石川彝譯

代數學

五

石川彝譯

代數學　下帙

明治十年三月九日版權免許

代數學巻之五

東京　石川彝　譯

第九綱　級數

第三百四十二章　級數トハ、諸率連列シテ定法アリ、前後互ニ照應スル所ノ數ナリ、

級數ニ數種アリ、曰ク定限級數、曰ク無究級數、曰ク收縮級數、曰ク發放級數、是ナリ、

第三百四十三章　定限級數トハ、各率連列ノ定法ニ由テ、早晩究極アリ、或ハ率數ニ一定ノ際限アル者ヲ謂フナリ、

第三百四十四章　無究級數トハ、各率連列ノ定法ニ由テ、曾テ究極ナク、率數際限ナキ者ヲ謂フナリ、

第三百四十五章　收縮級數トハ、一種ノ無究級數ニシテ、諸率ノ總計ニ定限アル者ヲ謂フナリ、

第三百四十六章　發放級數トハ、又一種ノ無究級數ニシテ、諸率ノ總計ニモ亦、定限ナキ者ヲ謂フナリ、

數學級數

第三百四十七章　數學級數トハ、各率逐次ニ等差ヲ增減スル所ノ連列數ナリ、

等差トハ、每率ニ加フル所ノ正數若シクハ負數ノ等差數ナルカ故ニ、遞加級數ニ在テハ、等差正數ナリ、遞減級數ニ在テハ、等差負數ナリ、

比如ハ左ノ數ハ級數ナリ、

$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$　是レ遞加數學級數ナルヲ以テ、等差ハ $+2$ ナリ、

$20, 18, 16, 14, 12, \ldots$　是レ遞減數學級數ナルヲ以テ、等差ハ -2 ナリ、

第三百四十八章　數學級數ノ性質ヲ講究セン

カ為ニ、茲ニ級數ヲ以テ、究極アル者ト假定スレハ、則チ左ノ五件ヲ得ヘシ、一ニ曰ク始率、二ニ曰ク終率、三ニ曰ク率數、四ニ曰ク等差、五ニ曰ク總計、是ナリ、又始終二率ヲ兩外率ト曰ヒ、兩間ノ諸率ヲ數學中率ト曰フ、

第三百四十九章　數學級數ノ終率ハ始率ニ加フルニ等差及ヒ率數一減ノ積ヲ以テスル者ニ同シ、

設如ハaヲ以テ始率ト為シ、lヲ以テ終率ト為シ、dヲ以テ等差ト為シ、nヲ以テ率數ト為ス時ハ、其級數左ノ如シ、

$$a,\ (a+d),\ (a+2d),\ (a+3d)\cdots\cdots l$$

是ニ由テ之ヲ觀レハ、各率ニ於テdノ倍數ハ、其前ノ率數ニ同シキカ故ニ、終率ハ則チ左ノ法式ノ如シ、

$$l=a+(n-1)d\cdots(甲)$$

甲式ニ於テdハ、級數ノ遞加遞減ニ由テ、正負ノ別アリトス、

第三百五十章　數學級數ニ於テ、兩外率ヨリ數

ヘテ敵對二率ノ和ハ兩外率ノ和ニ同シ、

設如ハtハ級數中ノ一率ニシテ、其前ノ率數rナリ、t'モ亦其一率ニシテ、其後ノ率數rナル時ハ、t及ヒt'ハ兩外率ヨリ數ヘテ敵對ノ二率ナリ、是ニ於テ級數若シ遞加ナレハ則チ二率ハ級數ノ性質ニ由テ、左式ノ如シ、

$$t=a+rd\cdots(壹)$$

$$t'=l-rd\cdots(貳)$$

加)

