石川彝譯

代數學

三

石川彝譯

代數學　中帙

明治十年三月九日版權免許

代數學巻之三

東京　石川彝　譯

第五綱　乘方、方根

自乘

第二百○三章　凡ソ數ノ乘方トハ、同數相乘ノ積ナリ、乘方ヲ作ルノ術、之ヲ自乘ト謂フ、

第二百○四章　自乘トハ、幾次同數ヲ相乘シテ、幾乘方ヲ作ルノ術ナリ、

第二百○五章　自乘ノ幾次タルヲ顯スニ、自乘標ヲ以テス、自乘標ハ乘方ノ名ヲ示シ、以テ幾次

同數ヲ推シテ因子ト為ス[illegible]者ナリ、

比如ハ a ヲ以テ某ノ數量ト為シ、其乗方ヲ示スヿ左ノ如シ、

一乗方

$$a=a^1$$

二乗方

$$aa=a^2$$

三乗方

$$aaa=a^3$$

四乗方

$$aaaa=a^4$$

若干乗方

$$aaa\cdots\cdots=a^n$$

第二百○六章　凡ソ數ノ二乗方ハ之ヲ平方ト曰ヒ、三乗方ハ之ヲ立方ト曰フ、

第二百○七章　整乗方トハ、正ニ同數ヲ幾次自乗シテ、得ル所ノ數ヲ謂フナリ、

比如ハ、$x^2-2xy+b^2$ ハ正ニ $(x-y)(x-y)$ ノ同數自乗ナルカ故ニ整乗方ナリ、

單率乗方

第二百○八章　單一ノ因子ハ、直ニ之ニ自乗標ヲ附シテ、以テ需ムル所ノ乗方ト為ス可シ、若シ二三以上ノ因子アル數量ハ、之ヲ自乗スルニ、毎次各因子ヲ自乗スヘキハ[illegible]ノ俟タス、即チ左ノ如シ、

是故ニ $(ab)^2 = ab\times ab = aa\times bb$

$$= a^2b^2$$

又總テ $abc\cdots k$ ノ如ク若干ノ因子相乘ノ積アリ之ヲ若干(n)乘方ト為サント欲セハ則チ下ノ如ク自乘標ヲ附スヘシ

$$(abc\cdots k)^n = a^nb^nc^n\cdots k^n$$

是故ニ二三以上數因子相乘ノ積ノn乘方ハ即チ各因子ノn乘方相乘ノ積ナリ

第二百○九章 既ニ幾乘方ナル數ヲ復タ幾次自乘セント欲セハ後ノ自乘標目ニ從テ前ノ自乘標目ヲ倍スヘシ即チ左ノ如シ

$$(a^m)^2 = a^m\times a^m = a^{m+m} = a^{2m}$$

$$(a^m)^3 = a^m\times a^m\times a^m = a^{m+m+m} = a^{3m}$$

又總テ

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

ト知ルヘシ

是故ニ凡ソ數ハm乘方ヲ以テ復タn乘方ト為サント欲セハmn相乘ノ積ヲ以テ其自乘標ト為スヘシ

第二百十章 凡ツ正數ハ之ヲ幾乘方ト為スモ

皆正數ナルハ固ヨリナリ若シ負數ハ之ヲ乘方ト為セハ正負交代シテ出ツヘシ蓋シ其數ハ因子偶數ナレハ其積正數ナルヘク因子奇數ナレハ其積負數ナレハナリ（第六十七章）

正負ノ標記變更ヲ經驗センカ為ニ$-a$ノ各乘方ヲ求ムルニ乘法ニ由テ正負ノ變更左ノ如シ

$$(-a)^2=(-a)\times(-a)=+a^2$$

$$(-a)^3=(+a^2)\times(-a)=-a^3$$

$$(-a)^4=(-a^3)\times(-a)=+a^4$$

$$(-a)^5=(+a^4)\times(-a)=-a^5$$

又總テ

$$(-a)^n=\pm a^n$$

ト知ルヘシ

ル若シ偶數ナレハ正標ヲ附シ若シ奇數ナレハ負標ヲ附スヘシ

是ニ由テ左則ヲ得

第一則　正數ハ各乘方總テ正數ナリ

第二則　負數ハ奇數乘方ハ負數ニシテ偶數乘方ハ正數ナリ

第二百十一章　以上單率自乘ニ就テ説ク所ニ由テ左則ヲ得

第一則　數字ノ自乘標ハ求ムル所ノ乘方ニ從テ之ヲ附スヘシ

第二則　文字ノ自乘標ハ求ムル所ノ自乘標ノ以テ之ニ乘スヘシ

第三則　自乘スル所ハ數若シ負數ナル時ハ奇數乘方ニ負標ヲ附スヘシ

設問

第一　x^3 ノ四乘方ヲ求ム

第二　y^7 ノ三乘方ヲ求ム

第三　x^n ノ六乘方ヲ求ム

第四　x^m ノ n 乘方ヲ求ム

第五　ax^2 ノ二乘方ヲ求ム

第六　ab^2x^4 ノ二乘方ヲ求ム

第七　$5a^2x$ ノ三乘方ヲ求ム

第八　$8a^2b^3$ ノ二乘方ヲ求ム

第九　$-4a$ ノ四乘方ヲ求ム

第十　$-4a$ ノ三乘方ヲ求ハ

第十一　$-a^2x^3$ ノ七乘方ヲ求ム

第十二　$-3cd^2$ ノ四乘方ヲ求ム

左ノ諸乗方ノ數價ヲ問フ、

第十三	$(6ab^2)^3$
第十四	$(-5a^3b^4)^3$
第十五	$(a^mb^n)^4$
第十六	$(-a^m)^2$
第十七	$(-x^n)^5$
第十八	$(-3a^cb^4)^2$
第十九	$(-2a^mx^{2n})^7$
第二十	$(-abc)^m$

第二百十二章　若シ a^m ヲ m 乗方ト為サント欲セハ、則チ左ノ如ク m ヲ自乗スヘシ、

$$(a^m)^m=a^{m\times m}=a^{m^2}$$

此乗方ハ a ノ自乗標 m^2 トナル者ナリ、若シ m ヲ三トスル時ハ、a^{m^2} ハ即チ a^9 ナリ、

$$m=3\quad a^{m^2}=a^9$$

代數學ニ於テハ、此ノ如キ乗方ヲ得ルヿ尠カラストス

設問

左ノ諸數各自ノ價格ヲ求ム、

第一	$(x^my^n)^n$
第二	$(x^my^n)^m$
第三	$(x^{m^2})^m$
第四	$(x^{m^2})^{m^2}$
第五	$(x^{m-1}y)^{m+1}$
第六	$(ab^nc^{n^2}d^{n^3})^n$

分數乘方

第二百十三章　若シ分數ヲ乘方ト為ス時ハ分母子共ニ同乘方ト為スヘシ

比如ハ $\frac{a}{c}$ ノ三乘方ヲ求ム

術

$$\left(\frac{a}{c}\right)^3=\frac{a}{c}\times\frac{a}{c}\times\frac{a}{c}=\frac{a\times a\times a}{c\times c\times c}=\frac{a^3}{c^3}$$ 荅

是ニ由テ分數ヲ乘方ト為スノ規則ヲ得ルコ左ノ如シ

則分母子共ニ求ムル所ノ乘方ト為スヘシ

設問

第一　$\frac{3a}{bc^2}$ ノ二乘方ヲ求ム

第二　$\frac{a^2}{3x^4}$ ノ三乘方ヲ求ム

第三　$\frac{4a^2b}{7x}$ ノ五乘方ヲ求ム

第四　$\frac{ax^3}{xy}$ ノ四乘方ヲ求ム

第五　$\frac{5}{abc}$ ノ六乘方ヲ求ム

第六　$\frac{2x^{m}}{3a^{2}b^{n}}$ ノ五乘方ヲ求ム

第七 $\frac{abc}{xyz}$ ノ n 乗方ヲ求ム、

第八 $\left(\frac{a^n}{c^m}\right)^{mn}$

第九 $\left(\frac{x^z}{y^2}\right)^z$

第二百十四章　負乗方考

前章既ニ左ノ諸式ヲ示シタリ、

第一式 $a^m\times a^n=a^{m+n}$

第二式 $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

第三式 $(a^m)^n=a^{mn}$

右諸式ニ於テ m 及ヒ n ハ正數ナリ整數ナリ、然リト雖𪜈此一自乗標、或ハ兩自乗標ヲ以テ負數ト為スモ亦以テ上式ノ關渉ヲ離ルヽ可カラス、然レハ則チ、初巻ニ説ク所ヲ再考シテ、之ヲ決定ス可シ、曰ク、凡ソ自乗標負數ナル者ハ、其自乗標正數ナル者ノ一箇分子ニ同シト（第八十八章第二則、

第一式 $a^m\times a^n=a^{m+n}$ ノ m n 正數ナル時ハ、此式普ク通用ス

可キコ左ニ證明スルカ如シ、

第一 假リニ一自乗標ヲ以テ負數ト為セハ、即チ左ノ如シ、

$$n=-n'$$

$$a^m\times a^n=a^m\times a^{-n'}=\frac{a^m}{a^{n'}}=a^{m-n'}$$

$$=a^{m+n}$$

第二 假リニ兩自乗標ヲ以テ負數ト為セハ、即チ左ノ如シ、

$$m=-m'$$

$$n=-n'$$

$$a^m\times a^n=a^{-m'}\times a^{-n'}=\frac{1}{a^{m'}}\times\frac{1}{a^{n'}}$$

$$=a^{-m'-n'}=a^{m+n}$$

第二式 $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ ノ m n 整數ナル時ハ、此式普ク通用スル可キコ左ニ證明スル所ノ如シ、

第一 假リニ分子ノ自乗標ヲ以テ負數ト為セハ、即チ左ノ如シ、

$m=-m'$

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^{-m'}}{a^n}=\frac{1}{a^{m'+n}}$$

$$a^{-m'-n}=a^{m+n}$$

第二　假リニ分母ノ自乗標ヲ以テ負數ト為セハ、即チ左ノ如シ、

$n=-n'$

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^{-n'}}=a^m\times a^{n'}=$$

$$a^{m+n'}=a^{m-n}$$

第三　假ニ分母子ノ自乗標ヲ以テ共ニ負數ト為セハ、即チ左ノ如シ

$m=-m'$

$n=-n'$

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^{-m'}}{a^{-n'}}=\frac{a^{n'}}{a^{m'}}$$

$$a^{n'-m'}=a^{m-n}$$

第三式　$(a^m)^n=a^{mn}$ ノ m n 整數ナル時ハ、此式普ク通用スㇾキコト、左ニ證明スル所ノ如シ、

第一　假ニ n ヲ以テ負數ト為セハ、即チ左ノ如シ、

$$n=-n'$$

$$(a^{m})^{n}=(a^{m})^{-n'}=\frac{1}{(a^{m})^{n'}}$$

$$\frac{1}{a^{mn'}}=a^{-mn'}=a^{mn}$$

第二　假ニ m ヲ以テ負數ト為セハ、即チ左ノ如シ、

$$m=-m'$$

$$(a^{m})^{n}=(a^{-m'})^{n}=\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{n}$$

$$=\frac{1}{a^{m'n}}=a^{-m'n}=a^{mn}$$

第三　假ニ m n ヲ以テ兩ナカラ、負數ト為セハ、即チ左ノ如シ、

$$m=-m'$$

$$n=-n'$$

$$(a^{m})^{n}=(a^{-m'})^{-n'}=\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{-n'}$$

$$=\left(\frac{a^{m'}}{1}\right)^{n'}=a^{m'n'}=a^{mn}$$

是故ニ代數ノ諸術ニ於テハ、正數自乘標ノ規則ヲ以テ、直ニ負數自乘標ニ適用ス可シ、比如ハ兩自乘標ノ同數アリ、其積ノ自乘標ハ、元ノ自乘標ノ代數和（代數學ニ於テ和ハ和差相通ス）ニ同シク、其商ノ自乘標

ハ元ノ自乗標ノ代數差ニ同シキナリ、

設問

第二百十五章　左ノ諸數各自ノ價格ヲ求ム、

第一 $(a^{-2}b)^3$	第六 $(3a^{-2}xy^{-1})^{-4}$
第二 $(b^{-3}c^2)^{-2}$	第七 $(-a^my^{-n})^m$
第三 $(2x^3y^{-m})^{-3}$	第八 $(x^{-m^2})^{m^{-3}}$
第四 $(4a^mb^{-n})^2$	第九 $(4a^3x^{-2})^2\times(a^{-5}x^4)$
第五 $(-c^2d^{-x}m^4)^5$	第十 $(a^{2m}b^{-3m})^2\times(a^{-2m}b^{-m})^{-2}$

複率乗方

第二百十六章　複率ノ乗方ハ、現ニ乗術ヲ用ヒテ之ヲ得ヘシ、故ニ同數ヲ相乗スル者ハ、之ヲ二乗方ト曰ヒ、又同數ヲ其二乗方ニ相乗スル者ハ、之ヲ三乗方ト曰フ、其他皆之ニ傚フ、是ニ由テ左ノ則ヲ得、

則　同數ヲ數自乗シテ之ヲ因子ト為スヿヲ求ムル所ハ、自乗標數ノ如クナルニ至ルヘシ、

原註ニ曰ク、乗方ハ術ヲ異ニシテ、屢同數ヲ得ルヿアリ、故ニa^6ヲ得ルノ術左ノ如シ、

$$a^6=a^5\times a=a^4\times a^2=(a^3)^2=(a^2)^3$$

設問

左ノ諸數ヲ開散ス可シ、

第一	$(2x^2+3y)^2$
第二	$(5x-y^2)^3$
第三	$(1+2x-3x^2)^2$
第四	$(3a+2b+c)^3$
第五	$(a+b)^7$
第六	$(x-y)^8$
第七	$(a^2c^{-2}+a^{-2}c^2)^2$
第八	$(a^2+1+a^{-2})^3$
第九	$(a^m+x^n)^3$

複率平方

第二百十七章　雙率ノ平方ハ現ニ手術ヲ用ヒサルモ直ニ之ヲ書記スルヿヲ得ヘシ、(第七十章、)比如ハ$x$$y$ヲ雙率トスレハ其平方左ノ如シ、

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

是ヲ雙率平方ノ法式ト為シ、以テ複率平方ノ書式ヲ得テ、亦雙率ノ如ク直ニ之ヲ書記スルヿヲ得ヘシ、

複率平方ノ書式ヲ得ル所以ヲ講究センカ為ニ左ニ複率ヲ設ク、

$$a+b+c+d+e+\cdots\cdots$$

此ニ於テ

$$x=a$$

$$y=b+c+d+e+\cdots\cdots$$

トスル時ハ

$$x+y=a+b+c+d+e\cdots\cdots$$

$$x^2+2xy+y^2=(a+b+c+d+e\cdots)^2$$

故ニ求ムル所ノ複率平方ノ三率左ノ如シ、

$$x^2=a^2\cdots\cdots\cdots\quad(壹)$$

$$2xy=2ab+2ac+2ad+2ae+\cdots\quad(貳)$$

$$y^2=(b+c+d+e+\cdots\cdots)^2$$

今yハ複率ニ代ル者ナリ、又其平方ヲ得ント欲セハ、初ノ如ク術ヲ反復セサル可カラス比如ハ

$$x'=b$$

$$y'=c+d+e+\cdots\cdots$$

トスル時ハ

$$x'+y'=b+c+d+e+\cdots\cdots$$

仍テ下式ヲ得、

$$x'^2=b^2\cdots\cdots\cdots(参)$$

$$2x'y'=2bc+2bd+2be+\cdots\cdots(肆)$$

$$y'^2=(c+d+e+\cdots)^2$$

是ニ於テy'^2ノ數價ヲ以テ、前ノyノ如ク術ヲ反復セハ、終ニ複率平方ノ各率ヲ得ヘシ、

右壹貳參肆式ヲ以テ、之ヲ觀レハ、求ムル所ノ複率平方ハ總テ左式ノ如クナルヘシ、

$$(a+b+c+d+e\cdots)^2=a^2+2a(b+c+d+e\cdots\cdots)$$
$$+b^2+2b(c+d+e+\cdots)$$
$$+c^2+2c(d+e+\cdots)$$

是ニ由テ複率平方ノ總則ヲ得ルコト、左ノ如シ、

則各率ノ平方ヲ書シ各其以下ノ諸率ノ和ト相乘ノ積ニ倍ヲ附スヘシ若シ約スヘキ者ヲ得ハ之ヲ約スヘシ

設問

左ノ複率ノ平方ヲ求ム

第一	$a+b+c$
第二	$a+b+c+d$
第三	$a+b+c+d+e$
第四	$x-y+z$
第五	$a-2b+3ab-c$
第六	$1-a+a^2-a^3$
第七	$3ax+2a^2-4x^2-5$
第八	$1-2x-y^2+xy-x^2$

第二百十八章　雙率法式ト名ツクル所ノ式アリ乘術ノ勞ヲ費ヤスシテ以テ雙率ノ各乘方ヲ求メ得ヘシト雖モ之ヲ後章ニ讓ル

開方

第二百十九章　凡ソ數ノ方。根トハ自乘スル所ノ同因子ノ一ニシテ復タ之ヲ自乘スレハ則チ舊ノ數トナル可キ者ナリ

第二百二十章　方根ノ名目ハ自乘スル所ノ同因子ノ數ニ從フ即チ左ノ如シ

aノ平方根トハ、二同因子ノ一ニシテ其積ハ即チaト為ル者ナリ、
aノ立方根トハ、三同因子ノ一ニシテ其積ハ即チaト為ル者ナリ、
aノ四乗方根トハ四同因子ノ一ニシテ、其積ハ即チaト為ル者ナリ、以下皆斯ノ如シ、
第二百二十一章　開。方。トハ、某數ノ方根ヲ求ムルノ術ニシテ、即チ乗方ノ反ナリ、
第二百二十二章　開方ヲ記スルノ法二アリ、
第一　開方標($\sqrt{}$)ヲ以テス、

開方ヲ記スルニ、此法ヲ以テスル時ハ、方根ノ名目ハ開方標上ニ、數字ヲ書シテ以テ之ヲ表ス、是ヲ開方標目ト云フ、故ニ$\sqrt[3]{a}$ハaノ立方根ナリ、$\sqrt[4]{a}$ハ四乗方根ナリ、若シ標目ナキ者ハ、則チ2字ヲ記スル者ニ同シト知ル可シ、故ニ$\sqrt{x}$ハ$\sqrt[2]{x}$ト同シク共ニ平方根ナリ、
第二　分數自乗標ヲ以テス、
此法モ亦開方根ヲ表ス、其原由ヲ知ラント欲セハ、先ツ乗方ニ注意スヘシ、某數ノ自乗標ニ、求ムル所ノ自乗標ヲ乗スレハ、則チ新乗方ヲ得ヘシ、

之ニ反シテ求ムル所ノ開方目ヲ以テ某數ノ自乘標ヲ除スレハ、則チ方根ヲ開キ得ヘシ、故ニa即チa^1ノ立方根ハ$a^{\frac{1}{3}}$ト書スヘク、a^2ノ立方根ハ$a^{\frac{2}{3}}$ト記スヘシ、

