらの移行過程に基づき意図される活動と，各学年の内容とを対応付けると表 1 のようになる．この「内容−活動対応表」を今後，授業としてどのように形づくるかが重要な検討課題となる．

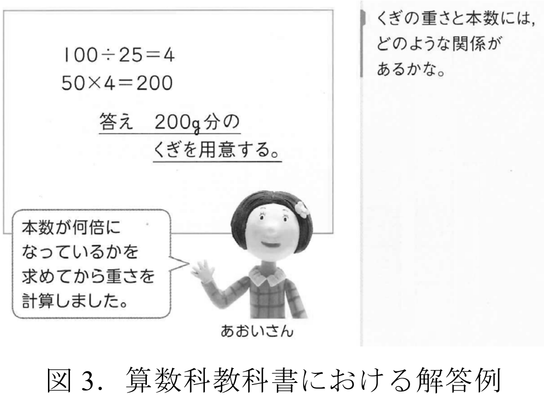


図 3．算数科教科書における解答例
（小山ほか，2015，p. 25）

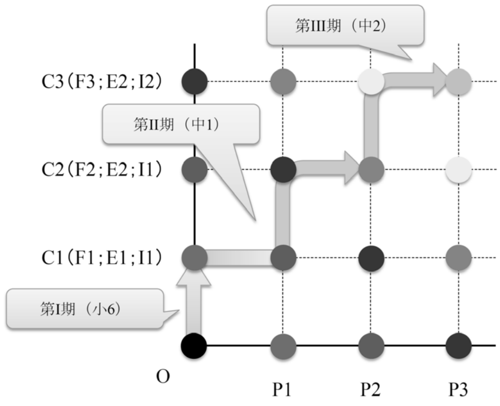


図 4．学習レベルの移行と学年との対応

表 1．領域「関数」の「内容－活動対応表」

| 学年 | 項目 | 学習レベル・移行 |
| --- | --- | --- |
| 小学校<br>第 6 学年 | 比例の関係を用いて問題を解決すること | O → C1 |
| 中学校<br>第 1 学年 | 比例，反比例を用いて具体的な事象をとらえ説明すること | C1 → (P1, C1)<br>(P1, C1) → (P1, C2)<br>(P1, C2) → (P2, C2) |
| 中学校<br>第 2 学年 | 一次関数を用いて具体的な事象をとらえ説明すること | (P2, C2) → (P2, C3)<br>(P2, C3) → (P3, C3) |
| 中学校<br>第 3 学年 | 関数 $y = ax^2$ を用いて具体的な事象をとらえ説明すること | (P3, C3) |

## 注

1）岩田ほか（2015）では，E1，E2 ともに，「所定のデータ」という表現を用いていたが，与えられたデータだけでなく，具体的な事象に関する観察や実験の結果を含める意図を明確にするために，単に「データ」という表現に変更した．

2）岩田ほか（2015）では，解釈の正当化に関する証明の要件を次のようにしていた．

I1．解釈した結果には，制約が伴うことに言及する．

I2．解釈した結果に伴う制約が生じた要因に言及する．

しかしながら，解釈の正当化には，解釈した結果の制約に言及する以前に，解釈した結果そのものを示すことが求められる．それゆえ本研究では，新たな I1 の学習レベルとして，解釈した結果そのものを示す段階を位置付ける．また，以前の I1，I2 のように，解釈した結果には制約が伴うことに言及する段階と，制約が生じた要因に言及する段階とを分けた場合，I1 の学習レベルにおける正当化の行為が，単に解釈した結果に「約」や「およそ」を付けることだけの儀式的な行為に留まってしまうことが予想される．それゆえ，それらの学習レベルを分けるのではなく，制約とその制約が生じた要因の両者に言及する段階を，新たな I2 のレベルとして位置付ける．

**謝辞**　本研究は JSPS 科研費（No. 23330255，24243077，26282039，26381219）の助成を受けています．謹んで感謝の意を表します．

## 引用・参考文献

藤井斉亮ほか．（2015）．『新編 新しい算数 6 数学へジャンプ！』，東京書籍．

橋本吉彦ほか．（2015）．『新版たのしい算数 6』，大日本図書．

一松信ほか．（2015）．『みんなと学ぶ 小学校算数 6 年 中学校へのかけ橋』，学校図書．

岩田耕司・宮崎樹夫・牧野智彦・藤田太郎．（2015）．課題探究として証明することのカリキュラム開発－領域「関数」における証明の構成の学習レベル－．日本数学教育学会『第 3 回春期研究大会論文集』, pp. 13-18.

小山正孝ほか．（2015）．『小学算数 6 年下』，日本文教出版．

宮崎樹夫・藤田太郎．（2013）．課題探究として証明することのカリキュラム開発－我が国の中学校数学科における必要性と，これまでの成果－．日本数学教育学会『第 1 回春期研究大会論文集』，pp. 1-8.

宮崎樹夫・岩永恭雄・松岡樂．（2015）．課題探究として証明することのカリキュラム開発－我が国の中学校数学科全領域における開発枠組みの構築－．日本数学教育学会『第 3 回春期研究大会論文集』，pp. 1-6.

文部科学省．（2008a）．『小学校学習指導要領解説算数編』，東洋館出版社．

文部科学省．（2008b）．『中学校学習指導要領解説数学編』，教育出版．

清水静海・船越俊介・根上生也・寺垣内政一ほか．（2015）．『わくわく 算数 6』, 啓林館．

坪田耕三・金本良通ほか．（2015）．『小学算数 6』，教育出版．

辻山洋介．（2011）．学校数学における証明の構想の意義に関する研究．日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, Vol. 95，pp. 29-44.