$$t+t'=a+l$$

第三百五十一章　數學級數ノ總計ハ兩外率ノ和ノ半ニ率數ヲ乘シタル者ニ同シ、

級數ノ總計ヲSト為ス時ハ、其式左ノ如シ、

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+l\cdots(壹)$$

又級數ヲ顚覆スレハ、次ノ如シ、

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+a\cdots(貳)$$

兩級數ヲ加フ、

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)\ (參)$$

參ハn率ノ總計ニシテ、各率皆$(a+l)$ナルカ故ニ、次式ノ如シ、

$$2S=n(a+l)$$

之ヲ切半シテ下ノ法式ヲ得、

$$S=\frac{n}{2}(a+l)\cdots(乙)$$

第三百五十二章　已知二率アリ、兩間ニ若干ノ數學中率ヲ挿入スルノ法アリ、

設如ハ挿入中率ノ數ヲn'ト為セハ、由テ生スル所ノ級數率數ハ$n'+2$ナル可キカ故ニ、左式ヲ得、

$$n=n'+2$$

nノ此法式ヲ以テ、甲法式（第三百四十九章）ニ代用シテ左式ヲ得、

$$l=a+(n'+1)d$$

是ニ由テ

$$d=\frac{l-a}{n+1}\cdots\cdots(丙)$$

既ニ等差ヲ知レハ、則チ各中率ヲ作ルコ亦難キニ非サル可シ、

應用式

第三百五十三章　甲乙兩法式中ニハ各四數アリ、之ヲ合スレハ、a l n d S ノ五數悉ク備ハレリ、今茲ニ之ヲ再出ス、

$$l=a+(n-1)d\cdots(甲)$$

$$S=\frac{n}{2}(a+l)\cdots\cdots(乙)$$

今此五數ノ三ヲ知レハ、餘ノ二數ハ之ヲ見ルコヲ得ヘシ、蓋シ已ニ三數價ヲ知レハ、之ヲ法式ニ代用シテ僅ニ未知二數ノ二式ヲ得ルヲ以テナリ、

第一　比如ハ數學級數アリ、其始率五、等差三ニシテ、率數二十四ナリト云フ、因テ終率及ヒ總計ヲ問フ、

已知三數

$a=5$

$d=3$

$n=24$

甲式ニ由テ

$$\left.\begin{aligned} l&=5+(24-1)3=74 \\ S&=\frac{24}{2}(5+74)=948 \end{aligned}\right\}答$$

第二　$a=15$　$d=2$　$S=60$ ナリト云フ因テ率數ヲ求ム、

甲乙兩式ニ、問題ノ已知數ヲ代用シテ、左式ヲ得、

代數學教科書卷之五　

$$l=15-2(n-1)\cdots(壹)$$

$$60=\frac{n}{2}(15+l)\cdots(貳)$$

壹ニ由リ

$$l=17-2n$$

貳ニ由リ

$$l=\frac{120-15n}{n}$$

$$\frac{120-15n}{n}=17-2n$$

$$120-15n=17n-2n^2$$

$$n^2-16n=-60$$

$$n-8=\pm 2$$

$$\left.\begin{array}{l} n=10 \\ \text{又} \\ \;\;=6 \end{array}\right\} 答$$

茲ニ得ル所ノ n ノ二價ハ、共ニ信ナリ、蓋シ問題ノ要件ニ合スル所ノ級數ニアリ、其一ハ率數十ニシテ、其二ハ率數六ナリ、即チ左ノ如シ、

$$15,13,11,9,7,5,3,1,-1,-3,$$

又

$$15,13,11,9,7,5,$$

此兩級數ノ總計ハ、兩ナガラ六十ナリ、

設問

第一　數學級數アリ、其始率七、等差三ニシテ、率數三十六ナリ、因テ終率ヲ問フ、

第二　數學級數アリ、其始率二百七十五、終率五十二ニシテ、率數四十六ナリト云フ、總計幾許ナルヤ、

第三　數學級數アリ、總計一百五十六、率數八ニシテ、等差五ナリト云フ、因テ兩外率ヲ問フ、

第四　數學級數アリ、其始率一、等差二分一ニシテ、率數一百〇一ナルヲ知レリ、知ラス總計幾許ナルヤ、

第五　二數アリ、七ト三十七ナリ、兩數間ニ數學中率四率ヲ挿入セント欲ス、各幾許ナルヤ、

第六　數學級數アリ、其始率三、率數六十ニシテ、總計三千七百二十ナリ、等差及ヒ終率ヲ問フ、

第七　二數アリ、九ト一百〇九ナリ、其中間ニ數學中率九率ヲ挿入シテ、生スル所ノ級數總計ヲ問フ、

第八　三分一ト二分一トノ間ニ、數學中率三率ヲ挿入スル時ハ、等差幾許ナルヤ、

第九　或人日々ニ負債ヲ濟スニ、初日ハ金一錢、次日ハ金三錢、第三日ハ金五錢、日々此ノ如ク金二錢ヲ増シ出サント欲ス、然ル時ハ一年ニシテ、幾許ノ負債ヲ濟シ得ヘキヤ、

第十　脚夫アリ、初日ニ二十里ヲ歩ミ、次日ハ二十三里、又次日ハ二十六里、毎日此ノ如ク、三里ヲ増スノ例ニ由テ、四百三十八里ノ路程ヲ歩行セハ、日數幾許ニシテ達スヘキヤ、

第十一　級數アリ、一二三四五六等ノ如シ、此級數ノ率數nノ總計ヲ問フ、

第十二　一三五七等ノ如キ級數アリ、其n率ノ總計ヲ問フ、

第十三　數學級數アリ、總計九百五十ナリ、等差三ニシテ、率數二十五ナル時ハ、始率幾許ナルヤ、

第十四　或人田ヲ買フ、初ノ一反ハ價金三分一圓ニシテ第二ノ一反ハ價金三分二圓ナリ、毎一反皆此準則ヲ以テ價ヲ増シ、到底金三千七百七十五圓ヲ拂ヒ出セリト云フ、買ヒ得タル田ハ總テ幾反ナルヤ、