是ニ由テ、分數自乘標ヲ説明スルヿ左ノ如シ、

第一　分子ハ方根ヲ開クヘキ數ノ自乘標ナリ、

第二　分母ハ方根ヲ開クヘキ數ハ開方目ナリ、

第二百二十三章　開方ヲ記スル二法ヲ相對シテ、左ニ之ヲ説明スヘシ、

$\sqrt{a}$ 又 $a^{\frac{1}{2}}$ 共ニaノ平方根ナリ、

$\sqrt[3]{a}$ 又 $a^{\frac{1}{3}}$ 共ニaノ立方根ナリ、

$\sqrt[n]{a}$ 又 $a^{\frac{1}{n}}$ 共ニaノn乘方根ナリ、

若シa^mヲ以テ、aノ若干乘方根トスレハ、則チ左ノ如シ、

$\sqrt{a^m}$ 又 $a^{\frac{m}{2}}$ 共ニa^mノ平方根ナリ、

$\sqrt[3]{a^m}$ 又 $a^{\frac{m}{3}}$ 共ニa^mノ立方根ナリ、

$\sqrt[n]{a^m}$ 又 $a^{\frac{m}{n}}$ 共ニa^mノn乘方根ナリ、

第二百二十四章　不開方根トハ、之ヲ開テ奇零ナキヿ能ハサル者ナリ、左ノ如キハ、即チ不開方根ト為ス者ナリ、

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{a^2}$$

$$\sqrt{a^2-2ab}$$

不開方根ハ、之ヲ不開數ト名ツケ、若シ之ヲ開テ奇零ナキ者ハ、之ヲ整開數ト名ツク、開方標目ト正ニ相適スル所ノ乗方ナル數量ノ方根ハ、即チ整開數ナリ、若シ之ニ反スル者ハ、即チ不開數ナリ、

眞ノ乗方ナラサル數ノ方根ハ常ニ小差違アル者ヲ得ヘシ、比如ハ$\sqrt{6}$ハ不開數ナリ、其方根ヲ得ルヿ左ノ如シ、

$$\sqrt{6}=2.44$$

此ニ小差違アルハ、下式ヲ以テ之ヲ知ル可シ、

$$(2.44)^2=5.9536$$

第二百二十五章　視方根トハ、之ヲ視ル恰モ方根ノ如シト雖モ、標記ニ於テ成立ツ可カラサルヲ知ル所ノ方根ナリ、比如ハ$-a^2$ノ平方根即チ$\sqrt{-a^2}$ハ之ヲ一目シテ其成立ツ可カラサルヲ知ル可

シ、何トナレハ何ノ數ヲ自乘スルモ負數ハ二乘方a^2ヲ得ルコトナキヲ以テナリ、若シ視方根ニ非サル者ハ、之ヲ眞方根ト云フ、

單率方根

第二百二十六章　單率代數ノ方根ハ、求ムル所、ノ開方目ヲ以テ、其數ノ自乘標數ヲ除スルコハ、既ニ之ヲ說ケリ（第二百二十二章）然リ而シテ其自乘標中、正ニ開方目數ヲ含有セサル者ハ、則チ不開方根ナラサルヲ得ス、

第二百二十七章　數種ノ因子ヲ相乘シテ成ル所ノ單率ハ、之ヲ乘方ト為スニ、各因子皆各自ニ、求ムル所ノ乘方ト為スハ、既ニ之ヲ說ケリ、（第二百〇八章）之ニ反シテ其方根ヲ開カント欲セハ、各因子皆各自ニ之ヲ開ク可シ、

比如ハ　$abc\cdots\cdots k$　ヲ數因子ノ積ト為セハ、其開方根ハ則チ左ノ如シ

$$\sqrt[n]{abc\cdots k}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\cdots\sqrt[n]{k}$$

或ハ分數自乘標ヲ用フレハ、下式ノ如シ、

$$(abc\cdots k)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}c^{\frac{1}{n}}\cdots k^{\frac{1}{n}}$$

是故ニ、二、三、以上數因子相乘ノ積ノn乘方根ハ、各因子n乘方根ノ積ニ同シ、

第二百二十八章　方根ノ性質ハ、乘方ノ標記ノ法則ニ關スル者アリ、即チ左ノ如シ、

第一　奇數乘方根ハ、皆眞ノ方根ニシテ、本數ト、同標ナリ、

蓋シ正數ヲ以テ奇數乘方ト為セハ、則チ正標ヲ得、負數ヲ以テ奇數乘方ト為セハ、則チ負標ヲ得ルカ故ナリ、

第二　正數ノ偶數乘方根ハ、皆眞ニシテ、或ハ正數トナリ、或ハ負數ト為ル、(第二百十章)、

蓋シ數ノ正負ニ拘ラス、偶數乘方ト為セハ、皆正數トナルカ故ナリ、(第二百十章)、

第三　負數ノ偶數乘方根ハ、皆視方根ナリ、

凡ソ數ノ正負ニ拘ラス、偶數乘方ト為ス者ハ未タ嘗テ負數ヲ得ス、

第二百二十九章　上章ニ論定スル所ノ性質ニ由リ、單率開方ノ規則ヲ得ルコ左ノ如シ、

第一則　倍數ハ求ムル所ノ方根ヲ開キ以テ新倍數ト為スヘシ、

第二則　各字因ノ自乘標ハ求ムル所ノ開方目ヲ以テ之ヲ除ス可シ、

第三則　負數ノ偶數乘方根ニハ複標(±)ヲ附シ、奇數乘方根ニハ負標ヲ附ス可シ、

原註ニ曰ク、因子ノ不開方根ナル者ハ、分數自乘標、若クハ開方標ヲ附シテ之ヲ表ス可シ、○分數ノ方根ハ分母子各自ノ方根ヲ開テ之ヲ得ヘシ、

設問

左ノ三數ノ平方根ヲ問フ、

第一	$49a^2x^4$
第二	$25c^{10}b^2$
第三	$144a^2c^4x^2y^2$

左ノ四數ノ立方根ヲ問フ、

第四	$125a^3$
第五	$-64x^6$
第六	$216a^3y^9$
第七	$729a^6x^{12}$

第八　$256a^4x^8$ノ四乗方根ヲ問フ、

第九　$16a$ノ四乗方根ヲ問フ、

第十　$27a^2x$ノ立方根ヲ問フ、

第十一　$-32x^{10}y^4$ノ立方根ヲ問フ、

第十二　$a^{3n}b^{6m}$ノn乗方根ヲ問フ、

第十三　$81a^{-4}b^6$ノ平方根ヲ問フ、

第十四　$-216a^{-3n}c^{-9}$ノ立方根ヲ問フ、

第十五　$243a^{-5}b^{-10}$ノ五乗方根ヲ問フ、

第十六　$a^{mn}y^{m^2}$ノm乗方根ヲ問フ、

第十七　$x^{n^2}y^{n^3}z^{n^4}$ノn乗方根ヲ問フ、

第十八 $\frac{4a^2x^4}{9a^2}$ ノ平方根ヲ問フ、

第十九 $\frac{125a^3b^6}{8x^3y^{12}}$ ノ立方根ヲ問フ、

第二十 $\frac{25a^6}{16}$ ノ平方根ヲ問フ、

第二十一 $\frac{a^{m}x^{3m}}{c^{2n}y^{n}}$ ノ n 乗方根ヲ問フ、

第二十二 $\frac{a^3}{bc}$ ノ n 乗方根ヲ問フ、

第二十三 $(a-x)^2y^4$ ノ平方根ヲ問フ、

第二十四 $(x-1)^3(x+1)^6$ ノ立方根ヲ問フ、

第二十五 $x^2y^4(x-y)^2$ ノ平方根ヲ問フ、

複率平方根

第二百三十章　複率ノ平方根ヲ開クノ規則ヲ求メンカ為ニ、先ツ $a+b$ ノ如キ、雙率ノ平方ニ注目スヘシ、其式左ノ如シ、

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

後ノ二率 $2ab+b^2$ ヲ約スレハ $(2a+b)b$ ト為ル、

夫レ開方ノ術ハ乗方ニ反ス、今此乗方ヲ反シテ、之ヨリ方根 $a+b$ ヲ求ムルノ術ヲ考フレハ、則チ左ノ如シ、

術

$$\begin{array}{r|l} & \text{根} \\ \text{實}\quad a^2+2ab+b^2 & \underline{a+b} \\ \underline{a^2\qquad\qquad} & \\ \text{法}\ 2a+b\quad 2ab+b^2 & \\ \underline{2ab+b^2} & \end{array}$$

解ニ曰ク、a^2 ノ平方根ヲ開クハ、則チ根ノ第一率 a ヲ得、仍テ總數ヨリ a^2 ヲ減却シテ $2ab+b^2$ 即チ $(2a+b)b$ ヲ餘ス、爰ニ於テ $2a$ ヲ以テ此第一率 $2ab$ ヲ除クハ、則チ b ヲ得、仍テ之ヲ方根ノ第二率ト為シ、又之ヲ $2a$ ノ右ニ置テ $2a+b$ トナルヲ法ト為シ、b ヲ以テ之ニ乗シ、其

積ヲ殘數ヨリ減却スレハ、已ニ殘餘ナシ、是ヲ方根ヲ開キ了ルト為ス、

凡ソ二乘方ノ方根ハ、皆上ノ術ヲ反復シテ之ヲ開クヿヲ得ヘシ、其總則ヲ定メンカ為ニ左ニ一例ヲ設ク、

$$a+b+c+d\cdots\cdots$$

是ヲ複率ト為シ、前章ニ説ク所ニ由レハ、複率ノ平方ハ、各率ノ平方ニ、各其以下ノ諸率ノ和ト相乘ノ積二倍ヲ附シ以テ成ル者ナリ、(第二百十七章)而シテ其平方ハ即チ左ノ如シ、

$$a^2+2ab+2ac+2ad\cdots\cdots+b^2+2bc+2bd\cdots\cdots+c^2+2cd\cdots\cdots+d^2\cdots$$

若シ方根 $a+b+c+d\cdots\cdots$ ノ位次、其字ノ自乘標ニ從フ時ハ平方ノ位次モ、亦同字ノ自乘標ニ從フハ、論ヲ俟タスシテ明カナリ、

平方ヨリ其根ヲ開クノ術左ノ如シ、

術

$$
\begin{array}{l|l|l}
\text{法} & \text{實} & \text{根} \\
 & a^2+2ab+2ac+2ad\cdots\cdots+b^2+2bc+2bd\cdots\cdots+c^2+2cd\cdots\cdots+d^2\cdots & a+b+c+d\cdots\cdots \\
 & a^2 & \\
\hline
 & 2ab+2ac+2ad\cdots\cdots+b^2+2bc+2bd\cdots+c^2+2cd\cdots\cdots+d^2\cdots & \\
2a+b & 2ab+b^2 & \\
\hline
 & 2ac+2ad\cdots\cdots+2bc+2bd\cdots\cdots+c^2+2cd\cdots\cdots+d^2\cdots & \\
2a+2b+c & 2ac+2bc+c^2 & \\
\hline
 & 2ad\cdots\cdots+2bd\cdots\cdots+2cd\cdots\cdots+d^2\cdots & \\
2a+2b+2c+d & 2ad+2bd+2cd+d^2 & \\
\hline
 & \cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots & \\
\end{array}
$$

解ニ曰ク、前例ノ如ク、先ツaヲ見テ其平方ヲ取リ、$2a$ヲ以テ殘ノ第一率ヲ除シ、其商bヲ根及ヒ法ニ書シ、法ニbヲ乘シテ其積ヲ第二殘ヨリ減シテ殘ヲ新實ト為スヘシ、次ニ$2b+2c$ヲ法ニ書シ、又前ノbノ如ク、cヲ兩傍ニ書シ術ヲ施スコト前ノ如シ、斯ノ如クシテ全數ヲ開キ了ルニ至ルマテ、術ヲ反復スヘシ、

右術中ニ於テ、漸次各率ヲ減却スル所ヲ視レハ、其對角線道ニ在ル者ハa^2、$2ab$、$2ac$、$2ad$等、b^2、$2bc$、$2bd$等、c^2、$2cd$等、d^2等ナリ、即チ所謂ル各率ノ平方ニ各其以下諸率トノ積二倍ヲ附シタル者ニシテ、正ニ是レ複率平方ヲ作ルノ術ヲ反スル者ナリ、是ニ由テ左ノ總則ヲ得、

第一則　其字ノ自乘標ニ從テ各率ノ位次ヲ立テ、其第一率ノ平方根ヲ取テ以テ根ノ第一率ト為ス可シ、

第二則　上則ニ由テ得ル所ノ根ノ平方ヲ本數ヨリ減シ、其次ノ二三率ヲ次列ニ下シテ以テ新實ト為ス可シ、

第三則　既ニ得ル所ノ根ノ二倍ヲ以テ新實ノ

第一率ヲ除シ其商ヲ取テ以テ根ト法トニ附ス可シ、

第四則　上則ニ由テ得ル所ノ法ニ今得ル所ノ根ヲ乗シテ之ヲ實ヨリ減ス可シ其他尚ホ餘殘アル者ハ皆斯ノ如ク術ヲ反復ス可シ、

原註ニ曰ク乗方標記ノ規則ニ從ヒ平方根モ亦悉ク各率ノ標記ヲ變更スレハ猶ホ其平方根タルヲ改メス、

設問

左ノ諸數ノ平方根ヲ求ム、

第一

$$a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$$

第二

$$a^4-6a^2b+4a^2+9b^2-12b+4$$

第三

$$x^6+4x^5+2x^4-2x^3+5x^2-2x+1$$

第四

$$1+2a+3a^2-4a^3+3a^4-2a^5+a^6$$

第五

$$4a^4b^2-12a^3b^2+8a^3b^3+9a^2b^2-12a^2b^3+4a^2b^4$$

第六

$$9x^{6}-30x^{5}y+x^{4}y^{2}+76x^{3}y^{3}-44x^{2}y^{4}-48xy^{5}+36y^{6}$$

第七

$$a^{4}-6a^{2}bc+4a^{2}cd-2a^{2}d^{2}+9b^{2}c^{2}-12bc^{2}d+$$

$$6bcd^{2}+4c^{2}d^{2}-4cd^{3}+d^{4}$$

第八

$$a^{4}-a^{3}b+\frac{3a^{2}b^{2}}{4}-\frac{ab^{3}}{4}+\frac{b^{4}}{16}$$

第九

$$x^{8}-6x^{5}+11x^{2}-6x^{-1}+x^{-4}$$

第十

$$a^{2}b^{-2}-10ab^{-1}+27-10a^{-1}b+a^{-2}b^{2}$$

第十一

$$a^{4m}+6a^{3m}c^{n}+11a^{2m}c^{2n}+6a^{n}c^{3n}+c^{4n}$$

眞數平方根

第二百三十一章　眞數ノ平方根ヲ開クノ術ヲ發明セントセハ、則チ左ノ三件ニ注目スヘシ、

第一　眞數ノ各位、及ヒ其平方根トノ數ノ關係、

第二　眞數ノ諸段、及ヒ其方根各位トノ位置ノ關係、

第三　平方ヲ作ルニ方テ、眞數ノ各部連合ノ法則、

第二百三十二章　眞數ノ各位、及ヒ其平方根トノ數ノ關係ヲ説明スルコ、左ノ如シ、

$1^2=1$	$1^2=1$
$9^2=81$	$10^2=1,00$
$99^2=98,01$	$100^2=1,00,00$
$999^2=99,80,01$	$1000^2=1,00,00,00$

右ノ例ニ由テ之ヲ觀レハ、一位ノ方根ハ其平方一位或ハ二位ト爲リ、而シテ方根ニ於テ一位ヲ增ス時ハ、平方ニ於テハ總テ二位ヲ增スカ故ニ、其則左ノ如シ、

平方根ヲ開クヘキ數ハ其右端ヨリ各二位ノ段落ヲ分チ此段數ヲ以テ方根ノ幾位ナルヲ知ル

可シ、

第二百三十三章　何ノ數ニ拘ラス、(左ニ2345ヲ用ユ)、随意ニ各位ヲ分チ、其上位ヨリ初メテ、各位ノ平方ヲ求ムレハ、各位ノ數、其位置ニ關係スルヿ、左ノ如シ、

$$2000^2=4\ 00\ 00\ 00$$
$$2300^2=5\ 29\ 00\ 00$$
$$2340^2=5\ 47\ 56\ 00$$
$$2345^2=5\ 49\ 90\ 25$$

是ニ由テ左則ヲ得、

方根第一位ノ平方ハ全ク平方ノ第一段ニ止マリ、方根ノ初二位ノ平方ハ全ク平方ノ初二段ニ止ル、其他皆之ニ準ス、

第二百三十四章　諸位ノ眞數ヲ分テ二ト為シ、各其位置ノ價格ヲ存スレハ、則チ雙率平方ノ法式ヲ適用シテ、眞數ノ平方ヲ作ルヿヲ得ヘシ、即チ左ノ如シ、

$$76=70+6$$
$$a=70$$
$$b=6$$
$$a+b=76$$
$$a^2=4900$$
$$2ab=840$$
$$b^2=36$$
$$a^2+2ab+b^2=5776=76^2$$

是故ニ雙率ノ平方ハ、以テ真數ノ平方根ヲ開クノ法式ト為ス可シ、

第一　比如ハ5776ノ平方根ヲ問フ、

術

	$5\dot{7}\ 7\dot{6}$	76
a^2	49	
$2a,\ 140$	8 76	
$2a+b,\ 146$	8 76	

此例ニ於テハ、本數二段ナルヲ以テ、方根ニ位ナルヲ知ル可シ而シテ十位ノ平方ハ全ク第一段ノ内ニ在ルヲ以テ(上章)、先ツ57中ニ於テ、最大ナル平方數ヲ求メテ、49ヲ得タリ、其根ハ即チ七ナルヲ以テ之ヲ根ノ第一位ト為ス、然レハ則チ $a=70$ ナルカ故ニ a^2 即チ 4900 ヲ以テ、全數ヨリ減シテ殘876ヲ得タリ、是レ即チ $(a+b)b$ ナラサル可カラス(第二百三十章)、今 $2a$ 即チ 140 ヲ以テ殘數ヲ除テ、$b=6$ ヲ得テ根ノ第二位ト為ス、仍テ $2a+b=146$ ヲ法ト為シ、$(2a+b)b=876$ ヲ得

テ之ヲ實ヨリ減シテ、全ク方根ヲ開キ了ルヲ得タリ、

右術中ニ於テ零位ヲ發スルモ、亦猶ホ本位ノ數價ヲ用フルヿヲ得ヘシ、然レハ則チ法ヲ分テ更ニ$2a$ヲ作ルヿヲ須ヒス

若シ平方根ヲ開ク可キノ數、二段ヨリ多キ時ハ既ニ得ル所ノ方根ノ上部ヲ合セテ、雙率法式中ノaト為シ、次ノ位ニ對シテハ、之ヲ十位ト見做ス可シ、以下ノ諸段皆之ニ傚ヘ、

第二　比如ハ226576ノ平方根ヲ求ム、

術

	22 65 76	476
	16	
87	6 65	
	6 09	
946	56 76	
	56 76	

初ニ段ノ平方根47ヲ得テ、後段ヲ次列ニ下ス時ハ、新實5676ヲ得、而シテ$2a$ハ47×2即チ94ナルヲ以テ目的ト為シ、新實ヲ除シテ、方根ノ後位$b=6$ヲ得、然リ而シテ法ノ目的タル94ノ數ハ、只前ノ87ノ7ヲ倍スレハ、便チ得ヘキ者ナルヲ注目ス可シ、

以上說ク所ノ理解ニ由テ左則ヲ得

第一則　平方根ヲ開クヘキ數ハ單位ヨリ左右各二字ヲ數ヘテ數字ノ上ニ點ヲ附シ以テ段ヲ分ツ可シ

第二則　左端ノ一段ニ於テ最大ナル平方數ヲ求メ其根ヲ書シテ以テ求ムル所ノ平方根ノ第一位ト為シ其平方ヲ左端ノ一段ヨリ減シ其差ニ次ノ一段ヲ下シ添テ以テ次ノ實ト為ス可シ

第三則　平方根ノ第一位ノ二倍ヲ實ノ左ニ書シテ以テ法ノ目的ト為シ以テ實ヲ除シテ未タ右端ノ一字ニ及ハスシテ止ミ所ニシテ得ル所ノ商ヲ以テ方根ノ目的ト為ス可シ

第四則　方根ノ目的ヲ法ノ目的ニ附シテ以テ法ト為シ方根ノ目的ヲ以テ之ニ乘シテ其積ヲ實ヨリ減シ殘數ニ次段ノ數ヲ附シテ以テ新實ト為ス可シ

第五則　前ノ法ノ右端ニ在ル一字ヲ二倍シテ以テ新法ノ目的ト為シ以テ術ヲ施スニ前ノ如クニシテ全數ヲ開キ了ルニ至ル可シ

原註ニ曰ク悉ク術ノ諸段ヲ下シテ之ヲ開キ、

尚ホ殘數アル時ハ、零字ノ段ヲ作リテ之ヲ附シ、續テ術ヲ施シ有用トスル所ノ小數ヲ求ム可シ、○若シ分數ニシテ分母、平方數ナラサル時ハ、分數ヲ變シテ小數ト爲シ而シテ後ニ、其根ヲ求ム可シ、

設問

第一	7225
第二	108241
第三	651249
第四	974169
第五	5098564
第六	6634.1025
第七	1812886084
第八	.339889
第九	.00524176
第十	477.
第十一	11.09
第十二	$\frac{1369}{11881}$
第十三	$\frac{1}{102030201}$
第十四	$\frac{245}{720}$
第十五	$5\frac{4}{7}$

開平方約法

第二百二十五章　求ムル所ノ方根、若シ不開數ナル時ハ、小數乘術ノ約法ヲ以テ之ヲ省約スヘシ、之ヲ約シテ其所得幾位ヲ正實ナラシメント

欲セハ、法ノ小數ニ少クトモ一位ノ餘分ヲ備フ可シ、詳ニ之ヲ解スレハ、商ニ於テ必用トスル所ヨリ餘計ノ小數一位ヲ增スナリ、此餘計ノ小數ハ、意中ニ之ヲ乘シテ、積ノ十位ニ上ル者ヲ其上ニ加フ可シ、若シ其單位モ五ヨリ大ナル時ハ十位ニ又一ヲ加フ可シ、（所謂四捨五入）

此理ヲ辨明センカ為ノニ、53194ヲ以テ28337ヲ除シテ、小數三位ニ至ルマテ、正實ナラシムル例ヲ設ク、其術左ノ如シ、

術

53194)	28337(.5327
	26597
5319	1740
	1595
532	145
	106
53	39
	37

右除術ニ於テ、第一ノ法ニ在ル4ヲ以テ餘位ト為シ、之ニ商五ヲ乘シテ、四五二十トナルヲ以テ、其十位ノ二ヲ上位ノ積ニ加ハ、上位ノ積ハ五九四十五ナルニ、前ノ二ヲ加ヘテ四十七トナル、又第二ノ法5319ニ商三ヲ乘シテ三九二十七トナル、此ニ於テ二十七ハ二十ヨリモ、三十ニ近キヲ以

テ十位ノ三ヲ上位ノ積ニ加フ、第三ノ法532ハ531ニ一ヲ加ヘタルナリ、是レ前ノ法ノ末位ハ九ニシテ五ヨリモ大ナルカ故ニ之ヲ入ルヽナリ、

比如ハ7.12ノ平方ヲ問ヒ、其小數六位ニ至ルマテ、正實ナランヿヲ求ム、

術

		答
		2.668333±
	7.120000	
	4	
46	312	
	276	
526	3600	
	3156	
5328	44400	
	42624	
5336	1776*	
	1601	
534	175	
	160	
53	15	
	16	

右ノ術ハ1770ヲ得ルニ至ルマテ、常ノ如ク術ヲ施シ、此ニ至テ零字ノ段ヲ設ケス、533ヲ以テ法ト為シ、根ノ新位三ヲ乘スルニ方テ、餘分位六トノ積十八ヨリ、十位ノ一ヲ加ヘ、單位ノ八ヨリ又一ヲ加ヘテ、共ニ1601ト為ル、是ヲ約法ヲ用テ畧積ヲ得ルノ初ト為ス、是ヨリ以下毎次法ノ右端ヨリ一位ヲ脱シテ、以下各位ノ法ト為シ、以テ術ヲ施シテ結局ニ至ル可シ、

凡ソ方根ノ位數ハ豫メ乘方ノ位數ト同フスヘキ者ト知ル可シ、

以上說ク所ノ理由ニ從テ左則ヲ得、

第一則　若シ零字ノ段ヲ要用トスル時ハ根ニ於テ求ムル所ノ位數ト同數ニ至ルマテ零字ヲ附ス可シ而シテ悉ク此位數ヲ下シ了ルニ至ルマテ常ノ如ク術ヲ用フ可シ、

第二則　是ヨリ以下常ノ如ク法ノ目的ヲ取テ根ノ目的ヲ附セス以下每次右端ノ一位ヲ脫シ各次ノ乘術ニ於テ脫約スル所ノ數ヲ以テ餘位ト為ス可シ、

原註ニ曰ク脫却スル所ノ數若シ五以上ナル時ハ其左位ニ一ヲ加フ可シ、

設問

第一　五十六ノ平方根ヲ開テ小數七位ニ至ルマテ正實ノ數價ヲ求ム、

第二　十四ノ平方根ヲ開テ小數七位ニ至ルマテ正實ノ數價ヲ求ム、

第三　十八ノ平方根ヲ開テ小數四位ニ至ルマテ正實ノ數價ヲ求ム、

第五　五十二箇四六三ノ平方根ヲ開テ小數七位ニ至ルマテ正實ノ數價ヲ求ム、

第六　七ノ平方根ヲ開テ、小數八位ニ至ルマテ、正實ノ數價ヲ求ム、

第七　$5^{\frac{3}{2}}$ノ數價ヲ求メテ、小數五位ニ至ルマテ、數價ヲ正實ナラシム可シ、

複率立方根

第二百三十六章　複率ノ立方根ヲ開クノ規則モ亦、開平方ノ如ク、雙率立方ノ諸率ヲ合併シ、其式ニ基テ之ヲ得ヘシ、比如ハ雙率ヲ$a+b$ト為ス時ハ、其立方左ノ如シ、

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

之ニ反シテ、之ヨリ方根ヲ開クノ術ヲ求ムレハ則チ左ノ三件ヲ得、

第一　方根ノ第一率ハ、乘方ノ第一率ヨリ立方根ヲ開テ之ヲ得ヘシ、其式左ノ如シ、

$$\sqrt[3]{a^3}=a$$

第二　方根ノ第二率ハ、方根第一率ノ平方三倍ヲ以テ、乘方ノ第二率ヲ除シテ、之ヲ得ヘシ、其式

左ノ如シ、

$$3a^2b \div 3a^2 = b$$

第三　乗方ノ末尾ヨリ三率ハ、因子ヲ分割シテ、左ノ如ク記スヿヲ得ヘシ、

$$(3a^2+3ab+b^2)b$$

又

$$\{3a^2+(3a+b)b\}b$$

是ニ由テ之ヲ觀レハ、法ノ目的$3a^2$ニ$3ab+b^2$或ハ$(3a+b)b$ヲ加ヘ、若シ之ニbヲ乗スレハ、則チ乗方末尾ノ三率トナル可キカ故ニ、即チ以テ法ト為ス可シ、

是故ニ立方

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

ヲ開テ、方根

$$a+b$$

ヲ求メ得ント欲セハ、其術左ノ如クナル可シ、

術

$$
\begin{array}{l|l}
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & a+b \\
a^3 &
\end{array}
$$

		$3a^2$	$3a^2b+3ab^2+b^3$
$3a+b$	$3ab+b^2$	$3a^2+3ab+b^2$	$3a^2b+3ab^2+b^3$

此ニ於テ方根ノ第一率aヲ得テ、其立方ヲ總數ヨリ減シテ殘$3a^2b+3ab^2+b^3$ヲ得タリ、今$3a^2$ヲ以テ、此第一率ヲ除スレハ、bヲ得、即チ以テ根ノ第二率ト為スヘシ、之ヲ開クノ法ヲ作ルニハ、先ツ$3a+b$ヲ書シ、之ニbヲ乘スル時ハ、$3ab+b^2$ト為ル、之ヲ目的ニ加ヘテ、$3a^2+3ab+b^2$ヲ得テ以テ法ト為スヘシ、復タ之ニbヲ乘シテ、其積ノ實ヨリ減スレハ、則チ又殘餘ナシ、是ニ至テ全數ヲ開キ了ルト為スヘシ、

第二百三十七章　上章ノ術中ニ用フル所ノ諸數ハ、開立方ニ必用ナルカ故ニ、學者ヲシテ之ヲ記念セシメンカ為ニ、各、其名ヲ命スルヿ、左ノ如シ、

甲
目的 $3a^2$
改正初因子 $3a+b$
改正目的 $3ab+b^2$
法 $3a^2+3ab+b^2$

第二百三十八章　又方根三率ナル時ハ其二率ヲ合シテsト為シ、以テ左式ヲ得ヘシ、

比如ハ方根$a+b+c$ニ於テ、sヲ$a+b$ト為ス時ハ、其式左ノ如シ、

$$s=a+b$$

$$s+c=a+b+c$$

$$(s+c)^3=s^3+3s^2c+3sc^2+c^3$$

此ニsニ代フル所ノ$a+b$ハ、前例ノ如ク之ヲ得テ、總數ヨリ其立方根ヲ減スル時ハ、殘者左ノ如シ、

$$3s^2c+3sc^2+c^3$$

此因子ヲ分割スレハ、

$$(3s^2+3sc+c^2)c$$

或ハ

$$\{3s^2+(3s+c)c\}c$$

ト為ル、

然レハ則チ $3\delta^2$ ハ、c ヲ得ルノ目的ニシテ、$(3\delta+c)c$ ハ其改正目的ナリ、然リ而シテ $3\delta^2$ 即チ $3(a+b)^2$ ハ乗術ヲ以テ之ヲ得ヘシト雖モ、前例ノ術中ニ用フル所ノ三數ヲ加ヘテ、之ヲ作ルヲ以テ倍便トス、

$$\left.\begin{array}{ll} \text{後法} & 3a^2+3ab+b^2 \\ \text{後改正} & 3ab+b^2 \\ \text{後根率自乗} & b^2 \end{array}\right\}\text{乙}$$

$$3\delta^2=3(a+b)^2=3a^2+6ab+b^2$$

此如ハ左ノ複率ノ立方根ヲ求ム、

問題

$$x^6+3x^5-3x^4-11x^3+6x^2+12x-8$$

術

x^2+x-2 根

$$x^6+3x^5-3x^4-11x^3+6x^2+12x-8$$

$$x^6$$

		$3x^4$	$3x^5-3x^4-11x^3+6x^2+12x-8$
$3x^2+x$	$3x^3+x^2$	$3x^4+3x^3+x^2$	$3x^5+3x^4+x^3$
			$-6x^4-12x^3+6x^2+12x-8$
$3x^2+3x$	$-6x^2-6x+4$	$3x^4+6x^3-3x^2-6x+4$	$-6x^4-12x^3+6x^2+12x-8$

問題ノ複率ハ、xノ自乗標ニ從テ、位次ヲ立タル者ナリ、前例ニ從テ方根ヲ求ムレハ、第一率ニx^2ヲ得タリ、第一殘數ハ$3x^4$ヲ以テ目的ト為シ、xヲ以テ方根ノ第二率ト為ス、上章ノ甲式ニ從テ法ヲ作リ、方根第一率ノ三倍ニ第二率ヲ加ヘタル者、即チ$3x^2+x$ヲ以テ改正初因子ト為シ、之ニxヲ乗シテ$(3x^2+x)x$即チ$3x^3+x^2$ヲ以テ改正目的ト為シ$3x^4+3x^3+x^2$ヲ以テ法ト為シ、之ニxヲ乗シテ$(3x^4+3x^3+x^2)x$即チ$3x^5+3x^4+x^3$ヲ以テ積ト為シ實ヨリ之ヲ減シテ、第二殘數ヲ得、是ヲ新實ト為ス、

次ニ乙式ニ從ヒ、

$$
\begin{array}{r}
(3x^4+3x^3+x^2) \\
+(3x^3+x^2) \\
+x^2 \\
\hline
3x^4+6x^3+3x^2
\end{array}
$$

ヲ以テ新目的ト為シ、以テ實ヲ除シテ-2ヲ得、是ヲ方根ノ第三率ト為ス前ノ初因子$3x^2+x$ノ第二率ニ三ヲ乗シ-2ヲ附シテ$3(x^2+x)-2$即チ$3x^2+3x-2$ヲ得テ以テ改正初因子ト為シ、是ヨリ前ノ如ク、改正目的、法、及ヒ積ヲ求メテ、以テ全

數ヲ開キ了ル可シ、其他方根三率以上ナル者ト雖モ皆之ニ準シ、第二率ハ第一率ニ關係シ、第三率ハ第一第二ノ兩率ニ關係スルカ如ク、以下ノ諸率皆之ニ同シト知ル可シ、

第二百三十九章　上章說ク所ノ理ニ由テ、左則ヲ得、

第一則　複率ノ位次ヲ一字ノ自乘標ニ從ハシメ其第一率ノ立方根ヲ以テ根ノ第一率ト為シ、其立方ヲ複率ヨリ減シ殘數ノ位次ヲ正シテ又實ト為ス可シ、

第二則　既ニ得ル所ノ根ノ平方三倍ヲ實ノ右方ニ書シテ以テ目的ト為シ、以テ實ノ第一率ヲ除シ其商ヲ以テ根ノ第二率ト為ス可シ、

第三則　根ノ第一率ノ三倍ニ根ノ第二率ヲ附シ法ノ目的ヨリ一行ヲ下テ左方ニ之ヲ記シ之ニ根ノ第二率ヲ乘シテ以テ改正目的ト為シ之ヲ目的ニ加ヘテ以テ法ト為ス可シ、

第四則　法ニ根ノ新率ヲ乘シ其積ヲ實ヨリ減シ殘數ヲ以テ新實ト為ス可シ、

第五則　前ノ法ト改正目的ト前ノ新根率ノ平

方トヲ相和シテ以テ新目的ト為シ實ヲ除シテ以テ根ノ新率ヲ得ヘシ

第六則　前ノ初因子ハ後率ニ三ヲ乗シテ之ニ根ノ新率ヲ附シ以テ新改正目的ト為ス可シ以下術ヲ施ス丁前ノ如クシテ以テ全數ヲ開キ了ルニ至ル可シ

設問

左ノ諸數ノ立方根ヲ問フ

第一

$27a^3+108a^2+144a+64$

第二

$x^6+6x^5-40x^3+96x-64$

第三

$8x^6-36x^5+66x^4-63x^3+33x^2-9x+1$

第四

$a^6+9a^5b+24a^4b^2+9a^3b^3-24a^2b^4+9ab^5-b^6$

第五

$a^9-6a^8+27a^7-74a^6+159a^5-243a^4+257a^3-174a$
$+60a-8$

眞數立方根

第二百四十章　眞數ノ立方根ヲ開クノ規則ヲ定メント欲セハ、先ツ立方、及ヒ立方根ノ地位定格ヲ知ラサル可カラス、左ニ例ヲ掲ケテ之ヲ示サント欲ス、

立方	方根
1	1
729	9
970,299	99
997,002,999	999
1	1
1,000	10
1,000,000	100
1,000,000,000	1000

第六

$$x^9-3x^8+6x^7-10x^6+12x^5-12x^4+10x^3-6x^2+3x-1$$

第七

$$8x^3-12a^2b+36a^2bc+6a^3b^2-36a^2b^2c-a^3b^3+34ab^2c^2$$
$$+9a^2b^3c-27ab^3c^2+27b^3c^3$$

第八

$$x^6-12x^5+\frac{195x^4}{4}-70x^3+\frac{195x^2}{16}-\frac{3x}{4}+\frac{1}{64}$$

第九

$$x^9+6x^8-64x^6-96x^5+192x^4+512x^3-768x-512$$

是ニ由テ之ヲ觀レハ一位ノ數ハ立方ニ於テ一位ヨリ三位ニ至ル而シテ凡ソ方根ニ一位ヲ加フレハ立方ニ於テ三位ヲ增ス可シ

是故ニ立方ノ單位ヨリ每三字ニ點ヲ附シテ各三位ヲ一段ト為ス時ハ其段數ヲ以テ方根ノ位數ヲ知ル可シ

第二百四十一章　方根各位ノ數價ハ立方ノ段數ニ關スルノ理ヲ知ラシメンカ為ニ隨意ノ數（左ニ五千四百二十三ヲ用フ）ヲ分割シテ各部ノ立方ヲ作レハ則チ左ノ如シ

$$5000^3 = 125\ 000\ 000\ 000$$

$$5400^3 = 157\ 464\ 000\ 000$$

$$5420^3 = 159\ 220\ 088\ 000$$

$$5423^3 = 159\ 484\ 621\ 967$$

是故ニ方根第一位ノ立方ハ全ク立方ノ第一段ニ止マリ方根ノ初二位ノ立方ハ全ク立方ノ初二段ニ止マリ其他皆之ニ準ス

第二百四十二章　凡ソ眞數ノ立方根ヲ開クニ、雙率ノ立方ヲ以テ法式ト為ス、故ヲ以テ方根前位ノ數ハ、其地位ノ價格ヲ以テaト為シ、其餘後位ノ數ハ之ヲbト為ス可シ、其術ニ至テハ、代數開平方ト同一般ナリ、

比如ハ、

64,206,490,176

ノ立方根ヲ求ム、

術

164206490176 | 5476

125

		7500	39206
154	616	8116	32464
		874800	6742490
1627	11389	886189	6203323
		89762700	539167176
16416	98496	89861196	539167176

右問題ノ數ニ四段アリ、則チ方根ニ四位アルヲ知ル可シ、又第一位ノ立方ハ、全ク第一段ニ止マル（前章）ヲ以テ、164中ニ於テ最大ナル立方ヲ求メテ125ヲ得タリ、其根ハ則チ5ナリ、故ニ之ヲ記シテ以テ、求ムル所ノ方根第一位ト為ス、

今此5ハ根ノ次位ニ對スレハ、十位ニ在ルヲ以テ50ト為シ、是ヲaト為シ、方根ノ次位ヲ以テbト為ス、而シテ$a+b$ノ立方ハ全ク初ノ二段ニ止マル（前章）ヲ以テ、a^3即チ125ヲ164ヨリ減シ、其殘數ニ次段ノ三字ヲ下附シテ39206ト為ル、此數少ク𪜈必ス$3a^2b+3ab^2+b^3$ヲ包含ス可シ、（第二百三十六章）、故ニ$3a^2$即チ7500ヲ以テ目的ト為シ、以テ實ヲ除シテ4ヲ得、是レ即チbノ數價ニシテ根ノ第二位ナリ、

代數ノ如ク$3a+b$即チ154ヲ以テ改正ノ初因子ト為シ、之ニbヲ乘シテ$(3a+b)b$即チ616ヲ得テ以テ第一ノ改正目的ト為シ、之ヲ目的ニ加ヘテ8116ヲ得テ以テ法ト為シ、又之ニ4ヲ乘シテ、其積ヲ實ヨリ減

シ次段ノ數ヲ附シテ、6742490ヲ得テ以テ新實ト為ス、
第二百三十八章ノ乙式ニ從ヒ、三數ヲ相加ヘテ

$$\begin{array}{r} 8116 \\ +\ 616 \\ +\ 16 \\ \hline 8748 \end{array}$$

ヲ得、次位ニ對スレハ、874800ト為ル可キ地位ニ在ルヲ以テ、00ヲ附シ以テ實ヲ除シ、7ヲ得テ以テ根ノ第三位ト為ス、次ノ改正目的ヲ見ント欲セハ、此7ヲ前ノ方根二位ノ三倍ニ附シテ1627ヲ得テ以テ初因子ト為シ、以下術ヲ施スヿ前ノ如ク、全數ヲ開キ了ルニ至ルマテ、之ヲ反復ス可シ、

是ニ由テ左則ヲ得

第一則　問題ノ數ヲ書シ、其單位ヨリ左右ニ數ヘテ、每三位ニ、各一點ヲ附シテ以テ段ヲ分ツ可シ、

第二則　左端ノ一段ニ於テ最大ノ立方ヲ求メ、其根ヲ記シテ以テ求ムル所ノ方根第一位ト為シ、其立方ヲ第一段ヨリ減シテ殘數ニ次段ヲ下附シ以テ實ト為ス可シ、

第三則　既ニ得ル所ノ根ハ平方三倍ヲ實ノ左

ニ書シ零二位ヲ附シテ以テ目的ト為シ以テ實ヲ除シ其商ヲ以テ根ノ次位ト為ス可シ

第四則　根ノ第一位三倍ニ根ノ新位ヲ附シ之ニ根ノ新位ヲ乘シテ以テ改正目的ト為シ之ニ目的ヲ加ヘテ以テ法ト為ス可シ

第五則　法ニ根ノ新位ヲ乘シテ其積ヲ實ヨリ減シ殘數ニ次段ヲ下附シテ以テ新實ト為ス可シ

第六則　前ノ法及ヒ改正目的ニ根ノ新位自乘ヲ相和シテ零二位ヲ附シテ以テ新目的ト為シ以テ實ヲ除シテ根ノ第三位ヲ得ヘシ

第七則　前ノ初因子右端ノ一位ニ三ヲ乘シ根ノ新位ヲ附シテ以テ新初因子ト為シ以下術ヲ施スヿ前ノ如クシテ全數ヲ闕キ了ルニ至ル可シ

設問

左ノ諸數ノ立方根ヲ求ム

第一	148877
第二	571787
第三	256047875
第四	354894912
第五	11852.352

第六	第七	第八	第九	第十
144125083907	128100283921	105555569176	731189187729	1762.790912

第十一	第十二	第十三	第十四	第十五
1061520150601	33212361.641984	1371737997260631	.171467	.004235801032

約法

第二百四十三章　新數ノ立方根ヲ開クニ方テ、小數ヲ約スルノ法ヲ適用セント欲セハ、宜シク先ツ左ノ三件ニ注意スヘシ、

第一　立方根ノ新位ヲ得ル毎ニ、實ノ右ニ三位ヲ增シ、法ノ右ニ二位ヲ增シ、左端ノ初因子ニ一位ヲ增ス可キ事

第二　施術中若シ實ニ新段ヲ下附スルヿヲ過ムレハ、則チ其以下ノ新根ヲ得ル毎ニ、法ニ於テハ一位ヲ約シ、左端ノ初因子ニ於テハ、二位ヲ約ス可キ事、

術

			850000000
			729
274	1096	24300	121000
		25306	101584
2827	19789	2650800	19416000
		2670589	18694123
2841	568	2690427	721877
		2690995	538199
28	17	269156	183678
		269173	161504
		26919	22174
			21535
		2692	639
			538
		269	101
			81
		27	20
			19

第三　然リト雖𪜈、初メテ法及ヒ因子ヲ約スルノ時ヨリ以下、上件ノ眼目ニ従テ、單ニ右端ノ數位ヲ約スル時ハ、必ス法ニ餘計ノ一位ヲ備置ス可キ事、

比如ハ八百五十箇ノ立方根ヲ問ヒ小數八位ニ至ルマテ正實ナランヿヲ求ム、

根

9.47268237+

求術ヲ施ス丁常ノ如クニシテ、新實721877ヲ得ルニ至テ、零字ノ段ヲ附セス、是ヲ約法ノ初ト為ス、其目的モ亦右端ノ零位ヲ省キ單ニ2690427ト為ス、其右端ノ一位ハ、約法ニ於テ必用トスル所ノ積ヲ得ルニ方テハ、地位下レルヲ以テ取ル可キ者ニ非スト雖氏、即チ餘位ニ備フル者ナリ、此目的ヲ以テ實ヲ除シテ2ヲ得、以テ根ノ新位ト為ス、今改正目的ヲ作ルニ方テ其後位ト同等ノ地位ニ非サル可カラス、故ニ通常ノ如ク初因子2841ヲ作テ根ノ新位2ヲ附セス、2841ニ2ヲ乘シテ5682ヲ得其568ハ即チ今改正ノ為ニ必用トスル所ナリ、因テ法2690995ヲ得、積538199ヲ減シテ殘138678ヲ以テ新實ト為ス

次ノ目的ハ2690995ニ568ヲ加ヘ一位ヲ棄テ269156ヲ得、根ノ前位2ノ自乘ハ、地位下レルヲ以テ、固ヨリ之ヲ廢棄ス可シ、以下ノ術皆之ニ準スルハ、敢テ論ヲ俟タス、

是ニ於テ根ノ位數ハ、乘方ニ於テ豫定スル所ノ位數ニ同シキヲ知ル可シ、因テ左則ヲ得

第一則　方根ニ於テ需ムル所ノ位數ノ如ク、乘方ノ位數ヲ豫備シ諸位皆下ルニ至ルマテ通常ノ如ク術ヲ施ス可シ、

第二則　次ノ目的ハ常ノ如ク之ヲ作リテ其右端ハ零ヲ附セス以下ノ目的ヲ作ルニ毎次一位ヲ脱却ス可シ、

第三則　初メテ約實ヲ作ルニ、次テハ左方ニ其改正初因子ヲ作ルニ根ノ新位ヲ附セス其以下初因子ヲ作ル毎ニ必ス二位ヲ脱却ス可シ、

第四則　約法ヲ初メテヨリ以來法ニ新位ヲ乘スルニ方テ初因子及ヒ法ノ右端ナル一位ハ每ニ餘位ト為ス可シ、

原註ニ曰ク、約法ヲ用ヒサラント欲セハ、通常ノ術ヲ施シテ每次新段ヲ附ス可シ、然レハ則チ根ニ不用ノ小數ヲ得ルドモ寧可ナリ、

設問

第一　三ノ立方根ヲ問ヒ、小數六位ヲ需ム、

第二　七ノ立方根ヲ問ヒ、小數六位ヲ需ム、

第三　一百五十六ノ立方根ヲ問ヒ、小數八位ヲ需ム、

第四　三萬四千七百八十六ノ立方根ヲ問ヒ、小數六位ヲ需ム

第五　十箇、九七三九三七ノ立方根ヲ問ヒ、小數六位ヲ需ム、

第六　一千五百箇、一〇一五二〇一二五ノ立方根ヲ問ヒ、小數八位ヲ需ム

第七　一箇、一六四一三二ノ立方根ヲ問ヒ、小數六位ヲ需ム、

第六編

方根數

第二百四十四章　方根數トハ、開方標、或ハ分數自乘標ヲ以テ、方根ヲ示ス所ノ數量ナリ、比如ハ

$$3\sqrt{a}\quad \sqrt[3]{a-b}\quad c(a+b)^{\frac{1}{3}}\quad m\sqrt[n]{x^2-y^2}$$

等ハ即チ方根數ナリ、方根數ハ實ニ其根ヲ開キ得ヘキ者アリ、或ハ開キ得ヘカラサル者アリ、

方根數ノ前ニ附スル所ノ數、即チ因子ヲ倍數ト

謂フ、上文ノ例ニ於テ3 1 c mハ即チ方根ノ倍數ナリ、

第二百四十五章　方根ノ度數ハ、開方目、或ハ分數自乗標ノ分母ヲ以テ之ヲ示ス者トス、即チ左ノ如シ、

$\sqrt{a}$　$(a-b)^{\frac{1}{2}}$　二乗方根、即チ開平方根、

$\sqrt[3]{x^2-y}$　$a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$　三乗方根、即チ開立方根、

$\sqrt[n]{ac}$　$(x+y)^{\frac{1}{n}}$　n乗方根、

第二百四十六章　同數量ニシテ、同目ノ開方標ヲ附シタル者ハ、之ヲ同方根數ト為ス、左ノ三數ノ如キハ、即チ同方根數ナリ、

$4\sqrt[3]{a^2+b}$

$-\sqrt[3]{a^2+b}$

$7(a^2+b)^{\frac{1}{3}}$

方根約法

第一例

第二百四十七章　方根數ヲ變化シテ、其約式ヲ作ルノ法アリ、

方根數中、其開方目ニ適合スル自乘標ナキ時ハ、之ヲ其約式ト為ス、其例左ノ如シ、

第一　$\sqrt{48a^6x^3}$ ノ約式ヲ求ム、

數量ノnノ乘方根ハ其各因子ノnノ乘方根ノ積ニ同シキハ、既ニ之ヲ説ケリ、（第二百二十七章）是ニ由テ左式ヲ得、

$$\sqrt{48a^6x^3}=\sqrt{16a^6x^2\times 3x}=\sqrt{16a^6x^2}\times\sqrt{3x}=4a^3x\sqrt{3x}$$

此術ノ第一着手ニ於テ、問題ノ數ヲ分割シテ兩因子ト為シ、其一ヲ適合ノ乘方數ト為ス、而シテ上ニ説ケルカ如ク、開方ノ理ニ從ヒ、兩方根數ノ積ヲ得テ其一因子$\sqrt{16a^6x^2}$ハ、其根ヲ開ク可キ者ニシテ、其二$\sqrt{3x}$ハ不開數ナリ、開ク可キ者ハ之ヲ開テ、其根ニ不開數ヲ乘スルナリ、

第二

$3\sqrt[3]{8x^4y^3-8x^3y^4}$ノ約式ヲ求ム、

前ノ如ク、因子ヲ分割シテ、左式ヲ得、

$$3\sqrt[3]{8x^4y^3-8x^3y^4}=3\sqrt[3]{8x^3y^3}\times\sqrt[3]{x-y}$$
$$=3\times2xy\times\sqrt[3]{x-y}$$
$$=6xy\sqrt[3]{x-y}$$

是ニ由テ左則ヲ得、

第一則　問頭ノ數ヲ分割シテ兩因子ト為シ標目ニ從テ其一ヲ適合ノ乗方數ト為シ各開方標ヲ附ス可シ

第二則　適合乗方ノ根ヲ開キ之ニ固有ノ倍數ヲ乗シ其積ヲ不開數ノ前ニ接置ス可シ

設問

左ノ方根數ノ約式ヲ求ム、

第一	$\sqrt{75}$
第二	$\sqrt{98a^2}$
第三	$\sqrt{12x^2y}$
第四	$\sqrt[3]{54x^4}$
第五	$4\sqrt[3]{108}$

第六 $\sqrt{x^3-a^2x^2}$

第七 $6\sqrt[3]{32a^3}$

第八 $3\sqrt{28a^3x^3}$

第九 $\sqrt[3]{a^3+a^3b^2}$

第十 $(x-y)\sqrt{2x^3-4x^2y+2xy^2}$

第十一 $(a-b)\sqrt{2a^2b+4ab^2+2b^3}$

第十二 $5b(b^3-b^2)^{\frac{1}{2}}$

第十三 $(2a^7b^5-3a^5b^7)^{\frac{1}{5}}$

第十四 $\frac{a}{b}(a^4b^5+a^5b^4)^{\frac{1}{3}}$

第十五 $\sqrt{8a^{3n}x^{4m}}$

第十六 $\sqrt[3]{a^{4m}x^{4m}}$

第十七 $(2x^{2m}y^{m}-3x^{3m}y^{3m})^{\frac{1}{m}}$

第十八 $a^{-n}c(a^{mn}c^{2n}-a^{3mn}c^{n})^{\frac{1}{n}}$

第二百四十八章　開方標下ノ數、若シ分數ナル時ハ、方根ノ度數ニ從ヒ、之ヲ變化シテ、其分母ヲ適合ノ乗方數ト為ス可シ、而シテ前ノ如ク、開ク可キ若ヲ開ケハ、開方標下ノ數ハ整數ト為ル可シ、蓋シ分數ヲ分割シテ兩因子ト為シ、其一ヲ適合ノ乗方ト為スハ、普ク諸生ノ熟知スル所ナラン、然レハ則チ、不開數ヲ別因子ト為スハ容易ノ術タル可シ、

設問

第一　$\sqrt{\frac{44}{75}}$ ノ約式ヲ求ム、

術

$$\sqrt{\frac{44}{75}}=\sqrt{\frac{4}{25}\times\frac{11}{3}}$$

$$=\sqrt{\frac{4}{25}\times\frac{33}{9}}$$

$$=\sqrt{\frac{4}{25}\times\frac{1}{9}\times 33}$$

$$=\frac{2}{15}\sqrt{33}$$

答

第二　$\sqrt[3]{\frac{5}{72}}$ノ約式ヲ求ム、

術

$$\sqrt[3]{\frac{5}{72}}=\sqrt[3]{\frac{15}{216}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{1}{216}\times 15}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt[3]{15}$$

答

又左ノ諸數ノ約式ヲ求ム、

第三	$\sqrt[3]{\frac{135}{32}}$
第四	$\sqrt[3]{\frac{25}{9}}$
第五	$\sqrt{\frac{50}{147}}$
第六	$2\sqrt{\frac{2a}{3}}$
第七	$\frac{5}{6}\sqrt{\frac{72}{245}}$
第八	$\frac{x}{a}\sqrt{\frac{a^3b}{x^2y^3}}$

第二例

第二百四十九章　適合ノ數量ヲ變シテ、方根數ト為シ、或ハ方根數ノ倍數ヲ轉シテ、開方標下ニ入ルヽノ法アリ、乗方ト開方トハ、正ニ相反スル者ナルカ故ニ左式ヲ得、

$$a=\sqrt{a^2}=\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[4]{a^4}$$

又

$$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$$

是ニ由テ左則ヲ得、

第一則　適合ノ數量ヲ方根數ト為サント欲セハ求ムル所ノ方根ノ度數ニ從テ之ヲ自乘シ其所得ヲ開方標下ニ書ス可シ、

第二則　方根數ノ倍數ヲ開方標下ニ入レント欲セハ方根ノ度數ニ從テ之ヲ自乘シ其所得ヲ方根ニ乘ス可シ、

設問

第一　ab^2ヲ二乘方根數ト為サハ如何、

第二　$5a^2xy^2$ヲ三乘方根數ト為サハ如何、

第三　$a-cx$ヲ四乘方根數ト為サハ如何、

左ノ諸方根ノ倍數ヲ轉シテ開方標下ニ入ルヽ時ハ各如何、

第四	$4a\sqrt{2xy}$
第五	$3x^2\sqrt[3]{x-y}$
第六	$(a-2b)\sqrt{2a}$
第七	$\frac{a}{c}\left(\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$
第八	$x\left(\frac{1}{x}-\frac{a}{x^3}+\frac{a^2}{x^5}-\frac{a^3}{x^7}\right)^{\frac{1}{2}}$

第三例

第二百五十ト章　二三以上ノ方根數ヲ同標目ト為スノ法アリ、

設如ハ $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mr}{nr}}$ ニ於テ r 整數ナル時ハ、兩數必ス相等シカル可シ、若シ $a^{\frac{m}{n}}$ ヲ以テ x ト為ス時ハ、左式ノ如シ、

$$x=a^{\frac{m}{n}}\cdots\cdots(壹)$$

n 乘方ト為ス、

$$x^n=a^m\cdots\cdots(貳)$$

r 乘方ト為ス、

$$x^{nr}=a^{mr}\cdots\cdots(參)$$

nr 乘方根ヲ開ク、

$$x=a^{\frac{mr}{nr}}\cdots\cdots(肆)$$

壹參ノ x 數價ヲ比ス即チ上ノ如シ、

是故ニ $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{nr}{nr}}$

是故ニ分數自乘標ノ兩率ニ同數ヲ乘スル時ハ、其價格ヲ變易セス、

又第二百二十三章ニ從テ左式ヲ得、

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{mr}{nr}}=\sqrt[nr]{a^{mr}}$$

是故ニ方根數ノ標目及ヒ開方標下ノ自乘標ヲ同數ヲ之ニ乘シ或ハ同數ヲ以テ之ヲ除スレハ本數ノ價格ヲ變易セス、

第一　設如ハ $(ab)^{\frac{1}{2}}$ 及ヒ $(a^2x)^{\frac{1}{3}}$ ヲ同標目ト為スノ式左ノ如シ、

問		答
$(ab)^{\frac{1}{2}}$	$=(ab)^{\frac{3}{6}}$	$=(a^3b^3)^{\frac{1}{6}}$
$(a^2x)^{\frac{1}{3}}$	$=(a^2x)^{\frac{2}{6}}$	$=(a^4x^2)^{\frac{1}{6}}$

第二　設如ハ $\sqrt[3]{a^2c}$ 及ヒ $\sqrt[4]{x^3z^2}$ ヲ同標目ト為スノ式左ノ如シ、

是ニ由テ左則ヲ得。

$$\sqrt[3]{a^2c}=\sqrt[12]{a^8c^4}$$

$$\sqrt[4]{x^3z^2}=\sqrt[12]{x^9z^6}$$

第一則　分數自乘標ヲ附シタル數量ニ在テハ其最小通分母ヲ取リ新自乘標ノ分子ニ顯ハレタル數ヲ以テ各字ノ自乘標ニ乘シ其所得ニ通分母ノ一箇分子ヲ附シテ以テ自乘標ト為ス可シ

第二則　開方標ヲ附シタル數量ニ在テハ固有標目ノ最小公除數ヲ取テ求ムル所ノ同標目ト為シ固有標目ヲ以テ新標目ヲ除シ其商ニ顯ハレタル開方標下各字ノ自乘標ト為ス可シ

設問

左ノ諸數ヲ同標目ト為サハ如何。

第一	第二	第三	第四
$a^{\frac{1}{2}}$	$(3a^2x)^{\frac{1}{3}}$	$(a-b)^{\frac{1}{2}}$	a
$(cd)^{\frac{1}{3}}$	$(2ax^2)^{\frac{1}{4}}$	$(a+b)^{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{ac}$
$(a^2c)^{\frac{1}{4}}$	$(5a^3x^5)^{\frac{1}{6}}$		$\sqrt[3]{a^2x}$
			$\sqrt[4]{2ac^3}$

第五 $\sqrt{2}$ $\sqrt[4]{2}$ $\sqrt[5]{2}$

第六 a^2 $\sqrt{5x}$ $\sqrt[3]{2ax}$ $\sqrt[4]{2a^2x}$

第七 $\sqrt{x-y}$ $\sqrt[3]{x+y}$ $\sqrt[6]{x^2-y^2}$

第八 $\sqrt{ax}$ $\sqrt[m]{xy}$ $\sqrt[n]{cx}$

方根加法

第二百五十一章　相加フ可キ數量、皆同方根ナル時ハ其方根數ヲ以テ加法ノ一箇ト爲ス可キハ、固ヨリ論ヲ俟タス、然シテ其所得ハ常ニ單一ノ方根數ト爲リ其倍數ハ舊本方根ノ倍數ノ和ニ同シ、若シ方根數ヲ視ルニ恰モ同方根ニアラサル者ノ如シト雖モ、或ハ之ヲ約シテ同方根ト爲ス可キ者アリ、

第一　設如ハ $7\sqrt{ac}$ $3\sqrt{ac}$ $5\sqrt{ac}$ ノ和ヲ求ム、

術

$$7\sqrt{ac}+3\sqrt{ac}+5\sqrt{ac}=(7+3+5)\sqrt{ac}$$
$$=15\sqrt{ac}$$

答

第二　設如ハ $\sqrt[3]{8a^5c}$ $\sqrt[3]{27a^5c}$ $\sqrt[3]{64a^2c^4}$ ノ和ヲ求ム、

術

$$\sqrt[3]{8a^5c}=2a\sqrt[3]{a^2c}$$
$$\sqrt[3]{27a^5c}=3a\sqrt[3]{a^2c}$$
$$\sqrt[3]{64a^2c^4}=4c\sqrt[3]{a^2c}$$
$$S=(5a+4c)\sqrt[3]{a^2c}$$

方根數若シ真ニ不同ナル者ヲ加フルニハ、只標記ヲ以テ之ヲ示スノミナリ、

是ニ由テ左則ヲ得、

第一則　各方根ヲ變シテ其約式ヲ作ル可シ、

第二則　上則ニ由テ得ル所ノ方根數若シ相同シキ時ハ其倍數ヲ加ヘ其和ニ同方根ヲ附接ス可シ方根若シ相同シカラサル時ハ適當ノ標記ヲ以テ加法ヲ示ス可シ、

設問

左ノ諸數ノ和ヲ求ム、

第一　$\sqrt{16a^2x}$　$\sqrt{4a^2x}$

第二　$\sqrt{32}$　$\sqrt{72}$　$\sqrt{128}$

第三　$\sqrt[3]{40}$　$\sqrt[3]{135}$　$\sqrt[3]{625}$

第四　$\sqrt[3]{108}$　$9\sqrt[3]{4}$　$\sqrt[3]{1372}$

第五　$\sqrt{\frac{1}{2}}$　$\sqrt{\frac{2}{9}}$　$\sqrt{\frac{1}{18}}$

第六

$\sqrt[3]{\frac{81}{8}}$

$\sqrt[3]{\frac{81}{64}}$

$\sqrt[3]{\frac{375}{216}}$

第七

$\frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\frac{3}{4}\sqrt{\frac{25}{6}}$

$\frac{7}{8}\sqrt{\frac{96}{25}}$

第八

$3\sqrt{abm^2}$

$m\sqrt{4ab}$

$\sqrt{25abm^2}$

第九

$2a\sqrt{c^2x-c^2y}$

$3c\sqrt{a^2x-a^2y}$

$5\sqrt{a^2c^2x-a^2c^2y}$

第十

$\sqrt{20a^2m-20acm+5mc^2}$

$\sqrt{20mc^2-60acm+45a^2m}$

第十一

$3\sqrt[3]{cx^3}$

$\sqrt[3]{ax^3}$

$2\sqrt[3]{ax^3}$

第十二

$5a(cx^3-dx^3)^{\frac{1}{3}}$

$2x(a^3d-a^3c)^{\frac{1}{3}}$

第十三

$\sqrt{\frac{a^2(a-b)}{a+b}}$

$\sqrt{\frac{b^2(a+b)}{a-b}}$

$(a^2-3b^2)\sqrt{\frac{1}{a^2-b^2}}$

第十四

$\sqrt{(1+a)^{-1}}$

$\sqrt{a^2(1+a)^{-1}}$

$a\sqrt{(1+a)(1-a)^{-2}}$

方根減法

第二百五十二章　方根數若シ相同シキ時ハ其同方根ヲ以テ減法ノ一箇ト為シ得ルハ固ヨリナリ是ニ由テ左則ヲ得

第一則　各方根ヲ變シテ其約式ヲ作ル可シ

第二則　上則ニ由テ得ル所ノ方根数若シ相同シキ時ハ倍数ノ差ヲ取リ之ニ同方根ヲ附摂ス可シ方根若シ相同シカラサル時ハ適当ノ摽記ヲ以テ減法ヲ示ス可シ

設問

左ノ諸数ノ差ヲ問フ

第一

$$4\sqrt{135}-2\sqrt{60}$$

第二

$$\sqrt{75}-\sqrt{50}$$

第三

$$3\sqrt{16a^4b}-3\sqrt{a^2b}$$

第四

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{297}{8}}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{3773}{125}}$$

第五

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{490a^2}{338}}-\frac{a}{13}\sqrt{\frac{361}{5}}$$

第六

$$(a^2c^3-3c^3x)^{\frac{1}{3}}-2(a^2d^3-3d^3x)^{\frac{1}{3}}$$

第七

$$(a^3-ab^2+a^2b-b^3)^{\frac{1}{2}}-(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)^{\frac{1}{2}}$$

第八

$$a\sqrt{\frac{b^2x+b^2}{x-1}}-b\sqrt{\frac{a^2x-a^2}{x+1}}$$

第二百五十三章　二三若シクハ數因子相乘ノ積ノn乘方根ハ、各因子ノn乘方根ノ積ニ同シキハ既ニ之ヲ説ケリ、(第二百二十七章)今之ヲ反轉シテ左式ヲ得、

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

若シ方根數ニ倍數アル者ハ、別ニ倍數ノ積ヲ取ル可シ、

$$c\sqrt[n]{a}\times d\sqrt[n]{b}=c\times d\times\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$$
$$=cd\sqrt[n]{ab}$$

若シ方根數同標目ニアラサル者ハ、先ツ之ヲ變シテ、同標目ト為ス可シ、

比如ハ　$a\sqrt{x}$　$b\sqrt[3]{x^2y}$　ノ積ヲ求ム、

術

$$a\sqrt{x} = a\sqrt[6]{x^3}$$

$$b\sqrt[3]{x^2y} = b\sqrt[6]{x^4y^2}$$

積 $ab\sqrt[6]{x^7y^2} = abx\sqrt[6]{xy^2}$ 答

是ニ由テ左則ヲ得。

第一則　問題ノ方根數若シ同標目ナラサル時ハ之ヲ變シテ同標目ト為ス可シ

第二則　方根數ヲ相乘シテ同一ノ開方標下ニ之ヲ記シ其前ニ倍數ノ積ヲ置キ總積ヲ變シテ約式ト為ス可シ

設問

左ノ方根數ノ積ヲ問フ

第一	$5\sqrt{5}\times3\sqrt{8}$
第二	$4\sqrt{12}\times3\sqrt{2}$
第三	$3\sqrt{2}\times2\sqrt{8}$
第四	$2\sqrt{5}\times2\sqrt{10}\times3\sqrt{6}$
第五	$2\sqrt[3]{14}\times3\sqrt[3]{4}$
第六	$5c\sqrt{ax}\times c\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[3]{ax^3}$
第七	$(xy)^{\frac{1}{2}}\times(xz)^{\frac{2}{3}}\times(yz)^{\frac{3}{4}}$
第八	$(x-y)^{\frac{2}{3}}\times(x+y)^{\frac{3}{4}}$
第九	$\sqrt[3]{15}\times\sqrt{10}$
第十	$\frac{a}{b}\sqrt{\frac{x}{y}}\times\frac{y}{x}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}\times\sqrt[3]{\frac{bx^2}{ay^2}}$

第十一

$$\sqrt{\frac{ax^2}{(a+x)^3}}\times\sqrt{\frac{b(a^2-x^2)^2}{x^4}}\times\sqrt[4]{\frac{a^2c}{(a-x)^4}}$$

方根除法

第二百五十四章　分數ハ其母子ヲ各別ニ自乘シテ乘方ト為ス可キカ故ニ、分數ノ方根モ亦各自ニ開テ之ヲ得ヘキハ論ヲ俟タス、故ニ左式ノ如シ、

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

又之ニ反シテ次式ヲ得、

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

即チn乘方根二數ノ商ハ其商ノn乘方根ニ同シキナリ、

此理ニ由テ、方根數ノ除法ハ左ノ如シ、

第一　$3a\sqrt{c}$ ヲ以テ $6a^2\sqrt{bc}$ ヲ除ス、

術

$$\frac{6a^2\sqrt{bc}}{3a\sqrt{c}}=\frac{6a^2}{3a}\sqrt{\frac{bc}{c}}$$

$$=2a\sqrt{b}$$

答

第二

$\sqrt{xy}$ヲ以テ$\sqrt[3]{x^2y}$ヲ除ス、

術

$$\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt[6]{x^4y^2}}{\sqrt[6]{x^3y^3}}$$

$$=\sqrt[6]{\frac{x^4y^2}{x^3y^3}}$$

$$=\sqrt[6]{\frac{x}{y}}$$

答

是ニ由テ左則ヲ得

第一則　方根數ヲ變シテ同標目ト為ス可シ

第二則　法ノ倍數ヲ以テ實ノ倍數ヲ除シ法ノ方根數ヲ以テ實ノ方根數ヲ除シテ同一ノ開方標下ニ記シ倍數ノ商ヲ方根ノ商前ニ附置シ其所得ヲ約ス可シ

設問

第一

$4\sqrt{50}\div2\sqrt{5}$

第二

$\sqrt[3]{100}\div3\sqrt[3]{5}$

第三

$\sqrt[3]{20a^2d}\div\sqrt{15ad}$

第四

$(a^2b^2d)^{\frac{1}{6}}\div d^{\frac{1}{2}}$

第五

$(16a^3-12a^2x)^{\frac{1}{2}}\div2a$

代數學卷之三

第六

$$45 \div 3\sqrt{5}$$

第七

$$(ab^2c^2)^{\frac{1}{3}} \div (a^2b^3c^4)^{\frac{1}{5}}$$

第八

$$12c^2(a-x)^{\frac{3}{4}} \div 4c(a-x)^{\frac{2}{3}}$$

第九

$$(a^3c)^{\frac{1}{m}} \div (ac^3)^{\frac{1}{n}}$$

第十

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}} \div \frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

第十一

$$\sqrt[4]{a^2b-ab^2} \div \sqrt{ab}$$

方根乗方開方

第二百五十五章　若シ$a^{\frac{1}{n}}$即チ$\sqrt[n]{a}$ヲm乗方ト為シ、又之ヲ同標目ト為サント欲セハ、方根乗法ノ規則ニ従テ左式ノ如シ

$$(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

即チ、某數ノn乗方根ノm乗方ハ、其m乗方ノn乗方根ニ同シキナリ、

第二百五十六章　方根數$a^{\frac{1}{n}}$即チ$\sqrt[n]{a}$ノm乗方根ヲ開カント欲セハ、其式左ノ如シ、

$$x = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} \cdots (壹)$$

又

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

壹式兩項ヲm乗方ト為ス

$$x^m = a^{\frac{1}{n}} \cdots (貳)$$

又

$$\sqrt[n]{a}$$

貳式兩項ヲn乗方ト為ス、

$$x^{mn} = a \cdots (參)$$

参式兩項ノmn乗方根ヲ取ル、

$$x=a^{\frac{1}{mn}}\cdots(肆)$$

又

$$\sqrt[mn]{a}$$

壹肆兩式ノxノ數價ヲ比シテ次式ヲ得、

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}$$

又

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

即チ某數ノn乗方根ノm乗方根ハ其mn乗方根ニ同シキナリ、

第二百五十七章　今

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

及ヒ

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

兩式相同シキヲ以テ左式ヲ得ヘシ、

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

即チ某數ノn乗方根ノm乗方根ハ其mn乗方根ニ同シキナリ、

方根乗方

第二百五十八章　方根數ヲ若干乗方ト為スノ法左ノ如シ

第一　設如ハ$(ab)^{\frac{1}{4}}$ヲ二乗方ト為サハ如何、

第二百五十五章ニ由テ下ノ如シ、

$$\left\{(ab)^{\frac{1}{4}}\right\}^2=(ab)^{\frac{2}{4}}$$
$$=(ab)^{\frac{1}{2}}$$

答

第二 設如ハ $\sqrt[6]{2ax}$ ヲ四乘方ト為サハ如何、

第二百五十五章ニ由テ左ノ如シ、

$$(\sqrt[6]{2ax})^4=\sqrt[6]{16a^4x^4}$$

然シテ 6 ハ 2×3 ナルヲ以テ、第二百五十六章ニ由テ下ノ如シ、

$$\sqrt[6]{16a^4x^4}=\sqrt[3]{\sqrt{16a^4x^4}}$$

$$=\sqrt[3]{4a^2x^2}$$ 答

實際ニ於テ此約式ヲ得ルノ法ハ、開方標目ノ一因子ヲ廢シ、開方標下ノ數ニ於テ、適合ノ方根ヲ開クニ在リ、其法式左ノ如シ

$$\sqrt[rn]{a^r}=\sqrt[n]{a}$$

是ニ由テ左則ヲ得、

第一則 分數自乘標ヲ附シタル數ニ在テハ、其自乘標ニ求ムル所ノ自乘標ヲ乘ス可シ、

第二則 開方標ヲ附シタル數ニ在テハ開方標下ノ數ヲ求ムル所ノ乘方ト為シ、所得ノ乘方若シ標目ノ因子ニ適合スル者アラハ標目ヨリ其因子ヲ去リ開方標下ノ數ニ於テ適合ノ方根ヲ開ク可シ、

設問

左ノ諸數ノ各乗方ヲ問フ、

第一 $\sqrt[5]{2a}$ ノ三乗方、	第二 $\sqrt[3]{x^2y^2}$ ノ二乗方、
第三 $3\sqrt[6]{4a^5c}$ ノ四乗方、	第四 $(a-b)^{\frac{3}{4}}$ ノ二乗方、
第五 $\sqrt[10]{12ab^2}$ ノ五乗方、	第六 $\sqrt[12]{c(a-x)^2}$ ノ八乗方、
第七 $ax\sqrt{ax}$ ノ四乗方、	第八 $\sqrt[3]{x^3y^2-x^2y^3}$ ノ二乗方、
第九 $(a+x)^{\frac{1}{3}}$ ノ六乗方、	第十 $\frac{a}{x}\sqrt[10]{96cx^6}$ ノ二乗方、

方根開方

第二百五十九章　方根數ノ方根ヲ開クノ法、左ノ如シ、

第一　$4\sqrt[3]{9a^2x^4}$ ノ平方根ヲ求ム、

此倍數ハ既ニ適合ノ平方數ナルヲ以テ、左式ヲ得ヘシ

代數學備要 卷之二

$$\sqrt{4\sqrt[3]{9a^2x^4}} = 2\sqrt{\sqrt[3]{9a^2x^4}}$$

然シテ第二百五十七章ニ由テ下ノ如シ、

$$2\sqrt{\sqrt[3]{9a^2x^4}} = 2\sqrt[3]{\sqrt{9a^2x^4}}$$

$$= 2\sqrt[3]{3ax^2}$$

答

第二　$5cd^3\sqrt{5c}$ ノ六乗方根ヲ求ム、

倍數ヲ開方標下ニ移シテ左ノ如シ、

$$5cd^3\sqrt{5c} = \sqrt{125c^3d^6}$$

第二百五十六章ニ由テ下ノ如シ、

$$\sqrt[6]{\sqrt{125c^3d^6}} = \sqrt[12]{125c^3d^6}$$

此所得ニ就テ、開方標目ノ因子3ヲ發シ、開方標下ノ數ニ於テ立方根ヲ開ケハ、則チ次ノ如シ、

$$\sqrt[12]{125c^3d^6} = \sqrt[4]{5cd^2}$$

答

第三　$(ac)^{\frac{2}{3}}$ノ四乗方根ヲ求ム、

第二百五十六章ニ由テ左式ヲ得、

$$\left\{(ac)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{4}}=(ac)^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}}$$

$$=(ac)^{\frac{1}{6}}$$ 答

是ニ由テ左則ヲ得、

第一則　分數自乗標ヲ附シタル數ニ在テハ求ムル所ノ方根ノ標目ヲ以テ本數ノ自乗標ヲ除ス可シ、

第二則　開方標ヲ附シタル數ニ在テハ開方標下ノ數ニ求ムル所ノ方根ヲ開キ得ヘキ者アラハ之ヲ開キ否ラサル者ハ求ムル所ノ方根ノ標目ヲ以テ開方標目ニ乗シ方根數ノ乗法ニ於ケルカ如ク其所得ヲ約ス可シ、

第三則　若シ方根ニ倍數アル時ハ其倍數ニ於テ求ムル所ノ方根ヲ開キ得ヘキ者アラハ別ニ之ヲ開キ否ラサル者ハ之ヲ開方標下ニ移ス可シ、

設問、

第一 $2\sqrt{a}$ ノ立方根、

第二 $a\sqrt[4]{a^2x^3}$ ノ立方根、

第三 $2\sqrt[3]{98}$ ノ四乗方根、

第四 $\frac{2}{3}\sqrt[5]{486}$ ノ平方根、

第五 $49a^4\sqrt{abx}$ ノ平方根、

第六 $5\sqrt{5}$ ノ立方根、

第七 $\left(\frac{a^3x^6}{c^6y^3}\right)^{\frac{2}{5}}$ ノ六乗方根、

第八 $\frac{4}{9}\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ ノ四乗方根、

第二百六十章 既ニ第二百五十六章ニ論辨シテ、左式ヲ載セタリ、

$$\sqrt[mn]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

今ヤ、多乗方根ヲ開クニ方テ、求ムル所ノ方根標目、若シ複數ナル時ハ、此式ヲ適用シテ、大ニ便宜ヲ得ヘシ、

設問

第一 8603056ノ四乗方根ヲ求ム、

今4ハ2×2ナルヲ以テ、再ヒ問題ノ數ノ平方根

ヲ開テ、答ヲ得ルコ左ノ如シ、

術

$$\sqrt{8603056}=2916$$

$$\sqrt{2916}=54$$

答

第二

117649ノ六乘方根ヲ求ム、

今6ハ2×3ナルヲ以テ、六乘方根ヲ開クノ術、左ノ如シ、

術

$$\sqrt{117949}=343$$

$$\sqrt[3]{343}=7$$

答

第三

1296ノ四乘方根、

第五

91102976ノ六乘方根、

第四

177978515625ノ六乘方根、

第六

65536ノ八乘方根、

第七

$$a^4-8a^3b+24a^2b^2-32ab^3+16b^4$$

ノ四乘方根、

第八

$$a^{12}+6a^{10}b+15a^8b^2+20a^6b^3+15a^4b^4+6a^2b^5+b^6$$

ノ六乘方根、

自乘標通論

第二百六十一章　左ノ三式ニ於テm nハ、整數ニシテ、或ハ正數ト為リ、或ハ負數ト為ルハ、前ニ既ニ之ヲ論シタリ、

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

今其關渉スル所、普通ナルヲ證セント欲セハ、只m n分數ナルモ、亦其式ニ合スルヲ示ス可シ、是ニ於テmヲ$\frac{p}{q}$ト為シ、nヲ$\frac{r}{s}$ト為ス時ハ、左

第一

$$a^{\frac{p}{q}}\times a^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$$

此式ノ真正ナルヲ證セント欲セハ、先ツ自乘標ノ分母ヲ通ス、

$$a^{\frac{p}{q}}\times a^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{ps}{qs}}\times a^{\frac{qr}{qs}}$$

分數自乘標ノ性質（第二百二十二章）ニ從ヒ、此式ノ後項ハ次ノ如シ、

$$(a^{ps})^{\frac{1}{qs}}\times(a^{qr})^{\frac{1}{qs}}$$

而シテ此兩因子ノ開方標相同シキカ故ニ、次ノ如ク之ヲ變ス可シ、（第二百二十七章）

$$(a^{ps}\times a^{qr})^{\frac{1}{qs}}$$

今ps及ヒqrハ、整數ナルカ故ニ、其所得ハ終ニ下ノ如シ、

$$(a^{ps+qr})^{\frac{1}{qs}}=a^{\frac{ps+qr}{qs}}$$
$$=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$$

是即チ初式

$$a^{\frac{p}{q}}\times a^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$$

ノ正實ナル確證ナリ

第二

$$a^{\frac{p}{q}} \div a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$$

此式ノ正實ナルヲ證セント欲セハ同上ノ變化ヲ為シテ左式ヲ得ヘシ、

$$\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = \frac{a^{\frac{ps}{qs}}}{a^{\frac{qr}{qs}}} = \frac{(a^{ps})^{\frac{1}{qs}}}{(a^{qr})^{\frac{1}{qs}}}$$

$$= \left(\frac{a^{ps}}{a^{qr}}\right)^{\frac{1}{qs}}$$

$$= (a^{ps-qr})^{\frac{1}{qs}}$$

$$= a^{\frac{ps-qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$$

是即チ本式ノ實正ナルヲ證ス可シ、

第三

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{pr}{qs}}$$

此式ノ正實ナルヲ知ラント欲セハ、先ツ左式ヲ作ル可シ、

$$x = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} \cdots\cdots (壹)$$

壹式ヲs乗方ト為ス、

$$x^{s} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{r} \cdots\cdots (貳)$$

第二百五十五章ニ從ヒ、貳式ヲ變化ス、

$$x^{s} = a^{\frac{pr}{q}} \cdots\cdots (参)$$

参ヲq乗方ト為ス、

$$x^{qs} = a^{pr} \cdots (肆)$$

qs乗方根ヲ開ク、

$$x = a^{\frac{pr}{qs}} \cdots (伍)$$

壹伍兩式ノ

x數價ヲ比シテ $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{pr}{qs}}$ ノ真正ナルヲ證ス可シ、

是故ニ、乘除及ヒ乘方開方ニ於テハ、自乘標數ハ正負及ヒ整分ニ拘ラス皆同一ノ法則ヲ適用ス可シ、

設問

第一 $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}$ ニ $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$ ヲ乘シテ其積ヲ約ス可シ、

術

$$a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}=\left(a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{2}{3}}\right)\times\left(b^{\frac{2}{3}}\times b^{\frac{1}{3}}\right)$$
$$=a^{\frac{7}{6}}b$$
$$=ab\sqrt[6]{a}$$

答

第二 $\left(x^{\frac{2}{3}}\times x^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{4}}$ ヲ約ス可シ、

術

$$\left(x^{\frac{2}{3}}\times x^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{4}}=\left(x^{\frac{16}{15}}\right)^{\frac{3}{4}}$$
$$=x^{\frac{4}{5}}$$

答

第三

$x^{\frac{3}{4}} - 3x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}$ ニ $x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}} - 3$ ヲ乗ス可シ、

術

$$
\begin{array}{r}
x^{\frac{3}{4}} - 3x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} \\
x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}} - 3 \\
\hline
x^{\frac{5}{4}} - 3x + x^{\frac{3}{4}} \qquad\qquad\qquad\qquad \\
- 2x + 6x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{1}{2}} \qquad\qquad \\
- 3x^{\frac{3}{4}} + 9x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{4}} \\
\hline
x^{\frac{5}{4}} - 5x + 4x^{\frac{3}{4}} + 7x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{4}}
\end{array}
$$

答

第四

$\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$ ヲ以テ $x - 5\sqrt[6]{x^5} + \sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x}$ ヲ除ス可シ、

術

實

$$x-5\sqrt[6]{x^5}+7\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}$$
$$x-2\sqrt[6]{x^5}+3\sqrt[3]{x^2}$$
$$-3\sqrt[6]{x^5}+4\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt{x}$$
$$-3\sqrt[6]{x^5}+6\sqrt[3]{x^2}-9\sqrt{x}$$
$$-2\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}$$
$$-2\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}$$

法

$$\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}$$

$$\sqrt[3]{x}-3\sqrt[6]{x}-2$$

答

第五 $x^{\frac{1}{2}}$ ニ $x^{\frac{1}{3}}$ ヲ乗ス可シ、

第六 $a^2b^{\frac{1}{4}}$ ニ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}$ ヲ乗ス可シ、

第七 $a^{\frac{1}{4}}$、$a^{\frac{1}{2}}$ $a^{\frac{2}{3}}$ $a^{-\frac{3}{4}}$ 相乗ノ積ヲ求ム、

第八 $a^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}$ ヲ以テ $a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{2}{3}}$ ヲ除ス可シ、

第九 $(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}}$ ヲ以テ $(x^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{3}}$ ヲ除ス可シ、

第十 $a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}$ ニ $a^{\frac{1}{4}}+1$ ヲ乗ス可シ、

第十一 $2\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{xy}$ ニ $3\sqrt{x}-\sqrt{xy}$ ヲ乘ス可シ、

第十二 $a^{\frac{1}{2}}-2a^{-\frac{1}{4}}+a^{-1}$ ニ $a^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{2}}$ ヲ乘ス可シ、

第十三 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ヲ以テ $a-b$ ヲ除ス可シ、

第十四 $a^{\frac{1}{3}}-1$ ヲ以テ $a^{\frac{5}{6}}-2a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{6}}$ ヲ除ス可シ、

第十五 $a^{\frac{5}{2}}+a^{2}b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{4}{3}}+ab^{2}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{8}{3}}+b^{\frac{10}{3}}$ ニ $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{2}{3}}$ ヲ乘ス可シ、

第十六 $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}$ ヲ以テ $x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{4}{3}}$ ヲ除ス可シ、

以下ノ諸數ヲ約ス可シ、

第十七

$$\left(a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{5}{7}}\right)^{\frac{7}{11}}$$

第十八

$$\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^3$$

第十九

$$\frac{\left\{(a^m)^{\frac{1}{r}}(a^s)^{\frac{1}{n}}\left(c^{\frac{m}{n}}\right)\right\}^{nrs}}{\left\{\sqrt[s]{c^n}\left(\sqrt[m]{c}\right)^r\left(\sqrt[s]{a}\right)^r\right\}^{m.s}}$$

第二十

$$\left\{\frac{2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt[3]{108}}{3\sqrt[3]{72}\cdot 3(3)^{\frac{1}{2}}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

第廿一

$$\left\{\frac{\frac{4}{5}\sqrt[3]{\frac{1}{5}}-2\sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}+\frac{5}{4}\sqrt[4]{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

第廿二

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})}$$

第廿三

$$\left\{\frac{(\sqrt{5}+2)(\sqrt[4]{5}+\sqrt{2})(\sqrt[4]{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{13}+3)(\sqrt[4]{13}+\sqrt{3})(\sqrt[4]{13}-\sqrt{3})}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

想像數

第二百六十二章　前ニ第二百二十八章第三條ニ曰ク、負數ノ偶數乗方根ハ皆視方根ナリト、即チ想像數ニシテ實ニ成立ツ可カラサル者ノ符號ナリ、比如ハa^2ハ眞方根ニ於テ適合ノ平方ナリ、而シテ之ニ負標ヲ附スレハ、其平方根ヲ開クノ能ハサルハ左式ニ於テ之ヲ見ル可シ、

$$(+a)^2=+a^2$$

$$(-a)^2=+a^2$$

是ニ由テ之ヲ觀レハ、$\sqrt{-a^2}$ハ眞方根ニ非スシテ所謂ル視方根、卽チ想像數ナリ、然リ而シテ論理上及ヒ實學究理ノ際ニ方テハ、斯ノ如キ數ヲ得ルコト少シトセス、故ニ其用法ヲ詳ニシ、其理由ヲ解スルハ、頗ル緊要ノ事トス、仍テ次章以下、之ニ關スル所ノ規則ヲ說示サント欲ス、

第二百六十三章　若シ一連ノ數量ニシテ、眞數及ヒ想像數ヲ混淆スル時ハ、單ニ一部ノ想像數アルノ故ヲ以テ總テ想像數ト為ス可シ、

比如ハ左ノ如キ雙率ニシテ之ヲ一連ノ數量ト見做セハ、一連總テ想像數ナリ、

$$4+\sqrt{-3}$$

第二百六十四章　既ニ第二百二十七章ニ說ク所ニ從テ左ノ二式ヲ得、

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a\times(-1)}$$
$$=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}$$

又

$$\sqrt{-a^2-b^2+2ab}=\sqrt{(a-b)^2\times(-1)}$$
$$=(a-b)\sqrt{-1}$$

是故ニ若シ唯平方數ノミヲ以テ之ヲ視レハ、想像數ハ皆次ノ如ク之ヲ變ス可シ、

$$a \pm b\sqrt{-1}$$

是ニ於テaハ眞方根ナリ、bハ想像數ノ倍數ナリ、$\sqrt{-1}$ハ想像ノ因子ナリ、

故ニ想像數ヲ記スルニハ、單ニ$\sqrt{-1}$ヲ以テスルヿヲ得ヘシ、

第二百六十五章　今想像數ノ乘除ヲ便宜ナラシメンカ為ニ次ニ想像數ノ符號$\sqrt{-1}$ノ各乘方ヲ掲ケ其式ノ法則ヲ示ス、

$$(\sqrt{-1})^1 = +\sqrt{-1}$$

$$(\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})\times(\sqrt{-1}) = -1$$

$$(\sqrt{-1})^3 = (-1)\times(\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}$$

$$(\sqrt{-1})^4 = (-\sqrt{-1})\times(\sqrt{-1}) = +1$$

此順序ニ從ヒ四乘以下ノ所得ニ想像數ヲ乘スレハ、此四式ノ如ク、五乘六乘七乘八乘等ノ式ヲ得ヘシ、

第二百六十六章　方根數乘除ノ常則ハ之ヲ想像數ニ適用スルニ、唯標記ノ法則ニ於テ變更スル所アルノミ、

比如ハ$\sqrt{a}$ $\sqrt{b}$相乘ノ積ヲ求ム、此ニ於テ真正ノ積ヲ得ント欲セハ、先ツ想像數ノ符號ヲ各因子ヨリ分割ス可シ、而メ其式左ノ如シ、

術

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}\times\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1}$$
$$=\sqrt{ab}\times\left(\sqrt{-1}\right)^2$$
$$=\sqrt{ab}\times(-1)$$
$$=-\sqrt{ab}$$

是レ眞方根ニシテ、負數ナル者ナリ、

然リト雖氏方根數ノ常則（第二百五十三章）ニ從ヒ相乘スレハ左ノ如シ、

術

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{(-a)(-b)}$$
$$=+\sqrt{ab}$$

此所得ハ、方根數ノ標記ニ於テ、過失アル者ナリ、

又初ノ術ニ從テ負數平方根ヲ相乘スレハ則チ左ノ如シ、

$$(-\sqrt{-a})\times(-\sqrt{-b})=+\sqrt{ab}\cdot(-1)=-\sqrt{ab}$$

$$(+\sqrt{-a})\times(-\sqrt{-b})=-\sqrt{ab}\cdot(-1)=+\sqrt{ab}$$

此ニ於テ同標ハ負數ト為リ、異標ハ正數ト為ル、仍テ左則ヲ得、

第一則

兩想像數ノ積ハ眞方根ニシテ其標記正負常則ニ反ス、

又同法ヲ以テ想像數ヲ相除スレハ、左ノ如シ、

術

$$\frac{+\sqrt{-ab}}{+\sqrt{-a}}=\frac{+\sqrt{ab}\cdot\sqrt{-1}}{+\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}}=+\sqrt{b}$$

$$\frac{-\sqrt{-ab}}{+\sqrt{-a}}=\frac{-\sqrt{ab}\cdot\sqrt{-1}}{+\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}}=-\sqrt{b}$$

此ニ於テ同標ハ正數ト為リ、異標ハ負數ト為ル、仍テ左則ヲ得、

第二則

想像數相除ノ商ハ眞方根ニシテ其標記ハ正負常則ニ反ス、

代數學卷之三

第二百六十七章　設如ハ左ノ方程式アリ、

$$a+b\sqrt{-1}=a'+b'\sqrt{-1}\ \cdots\cdots(壹)$$

此ニ於テ a a' ハ眞方根ナリ、今之ヲ移轉ス、

$$a-a'=(b'-b)\sqrt{-1}\ \cdots\cdots(貳)$$

此ニ於テ a a' ハ、同數ナルノ論ヲ俟タス、

$$a=a'$$

今若シ a a' ヲ不同トシ、$a>a'$ 或ハ $a<a'$ トスル時ハ、貳式ノ前項ハ零ニ非スシテ、眞方根ト爲ル可シト雖モ後項ニ於テ之ヲ觀レハ、零ニ非サレハ、想像數ナラサルヲ得ス、到底 $a-a'$ ナル時ハ、貳式ハ變シテ左ノ如シ、

$$0=(b'-b)\sqrt{-1}$$

此ニ於テ b' b モ亦同數 $b=b'$ ニ非サレハ、式ニ合セス、

是故ニ、兩想像數相同シケレハ、其眞方根相同シク、其倍數モ亦相同シ、

第二百六十八章　上ニ說ク所ノ理由ハ、今之ヲ

左ノ設問ニ適用ス可シ、

設問

左ノ諸數ヲ相乘ス可シ、

第一 $a\sqrt{-c}\times b\sqrt{-d}$

第二 $2\sqrt{-6}\times\sqrt{-15}$

第三 $-\sqrt{-ac}\times\sqrt{-15}$

第四 $3\sqrt{-2}\times\sqrt{5}$

第五 $\overline{3+\sqrt{-5}}\times\overline{7-\sqrt{-5}}$

第六 $\overline{\sqrt{a}+\sqrt{-c}}\times\overline{\sqrt{-a}+\sqrt{c}}$

第七 $3\sqrt{-2}$ ヲ以テ $9\sqrt{-10}$ ヲ除ス可シ、

第八 $c\sqrt{-d}$ ヲ以テ $a\sqrt{-b}$ ヲ除ス可シ、

第九 $\dfrac{\sqrt{-1}}{2\sqrt{-3}}$ ヲ約ス可シ、

第十 $(a+\sqrt{-c})^4$ ヲ開散ス可シ、

第十一 $a-\sqrt{-a}$ ヲ以テ $a^2+\sqrt{-a}$ ヲ除ス可シ、

第十二

$$a+y+x\sqrt{-c}=c+x+y\sqrt{-a}$$

式中 x y ノ數價ヲ求ム、

平方根不開數

第二百六十九章　平方根不開數トハ、平方ニ適合セサル數ノ平方根ナリ、

第二百七十章　方根數若シ其約式ニ於テ、開方ニ適合セサルノ因子アル者ハ不開數ナリ、比如ハ

$\sqrt{12}$ ハ不開數ナリ、何トナレハ、其約式 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ニ於テ $\sqrt{3}$ アルカ故ナリ、斯ノ如キ因子ヲ不開數ノ不合、部ト名ツク、

第二百七十一章　數學ニ於テハ開方ニ適合ノ數ト雖𪜈、或ハ代數學ニ於テ不開數ト為ス可キ者アリ、

比如ハ$\sqrt{a+2b}$ハ代數學ニ於テ不開數ト為ス可キ者ナリ、然リト雖氏aハ十三ニシテbハ六ナル時ハ、左ノ如ク開方ニ適合ノ數ナリ、

$$a=13$$

$$b=6$$

$$\sqrt{a+2b}=\sqrt{13+12}$$

$$=\sqrt{25}$$

$$=5$$

第二百七十二章　左ニ掲クル數條ハ、不開數ノ性質ニ關スル者ニシテ、論理上及ヒ實際ニ於テ緊要ナル條件ナリ、蓋シ方根數ハ、專ラ不開數ヲ記スルノ用ニ供スル者タルカ故ナリ、

第一條　不合部相同シカラサル兩不開平方根ハ積モ不合數ナリ、

設如ハ$a\sqrt{b}$、$c\sqrt{d}$ヲ以テ兩不開數ト為ス、其積ノ約式左ノ如シ、

$$ac\sqrt{bd}$$

此b dハ固ヨリ不同ノ數ヲ豫定シタル者ナリ、然レハ則チ其因子中、必ス彼此相同シカラサル者アリ、是レ即チ其不合部タラサルヲ得ス、若シ否ラサレハ、此式ハ未タ約式ニア

ラサルナリ、故ニ此積 $ac\sqrt{ba}$ ハ不合數ナリト云フ、（第二百七十章）、

第二條　不合部相同シカラサル兩不開平方根ハ和及ヒ差ハ必ス適合數ト相同シキヲ得ス、

設如ハ $\sqrt{a}$ $\sqrt{b}$ ハ兩不開數ナリ、

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=c\cdots（壹）$$

若シ此和ヲシテ適合數ニ同シカラシメハ、cハ適合數ナラン、而シテ壹式ノ兩項ヲ自乘シテ $a+b$ ヲ移轉セハ、即チ下式ノ如シ、

$$2\sqrt{ab}=c^2-a-b.（貳）$$

此式ニ於テ之ヲ視レハ、適合數恰モ不合數ニ同シキニ似タリト雖氏、固ヨリ壹式既ニ眞正ノ者ニ非ス、貳式モ亦決シテ成立ツ可カラサル者ナリ、

又同法ヲ以テ不合部相同シカラサル兩不開平方根ノ差ハ適合數タル可カラサルヲ知ル可シ」、

第三條　不合部相同シカラサル兩不開平方根ハ和及ヒ差ハ他ノ不開平方根ト相同シキヲ得ス、

若シ本條ヲ否ラストセハ、左式ノ如クニシテ其

c ハ適合數ト為リ、$\sqrt{c}$ ハ不開數ト為ル可シ、

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{c}$$

兩項ヲ自乘シテ之ヲ移轉ス、

$$2\sqrt{ab}=c-a-b$$

此式ニ至テ其成立ツ可カラサルヲ知ル可シ、蓋シ不開數ハ適合數ト相同シキコト能ハサルヲ以テナリ、

第四條

方程式ニ於テ適合數及ヒ不開平方根ヲ併有スル者ハ必ス其兩適合數相同シク其兩不合部亦相同シ、

設如ハ左式ノ如シ、

$$a+b\sqrt{x}=c+d\sqrt{y} \cdots\cdots(\text{壹})$$

不開數既ニ約式タリ、今之ヲ移轉ス、

$$b\sqrt{x}-d\sqrt{y}=c-a \cdots\cdots(\text{貳})$$

貳式ハ後項適合數ナルヲ以テ、兩不開數其不合部ヲ同フスルニアラサレハ、此式真正ナルコト能ハス、

故ニ不合部同等 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$ トスレハ、此式變シテ左ノ如シ、

$$(b-d)\sqrt{x}=c-a\cdots(参)$$

是ニ至テ $b-d$ $c-a$ ヲ以テ共ニ 0 ト為セハ、始メテ真正ノ式ト為ル可シ、否ラサレハ不開數、適合數ト相同シキヲ致ス可シ、故ニ壹式ノ兩適合數相同シク、兩不開數相同シト云フ、即チ左ノ如シ、

$$b-d=0$$

$$c-a=0$$

$$a=c$$

$$b\sqrt{x}=d\sqrt{y}$$

雙率不開平方根

第二百七十三章　雙率不開數トハ、雙率ノ一隻或ハ兩率不開數ナル者ヲ謂フナリ、比如ハ $3+\sqrt{5}$ 及ヒ $\sqrt{7}+\sqrt{2}$ ハ雙率不開數ナリ、

第二百七十四章　若シ $a\pm\sqrt{b}$ 或ハ $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ ノ如キ雙率不開數ヲ自乗シテ平方ト為ス時ハ、其所得モ亦雙率不開數ト為ル可シ、即チ左式ノ如シ、

$$(3+\sqrt{5})^2=14+6\sqrt{5}$$

$$(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2=9-2\sqrt{14}$$

是故ニ$a\pm\sqrt{b}$ノ如キ雙率不開數ハ時トシテ適合數タルヿアル可シ

第二百七十五章

$a\pm\sqrt{b}$ノ如キ雙率不開數ノ平方根ヲ開クノ規則ヲ得ント欲セハ爰ニ左式ヲ設ク可シ

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a+\sqrt{b}} \cdots\cdots (壹)$$

此式ノ後項ハ不開數ナルカ故ニ前項ノ兩率若シクハ一率必ス不開數ナル可シ今兩項ヲ自乘シテ次式ヲ得

$$x+2\sqrt{xy}+y=a+\sqrt{b} \cdots\cdots (貳)$$

第二百七十二章第四條ニ從テ次ノ如シ

$$x+y=a \cdots\cdots (參)$$

$$2\sqrt{xy}=\sqrt{b} \cdots\cdots (肆)$$

参ヨリ肆ヲ減シ其所得ノ平方根ヲ開ク、

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{a-\sqrt{b}} \quad \ldots\ldots (伍)$$

壹ニ伍ヲ乗ス、

$$x-y=\sqrt{a^2-b} \quad \ldots\ldots (陸)$$

参ト陸トヲ合ス、

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} \quad \ldots\ldots (柒)$$

$$y=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} \quad \ldots\ldots (捌)$$

今 a^2-b 若シ適合ノ平方タル時ハ、x y ノ適合數タルハ、上式ニ於テ之ヲ見ル可シ、且ツ柒捌兩式ニアル x y ノ數價ハ明ニ壹伍兩式ニ合ス可シ是ニ由テ、雙率不開數ノ平方根ヲ開キ得ルコト、左ノ如シ、

比如ハ a ヲ適合數ト為シ、$\sqrt{b}$ ヲ方根數ト為シ、柒捌兩式ニ於テ x y ノ數價ヲ求ム可シ、而シテ雙率若シ壹式ニ於ケルカ如ク、$a+\sqrt{b}$ ノ如キ者ハ、求ムル所ノ平方根 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ノ如シ、

雙率若シ伍式ニ於ケルカ如ク、$a-\sqrt{b}$ ノ如キ者ハ、求ムル所ノ平方根 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ノ如シ、

設問

第一 $7+4\sqrt{3}$ ノ平方根ヲ求ム、

此問ニ於テ $a=7$ ニシテ、$\sqrt{b}=4\sqrt{3}$ 即チ $b=48$ ナリ、故ニ左ノ如シ、

術

$$x=\frac{7+\sqrt{49-48}}{2}=4$$

$$y=\frac{7-\sqrt{49-48}}{2}=3$$

是ニ由テ

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2+\sqrt{3}$$

答

第二 $11-8\sqrt{-5}$ ノ平方根ヲ問フ、

此問ニ於テ a b ハ下ノ如シ、

$$a=11$$

$$\sqrt{b}=8\sqrt{-5}$$

$$b=-320$$

術

$$x=\frac{11+\sqrt{121+320}}{2}=16$$

$$y=\frac{11-\sqrt{121+320}}{2}=-5$$

故ニ

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=4-\sqrt{-5}$$

答

第三

$5m^2-c+4m\sqrt{m^2-c}$ ノ平方根ヲ問フ、

此ニ於テ a b ハ次ノ如シ、

$a=5m^2-c$

$b=16m^4-16m^2c$

術

$$x=\frac{5m^2-c+\sqrt{(5m^2-c)^2-(16m^4-16m^2c)}}{2}=4m^2$$

$$y=\frac{5m^2-c-\sqrt{(5m^2-c)^2-(16m^4-16m^2c)}}{2}=m^2-c$$

故ニ

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2m+\sqrt{m^2-c}$ 答

左ノ諸数ノ平方根ヲ求ム、

第四	$11+6\sqrt{2}$
第五	$7-4\sqrt{3}$
第六	$7-2\sqrt{10}$
第七	$94+42\sqrt{5}$
第八	$28+10\sqrt{3}$
第九	$np+2m^2-2m\sqrt{np+m^2}$
第十	$bc+2b\sqrt{bc-b^2}$
第十一	$17+30\sqrt{-2}$

左ノ諸數ノ數價ヲ求ム、

第十二

$$\sqrt{16+30\sqrt{-1}}+\sqrt{16-30\sqrt{-1}}$$

第十三

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}$$

第十四

$$\sqrt{31+12\sqrt{-5}}+\sqrt{-1+4\sqrt{-5}}$$

第十五

$$\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$$

不開數變化

第二百七十六章　分母不開數ナル分數ハ、時トシテ、分母ヲ適合數ト為スヿヲ要用トスル者アリ、然スレハ則チ、其分子ノ數價ヲ算出スルヿ容易ナルヲ以テ、更ニ分數ヲ約ス可シ、斯ノ如キ變化ヲ成スノ法ハ、毎ニ分母子ニ同因子ヲ乘スルニ在リ、

第二百七十七章　乘術ヲ以テ不開數ノ開方標ヲ轍シ去ルノ術ヲ不開數變化ト云フ、而シテ此術ヲ行ハント欲セハ、當ニ何ノ因子ヲ乘スヘキヲ知ラサル可カラス、今要用ノ二三例ヲ揭ケテ

之ヲ考定ス可シ、

第二百七十八章　單率不開數ヲ變化スヘキ因子ヲ見ルノ法アリ、

是例ニ於テ當ニ相乘スヘキ因子ハ一箇ト分數自乘標トノ差ヲ附シタル同數ナルハ、固ヨリナリ、即チ下式ノ如シ、

$$a^{\frac{1}{n}}\times a^{1-\frac{1}{n}}=a$$

第一　不開數$\sqrt{a}$ヲ變化シテ適合數ト為ス、

今之ニ乘スヘキ因子ハ$\sqrt{a}$ナリ、

$$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$$ 適合數

第二　不開數$x^{\frac{3}{5}}$ヲ變シテ適合數ト為ス、

今之ニ乘スヘキ因子ハ$x^{\frac{2}{5}}$ナリ、

$$x^{\frac{3}{5}}\times x^{\frac{2}{5}}=x^{\frac{5}{5}}=x$$ 適合數

第二百七十九章　$a\pm\sqrt[m]{b}$ 或ハ $\sqrt[m]{a}\pm\sqrt[n]{b}$ ノ如キ不開數ニシテ、其m nハ各二ノ幾乘方ナル者ヲ、適合數ト為スヘキ因子ヲ求ムルノ法アリ、

凡ソ二數ノ和ト差トノ積ハ、二數平方ノ差ニ同

シキカ故ニ、此例ニ於テ雙率ハ、互對ノ標記ヲ以テ連接シタル同率ヲ以テ之ニ乘スレハ、其積ノ標目ハ、各〻本標目ノ半ナル可シ、而シテm n若シ二ノ幾乘方ナル時ハ、此術ヲ反復シテ遂ニ適合數ト為ル可シ、

第一　不開數 $a+\sqrt{c}$ ヲ變シテ適合數ト為ス、

今之ニ乘スヘキ因子ハ $a-\sqrt{c}$ ナリ、

$$(a+\sqrt{c})(a-\sqrt{c})=a^2-c$$ 適合數

第二　不開數 $\sqrt{a}-\sqrt[4]{x}$ ヲ變シテ適合數ト為ス、

此ニ於テ相乘スル所ノ總因子ハ則チ下ノ如シ、

$$(\sqrt{a}+\sqrt[4]{x})(a+\sqrt{x})$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt[4]{x})(\sqrt{a}+\sqrt[4]{x})=a-\sqrt{x}$$

$$(a-\sqrt{x})(a+\sqrt{x})=a^2-x$$ 適合數

三率モ亦二乘方根數ノミナル時ハ、同上ノ法ヲ以テ變化ス可シ、

第三 不開數 $\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ヲ變化スル丁左ノ如シ、

術

$$\begin{array}{r}\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}\\ \sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}\\ \hline 5+\sqrt{10}-\sqrt{15}\\ \sqrt{10}+2-\sqrt{6}\\ \sqrt{15}+\sqrt{6}-3\\ \hline 4+2\sqrt{10}\\ 4-2\sqrt{10}\\ \hline 16-40=-24\end{array}$$

適合數

總因子 $(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3})(4-2\sqrt{10})$

是ニ於テ三率ノ標記ハ宜シク其一ヲ變更シテ之ニ乗スヘシ、復タ其積ニ術ヲ施ス丁前ノ如シ、

第二百八十章 各種ノ雙率不開數ヲ變化スヘキ因子ヲ求ムルノ法アリ、

比如ハ $a^{\frac{1}{r}}\pm b^{\frac{1}{s}}$ ヲ以テ雙率ノ通式ト為ス、

此ニ於テ兩率ヲ x y ト為シ、r s ノ最小公除數ヲ n ト為ス時ハ左ノ如シ、

$$x=a^{\frac{1}{r}}\qquad y=b^{\frac{1}{s}}$$

$$x^n\pm y^n$$ 適合數

然リ而シテ n 奇數ナル時ハ、$x+y$ ヲ以テ x^n+y^n ヲ整除

ス可ク、n偶數ナル時ハ、x^n-y^nヲ整除ス可シ、又$x-y$ハ、nノ奇偶ニ拘ハラスx^n-y^nヲ整除ス可シ、(第八十九章)、此等ノ整商ハ、各法ヲ變化シテ、適合數ト為スヘキ因子ナリ、故ニ今qヲ以テ求ムル所ノ因子ト為セハ、則チ左ノ如シ、

壹 $q=\dfrac{x^n+y^n}{x+y}$ n奇數ナル時 $a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{3}}$ノ因子、

貳 $q=\dfrac{x^n-y^n}{x+y}$ n偶數ナル時 $a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{3}}$ノ因子、

參 $q=\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$ nノ奇偶ニ拘ハラス $a^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{3}}$ノ因子、

第一 不開數 $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}$ヲ適合數ト為ス

是ニ於テ、nハ偶數$n=6$ナルヲ以テ貳式ニ從テ左ノ如シ、

術

$$q=\frac{x^6-y^6}{x+y}=\frac{a^3-b^2}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{5}{2}}-a^2b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}-ab+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{5}{3}}$$

因子

$$\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\times\left(a^{\frac{5}{2}}-a^2b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}-ab+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{5}{3}}\right)=a^3-b^2$$

適合数

以上説ク所ノ法式ハ、以テ左ノ設問ニ適用ス可シ、

設問

左ノ分数ヲ変シテ適合分母ト為ス可シ、

第一 $\dfrac{a}{\sqrt{c}}$

第二 $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{15}}{\sqrt{6}}$

第三 $\dfrac{x}{\sqrt[3]{a}}$

第四 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{9}}$

第五 $\dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

第六 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}$

第七 $\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{5}}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}$

左ノ分數ヲ約スベシ、

第八	第九
$\dfrac{8}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$	$\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}}$

第十

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{-3}}{\sqrt{5}+\sqrt{-3}}$$

第十一

$$\frac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{(5-\sqrt{5})(\sqrt{3}+1)}$$

第十二

$$\frac{1+a+\sqrt{1-a^2}}{1+a-\sqrt{1-a^2}}$$

第十三　$\sqrt{5}-\sqrt[4]{2}$ ヲ變化スヘキ因子ヲ求ム、

第十四　$\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{2}{3}}}$ ノ約式ヲ問フ、

方根方程式

第二百八十一章　方。根。方。程。式。トハ、方程式中ニ開方標ヲ附シタル未知數アル者ヲ謂フナリ、

第二百八十二章　方根方程式ヲ解クニ方テハ、先ツ未知諸率ヲ開方ニ適合セシムルヲ以テ、第一要務ト為ス、若シ分數ニ在テハ、既ニ前ニ說ク所ノ法式ヲ以テ之ヲ變化ス可シト雖ﾄﾓ、通常開

方術ヲ用フ、

左ニ掲クル例ハ方根數ヲ有ツ所ノ一次方程式ナリ、

第一

$$\sqrt{x+11}+\sqrt{x-4}=5$$

式中ノxノ數價ヲ求ム、

術

$$\sqrt{x+11}+\sqrt{x-4}=5$$

移轉

$$\sqrt{x+11}=5-\sqrt{x-4}$$

自乘約式

$$x+11=x+21-10\sqrt{x-4}$$

移轉合一

$$\sqrt{x-4}=1$$

自乘約式

$$x=5$$

第二

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-5}}=\frac{4x-35}{5}$$

式中ノxヲ問フ、

術

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-5}}=\frac{4x-35}{5}$$

分子ヲ以テ分母子ニ乘ス（第二百七十九章）、

$$\frac{2x-5-2\sqrt{x^2-5x}}{5}=\frac{4x-35}{5}$$

分數ヲ省キ移轉合一ス

$$-2\sqrt{x^2-5x}=2x-30$$

二ヲ以テ之ヲ除ス

$$-\sqrt{x^2-5x}=x-15$$

自乗

約式

$$25x=225$$

$$x=9$$

第三

$$\frac{c}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}+\frac{m\sqrt{a}}{x-a}=\frac{m}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

式中ノxヲ求ム、

式中諸分母ノ最小公除數ハ次ノ如キヲ以テ問題ヲ解クノ術左ノ如シ、

最小公除數

$$x-a=(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x}-\sqrt{a})$$

術

$$\frac{c}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+\frac{m\sqrt{a}}{x-a}=\frac{m}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

$$c(\sqrt{x}-\sqrt{a})+m\sqrt{a}=m(\sqrt{x}+\sqrt{a})$$

$$\therefore (c-m)\sqrt{x}=c\sqrt{a}$$

$$\sqrt{x}=\frac{c\sqrt{a}}{c-m}$$

$$x=\frac{ac^2}{(c-m)^2}$$

答

以上説明スル所ニ從ヒ、方根方程式ヲ解クニ方テ左ノ二條ヲ會得ス可シ、

第一條　時トシテハ、各率ヲ移轉スルヨリ先ニ、分數諸率ヲ開方ニ適合セシムルヲ以テ、便トスルコアリ、

第二條　乘方術ヲ施スヨリ先ニ、務メテ方程式ヲ約ス可シ、又乘方ノ後ニハ、所得簡約ヲ要スルカ故ニ、兩項各率ノ位置ニ注意ス可シ、

設問

左ノ各方程式ニ於テ未知ノ數價ヲ求ム、

第一	第二
$\sqrt{x+7}+\sqrt{x}=7$	$x+3=\sqrt{x^2-4x+59}$
第三	第四
$\sqrt{\sqrt{x-48}-\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$	$\sqrt[6]{x+2\sqrt{a+x}}=\sqrt[3]{a-\sqrt{a+x}}$
第五	第六
$\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{c}=\sqrt{\frac{n}{x}}$	$\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}+\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$
第七	第九
$\sqrt{c+x}=\frac{\sqrt{a+x^2}}{\sqrt{0+x}}$	$2\sqrt{x}-2\sqrt{x-32}=\sqrt{32}$
第八	第十
$x-\sqrt{9+x\sqrt{x^2-3}}-3$	$\frac{a}{\sqrt{x}-2}\ \frac{a+c}{x-4}=\frac{c}{\sqrt{x}+2}$

第十一

$$\frac{\sqrt{mx}-\sqrt{m}}{\sqrt{cx}-\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{x}+m}{\sqrt{x}+c}$$

第十二

$$\sqrt[3]{a^3-3a^2x+x^2\sqrt{3a-x}}=a-x$$

第十三

$$x+\sqrt{c^2-ax}=\frac{c^2}{\sqrt{c^2-ax}}$$

第十四

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{5}=\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{x^2}}}$$

第十五

$$\sqrt{a-x}=\sqrt[4]{a+x^2}$$

第十六

$$\frac{\sqrt[4]{1+x}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{4+x}}$$

第十七

$$\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{5-x}=\sqrt[3]{10}$$

第十八

$$\sqrt{x}+\sqrt{a+x}=\frac{2a}{\sqrt{a+x}}$$

第十九

$$x+a=\sqrt{a^2+x\sqrt{b^2+x^2}}$$

第二十

$$\frac{\sqrt{6x}-2}{\sqrt{6x}+2}=\frac{4\sqrt{6x}-6}{4\sqrt{6x}+6}$$

第二十一

$$\sqrt[3]{64+x^2-8x}=\frac{4+x}{\sqrt[3]{4+x}}$$

第二十二

$$\sqrt{5+x}+\sqrt{x}=\frac{15}{\sqrt{5+x}}$$

第二十三

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\left(\frac{x}{x+\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

第二十四

$$\frac{\sqrt{ax}-b}{\sqrt{ax}+b}=\frac{3\sqrt{ax}-2b}{3\sqrt{ax}+5b}$$

第二十五

$$\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x}}=9$$

第二十六

$$\frac{3\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+2}=\frac{3\sqrt{x}+15}{\sqrt{x}+40}$$

第二十七

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a}}=\frac{n^2a}{x-a}$$

代數學卷之三終

代數學卷之三答式

東京 石川彝 譯

單率某方之部

第一	x^{12}	第六	$a^2b^4x^8$	第十一	$-a^{14}x^{21}$
第二	y^{21}	第七	$125a^6x^3$	第十二	$81c^4d^8$
第三	x^{6m}	第八	$64a^{12}b^6$	第十三	$216a^3b^6$
第四	x^{mn}	第九	$256a^4$	第十四	$-125a^9b^{12}$
第五	a^3x^6	第十	$-64a^3$	第十五	$a^{4m}b^{4n}$

第十六	a^{2m}
第十七	$-x^{5n}$
第十八	$9a^{2c}b^{2d}$
第十九	$-128a^{7m}x^{14n}$
第二十	$\pm a^{m}b^{m}c^{m}$

又

第一	$x^{mn}y^{n^2}$
第二	$x^{m^2}y^{mn}$
第三	x^{m^3}
第四	x^{m^4}
第五	$x^{m^2-1}y^{m+1}$
第六	$a^{n}b^{n^2}c^{n^3}d^{n^4}$

分數乘方之部

第一	$\frac{9a^2}{b^2c^4}$
第二	$\frac{a^6}{27x^{12}}$
第三	$\frac{1024a^{10}b^5}{16807x^5}$
第四	$\frac{a^4x^{12}}{x^4y^4}$
第五	$\frac{15625}{a^6b^6c^6}$
第六	$\frac{32x^{5m}}{243a^{5n}b^{5c}}$
第七	$\pm\frac{a^nb^nc^n}{x^ny^nz^n}$
第八	$\frac{a^{mn^2}}{c^{m^2n}}$
第九	$\frac{x^{x^2}}{y^{2x}}$

負數乘方之部

第一

$a^{-6}b^{3}$

第二

$b^{6}c^{-4}$

第三

$\frac{1}{8}x^{-9}y^{3m}$

第四

$16a^{2m}b^{-2n}$

第五

$-c^{10}d^{-5x}m^{20}$

複率乘方之部

第六

$\frac{1}{81}a^{8}x^{-4}y^{4}$

第七

$\pm a^{m^{2}}y^{-mn}$

第八

$x^{-m^{-1}}$

第九

$16a$

第十

$a^{8m}b^{-4m}$

第一

$4x^4+12x^2y+9y^2$

第三

$1+4x-2x^2-12x^3+9x^4$

第二

$125x^3-75x^2y^2+15xy^4-y^6$

第四

$72a^3+54a^2b+27a^2c+36ab^2+36abc+8b^3+9ac^2$
$+12b^2c+6bc^2+c^3$

第五

$a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6$
$+b^7$

復率平方之部

第一

$$a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$$

第二

$$a^2+2ab+2ac+2ad+b^2+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2$$

第三

$$a^2+2ab+2ac+2ad+2ae+b^2+2bc+2bd+2be+c^2+2cd+2ce+d^2+2de+e^2$$

第四

$$x^2-2xy+2xz+y^2-2yz+z^2$$

第六

$$x^8-8x^7y+28x^6y^2-56x^5y^3+70x^4y^4-56x^3y^5+28x^2y^6-8xy^7+y^8$$

第七

$$a^4c^{-4}+2+a^{-4}c^4$$

第八

$$a^6+3a^4+6a^2+7+6a^{-2}+3a^{-4}+a^{-6}$$

第九

$$a^{3m}+3a^{2m}x^n+3a^mx^{2n}+x^{3n}$$

第五

$a^2-4ab+6a^2b-2ac+4b^2-12ab^2+4bc+9a^2b^2-6abc+c^2$

第六

$1+2a+3a^2-4a^3+3a^4-2a^5+a^6$

第七

$12a^3x-24ax^3-30ax+4a^4-7a^2x^2-20a^2+16x^4+40x^2+25$

第八

$1-4x-2y^2+2xy+2x^2+4xy^2-4x^2y+4x^3+y^4-2xy^3-2x^3y+3x^2y^2+x^4$

單率開平方之部

第一 $\pm 7ax^2$	第六 $-6ay^3$	第十 $3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$	第十三 $\pm 9a^{-2}b^3$
第二 $\pm 5c^5b$	第七 $9a^2x^4$	又 $3\sqrt[3]{a^2x}$	第十四 $-6a^{-n}c^{-\frac{2}{3}}$
第三 $\pm 12ac^2xy$	第八 $\pm 4ax^2$	第十一 $-2x^2y^{\frac{4}{5}}$	第十五 $3a^{-1}b^{-2}$
第四 $5a$	第九 $\pm 2a^{\frac{1}{4}}$	又 $-2x^2\sqrt[5]{y^4}$	第十六 a^ny^m
第五 $-4x^2$	又 $\pm 2\sqrt[4]{a}$	第十二 $a^3b^{\frac{m}{n}}$	第十七 $x^ny^{n^2}z^{n^3}$

第十八 $\pm\frac{2ax^2}{3a}$

第十九 $\frac{5ab^2}{2xy^4}$

第廿 $\pm\frac{5a^3}{4}$

第廿一 $\frac{ax^3}{c^2y}$

第廿二 $a^{\frac{3}{n}}b^{\frac{1}{n}}c^{\frac{1}{n}}$

第廿三 $\pm(a-x)y^2$

第廿四 $(x^2-1)(x+1)^2$

第廿五 $\pm(x^2y^2-xy^3)$

複率開平方之部

第一 a^2+b+c

第二 a^2-3b+2

第三 x^3+2x^2-x+1

第四 $1-a+a^2-a^3$

第五 $2a^2b-3ab+2ab^2$

第六 $3x^3-5x^2y-4xy^2+6y^3$

第七 $a^2-3bc+2cd-d^2$

第八 $a^2-\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{4}$

第九 $x^4-3x+{}^{-2}$

第十 $ab^{-1}-5+a^{-1}b$

第十一 $a^{2m}+3a^mc^n+c^{2n}$

眞數開平方之部

第一 85

第二 329

第三 807

第四 987

第五 2258

第六	8145
第七	42578
第八	.583
第九	.0724
第十	21.8403+
第十一	3.33016+
第十二	$\frac{37}{109}$
第十三	$\frac{1}{10101}$
第十四	$\frac{7}{12}$
第十五	2.3604−

開平方約法之部

第一	7.4833147+
第二	37416573+
第三	4.2426+
第四	4.358898+
第五	7.2431346+
第六	2.64575131+
第七	11.18034−

複率開立方之部

第一	$3a+4$
第二	x^2+2x-4
第三	$2x^2-3x+1$
第四	$a^2+3ab-b^2$
第五	a^3-2a^2+5a-2
第六	x^3-x^2+x-1
第七	$2a-ab+3bc$
第八	$x^2-4x+\frac{1}{4}$
第九	x^3+2x^2-4x-8

眞數開平方之部

第一	53
第二	83
第三	635
第四	708
第五	228
第六	5243
第七	5041
第八	4726
第九	9009
第十	12.08
第十一	10201
第十二	321.44
第十三	111111
第十四	.55555+
第十五	.1618

開立方約法之部

第一	1.442249+
第二	1.912931+
第三	5.38321261+
第四	32.6[illegible]3859+
第五	2.2[illegible]2222+
第六	11.44740066+
第七	1.051963+

方根約法第一例之部

第一	$5\sqrt{3}$
第二	$7a\sqrt{2}$
第三	$2x\sqrt{3y}$
第四	$3x\sqrt[3]{2x}$
第五	$12\sqrt[3]{4}$
第六	$x\sqrt{x-a^2}$
第七	$12a\sqrt[3]{4}$
第八	$6ax\sqrt{7a}$
第九	$a\sqrt[3]{1+b^2}$
第十	$(x-y)^2\sqrt{2x}$

第十一	第十六
$(a^2-b^2)\sqrt{2b}$	$a^mc^m\sqrt[3]{a^mc^{2m}}$
第十二	第十七
$5b^2(b-1)^{\frac{1}{2}}$	$x^2y(2-3x^ny^{2m})^{\frac{1}{m}}$
第十三	第十八
$ab(2a^2-3b^2)^{\frac{1}{5}}$	$c^2(c^n-a^{mn})^{\frac{1}{n}}$
第十四	
$a^2(ab^2+a^2b)^{\frac{1}{3}}$	
第十五	
$2a^nx^{2m}\sqrt{2}$	

又

第三	$\frac{3}{4}\sqrt{10}$
第四	$\frac{1}{2}\sqrt[3]{75}$
第五	$\frac{5}{21}\sqrt{6}$
第六	$\frac{2}{3}\sqrt{6a}$
第七	$\frac{1}{7}\sqrt{10}$
第八	$\frac{1}{y}\sqrt{ab}$

方根約法第二例之部

第一	$\sqrt{a^2b^4}$
第二	$\sqrt[3]{125a^6x^3y^9}$
第三	$(a^4-4a^3cz+6a^2c^2z^2-4ac^3z^3+c^4z^4)^{\frac{1}{4}}$
第四	$\sqrt{32a^2xy}$
第五	$\sqrt[3]{27x^7-27x^6y}$
第六	$\sqrt{2a^3-8a^2b+8ab^3}$
第七	$\left(\frac{a}{c}-\frac{a^3}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}}$
第八	$\left(x-\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^3}-\frac{a^3}{x^5}\right)^{\frac{1}{2}}$

方根約法第三例之部

第一

$a^{\frac{6}{12}}$

$(c^4d^4)^{\frac{1}{12}}$

$(a^6c^3)^{\frac{1}{12}}$

第二

$(81a^8x^4)^{\frac{1}{12}}$

$(8a^3x^6)^{\frac{1}{12}}$

$(25a^6x^{10})^{\frac{1}{12}}$

第三

$(a-b)^{\frac{1}{6}}$

$(a+b)^{\frac{1}{6}}$

即

$(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)^{\frac{1}{6}}$

$(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)^{\frac{1}{6}}$

第四

$\sqrt[12]{a^{12}}$

$\sqrt[12]{a^6c^6}$

$\sqrt[12]{a^8x^4}$

$\sqrt[12]{8a^3c^6}$

第五

$\sqrt[20]{1024}$

$\sqrt[20]{32}$

$\sqrt[20]{16}$

第六

$\sqrt[12]{a^{24}}$

$\sqrt[12]{5625x^6}$

$\sqrt[12]{16c^4x^4}$

$\sqrt[12]{64a^6x^3}$

第七

$\sqrt[6]{(x-y)^3}$

$\sqrt[6]{(x+y)^2}$

$\sqrt[6]{x^2-y^2}$

第八

$\sqrt[2mn]{a^{mn}x^{mn}}$

$\sqrt[2mn]{x^{2n}y^{2n}}$

$\sqrt[2mn]{c^{2n}c^{2n}}$

方根加法之部

第一

$6a\sqrt{x}$

第二

$18\sqrt{2}$

第三

$10\sqrt[3]{5}$

第四

$19\sqrt[3]{4}$

第五

$\sqrt{2}$

第六

$\frac{37}{12}\sqrt[3]{3}$

第七

$\frac{61}{40}\sqrt{6}$

第八

$10m\sqrt{ab}$

第九

$10ac\sqrt{x-y}$

第十

$(c-a)\sqrt{5m}$

第十一

$3x(\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{a})$

第十二

$3ax(c-d)^{\frac{1}{3}}$

第十三

$2\sqrt{a^2-b^2}$

第十四

$\frac{\sqrt{1+a}}{1-a}$

方根減法之部

第一

$8\sqrt{15}$

第二

$5(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

第三

$(12a^2-3a)\sqrt{b}$

第四

$\frac{2}{5}\sqrt{11}$

第五

$\frac{a}{15}\sqrt{5}$

第六

$(c-2d)(a^2-3x)^{\frac{1}{3}}$

第七

$b(a-b)^{\frac{1}{2}}$

第八

$\frac{2ab}{x^2-1}\sqrt{x^2-1}$

方根乗法之部

第一

$30\sqrt{1}$[illegible]

第二

$24\sqrt{6}$

第三

24

第四

$120\sqrt{3}$

第五

$12\sqrt[3]{7}$

第六

$5ac^2x\sqrt[6]{a^3x}$

第七

$xyz(x^2y^3z^5)^{\frac{1}{12}}$

第八

$\sqrt[12]{(x^2-y^2)^8(x+y)}$

第九

$\sqrt[6]{225000}$

第十

$\sqrt[6]{\frac{x}{y}}$

第十一

$\frac{a}{x}\sqrt[4]{a^2b^2c}$

方根除法之部

第一	$2\sqrt{10}$
第二	$2\sqrt[3]{20}$
第三	$\sqrt[6]{\dfrac{16a}{135d}}$
第四	$(ab)^{\frac{1}{3}}$
第五	$(4a-3x)^{\frac{1}{2}}$
第六	$3\sqrt{5}$
第七	$\sqrt[15]{\dfrac{6}{ac^2}}$
第八	$30(a-x)^{\frac{1}{12}}$
第九	$(a^{3n-m}c^{n-3m})^{\frac{1}{mn}}$
第十	$\sqrt[12]{\dfrac{x^4}{a^3}}$
第十一	$\dfrac{1}{ab}\sqrt[4]{a^4b^3-a^3b^4}$

方根開方之部

第一	$a\sqrt[5]{8a}$
第二	$xy\sqrt[3]{xy}$
第三	$162a^3\sqrt[3]{2ac^2}$
第四	$(a-b)^{\frac{1}{3}}$
第五	$2b\sqrt{3c}$
第六	$(a-x)\sqrt[3]{c^2(a-x)}$
第七	a^6x^6
第八	$xy\sqrt[3]{xy(x-y)^2}$
第九	$a^2+2ax+x^2$
第十	$\dfrac{2a^2}{x}\sqrt[5]{3cx}$

第一	$\sqrt[6]{4ac}$
第二	$\sqrt[4]{a^2x}$
第三	$\sqrt[6]{28}$
第四	$\sqrt[5]{8}$
第五	$7a^2\sqrt[4]{abx}$

第六	$\sqrt{5}$
第七	$\left(\dfrac{ax^2}{c^2y}\right)^{\frac{1}{5}}$
第八	$\frac{1}{3}\sqrt[3]{12}$

又

第三	6
第四	75
第五	24
第六	4
第七	$a-2b$
第八	a^2+b

自乘標通論之部

第五	$x^{\frac{5}{6}}$
第六	$a^2\sqrt{ab}$
第七	$\sqrt[3]{a^8}$
第八	$\left(\dfrac{c}{a}\right)^{\frac{1}{6}}$
第九	$\left(\dfrac{1}{ab}\right)^{\frac{1}{6}}$

第十	$a^{\frac{3}{7}}-a^{\frac{1}{4}}$
第十五	a^3-b^4
第十六	$x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}$
第十一	$6x+3\sqrt[6]{x^5y^3}-2\sqrt[6]{x^7y^3}-xy$
第十七	$a^{\frac{2}{3}}$
第十八	$2+\sqrt{5}$
第十二	$a^{\frac{3}{4}}-3+3a^{-\frac{3}{4}}-a^{-\frac{3}{2}}$
第十九	$\left(\dfrac{a}{c}\right)^{mn+rs-mr}$
第十三	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$
第二十	$\frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{3}{2}}$
第二十一	$\frac{2}{5}\left(2\sqrt[3]{5}-5\sqrt[4]{2}\right)^{\frac{1}{2}}$
第十四	$a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{5}}$
第二十二	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$
第二十三	$\frac{1}{2}$

不開平方根之部

第四	$3+\sqrt{2}$
第五	$2-\sqrt{3}$
第六	$\sqrt{5}-\sqrt{2}$
第七	$7+3\sqrt{5}$
第八	$5+\sqrt{3}$
第九	$\sqrt{np+m^2}-m$
第十	$b+\sqrt{bc-b^2}$
第十一	$5+3\sqrt{-2}$
第十二	10
第十三	$3+\sqrt{5}$
第十四	$8+2\sqrt{-5}$
第十五	$1+\sqrt{2}$

想像數之部

第一	$-ab\sqrt{cd}$
第二	$-6\sqrt{10}$
第三	$a\sqrt{cd}$
第四	$3\sqrt{-10}$
第五	$26+4\sqrt{-5}$
第六	$(a+c)\sqrt{-1}$
第七	$3\sqrt{5}$
第八	$\frac{a}{c}\sqrt{\frac{b}{x}}$
第九	$\frac{1}{6}\sqrt{3}$
第十	$a^4-6a^2c+c^2+(4a^3-4ac)\sqrt{-c}$
第十一	$a+\sqrt{-a}-1$
第十二	$x=a+\sqrt{ac},\quad y=c+\sqrt{ac}$

不開數變化之部

第一	第五	第九
$\frac{a\sqrt{c}}{c}$	$\frac{5(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4}$	$4+\sqrt{15}$

第二	第六	第十
$\frac{2\sqrt{15}-3\sqrt{10}}{6}$	$\frac{a+\sqrt{ac}}{a-c}$	$\frac{1-\sqrt{-15}}{4}$

第三	第七	第十一
$\frac{x\sqrt[3]{a^2}}{a}$	$\frac{8+\sqrt{55}}{3}$	$\frac{1}{5}\sqrt{15}$

第四	第八	第十二
$\frac{\sqrt[6]{72}}{3}$	$\sqrt{11}-\sqrt{3}$	$\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}$

第十三

$$5\sqrt{5}+\sqrt{10}+5\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}$$

第十四

$$\frac{a^3b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{4}{3}}+a^2b^2+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{8}{3}}+ab^{\frac{10}{3}}+a^{\frac{1}{2}}b^4}{a^3-b^4}$$

方根方程式之部

第一 $x=9$	第六 $x=\frac{2}{3}$	第十一 $x=mc$
第二 $x=5$	第七 $x=\frac{a-c^2}{2c}$	第十二 $x=3a-1$
第三 $x=16$	第八 $x=3\frac{1}{4}$	第十三 $x=\frac{c^2-a^2}{a}$
第四 $x=\frac{a^2-4a}{4}$	第九 $x=50$	第十四 $x=20$
第五 $x=a(\sqrt{x}-a)$	第十 $x=\left(-\frac{a+c}{a-c}\right)^2$	第十五 $x=\frac{a-1}{2}$

第十六 $x=\frac{12}{13}$	第廿一 $x=3$	第廿六 $x=4$
第十七 $x=5$	第廿二 $x=4$	第廿七 $x=a\frac{(1\pm n)^2}{1\pm 2n}$
第十八 $x=\frac{a}{3}$	第廿三 $x=\frac{25}{16}$	
第十九 $x=\frac{b^2-4a^2}{4a}$	第廿四 $x=\frac{9b^2}{a}$	
第二十 $x=6$	第廿五 $x=\frac{4}{9}$	

代數學卷之三答式終

[illegible]