第十五　數學級數アリ、其第十四率ト第一百三十四率ト終率トハ66ト666ト6666ナリト云フ、此級數ノ率數ヲ問フ、

十例

第三百五十四章　己ニ $a\ l\ n\ d\ S$ 五數ノ三ヲ知テ餘ノ二數ヲ求ムル所ノ例題十様アリ、毎例二式ヲ生シテ通計二十式ト為ル、即チ毎數四價ヲ示ス者ナリ、其式或ハ直ニ本元ノ二法式ニ由テ之ヲ得ヘキ者アリ、又或ハ稍ゝ所出ヲ異ニスル者アリト雖𪜈、畢竟皆既ニ上ニ説ク所ニ因ルヲ以テ、更ニ其説ヲ贅セス、之ヲ學者ノ見識ニ委ス、

番號	已知	未知
	數	
	式	

番號	已知	未知
	數	
	式	

第一

已知	未知
$a\quad d\quad n$	$l\quad S$

$$l=a+(n-1)d$$

$$S=\frac{1}{2}n\left[2a+(n-1)d\right]$$

第二

已知	未知
$l\quad d\quad n$	$a\quad S$

$$a=l-(n-1)d$$

$$S=\frac{1}{2}n\left[2l-(n-1)d\right]$$

第三

已知	未知
$a\quad n\quad l$	$d\quad S$

$$d=\frac{l-1}{n-1}$$

$$S=\frac{1}{2}n(a+l)$$

第四

已知	未知
$d\quad n\quad S$	$a\quad l$

$$a=\frac{2S-n(n-1)d}{2n}$$

$$l=\frac{2S+n(n-1)d}{2n}$$

第五

已知			未知	
S	n	a	l	d

$$d=\frac{2(S-2n)}{n(n-1)}$$

$$l=\frac{2S}{n}-a$$

第六

已知			未知	
S	n	l	a	d

$$d=\frac{2(nl-S)}{n(n-1)}$$

$$a=\frac{2S}{n}-l$$

第七

已知			未知	
l	d	a	S	n

$$n=\frac{l-a}{d}+1$$

$$S=\frac{(l+a)(l-a+d)}{2d}$$

第八

已知			未知	
S	l	a	d	n

$$n=\frac{2S}{a+l}$$

$$d=\frac{(l+a)(l-a)}{2S-(l+a)}$$

第九

已知			未知	
S	d	a	l	n

$$n=\frac{d-2a\pm\sqrt{(d-2a)^2+8dS}}{2d}$$

$$l=a+(n-1)d$$

第十

已知			未知	
S	d	l	a	n

$$n=\frac{d+2l\pm\sqrt{(d+2l)^2-8dS}}{2d}$$

$$a=l-(n-1)d$$

數學級數例題直ニ法式ニ適用ス可カラサル者

第三百五十五章　若シ例題ノ要件ニ於テ、現ニ a l n d S 五數ノ三ヲ見サル時ハ、直ニ上章ノ法式ヲ適用スルコ能ハス、是時ニ當テハ、級數ノ

諸率ヲ顯スニ、未知二三數ヲ顯ハスノ法ヲ以テセサル可カラサル者アリ、是ヲ以テ級數ヲ記スルニ、二樣ノ別法ヲ用フ、

第一　xヲ以テ始率ト為シ、yヲ以テ等差ト為シ、以テ級數ヲ顯スヿ左ノ如シ、

$$x, (x+y), (x+2y), (x+3y), \ldots$$

然リト雖𪜈、此記法ハ未タ便利ヲ極タル者ト為ス可カラス、

第二　率數若シ奇數ナル時ハ、中率ヲ以テxト為シ、等差ヲ以テyト為ス、然レハ則チ、其級數左ノ如シ、

三率
級數

$$(x-y), x, (x+y).$$

五率
級數

$$(x-2y), (x-y), x, (x+y), (x+2y)$$

率數若シ偶數ナル時ハ、$x-y$ 及ヒ $x+y$ ヲ以テ中央ノ二率ト為シ、$2y$ ヲ以テ等差ト為ス、故ニ其級數左ノ如シ、

$$(x-3y),\ (x-y),\ (x+y),\ (x+3y).$$

第二ノ記法ニ由レハ、諸率ノ總計若シクハ、敵對二率ノ和及ヒ差ハ、皆未知數單一ナルヲ以テ便利ト為ス、

設問

第一　三數アリ、數學級數タリ、其和ハ十八ニシテ、其平方ノ和ハ一百五十八ナリト云フ、因テ三數ヲ問フ、

第二　五數アリ、數學級數タリ其和ハ六十五ニシテ、其平方ノ和ハ一千〇〇五ナリト云フ、因テ五數ヲ問フ、

第三　四數アリ、數學級數タリ、其等差ハ四ニシテ、四率相乘ノ積ハ十七萬六千九百八十五ナリト云フ、因テ四數ヲ問フ、

第四　四數アリ、數學級數タリ、兩外率ノ和ハ八ニシテ、中率ノ積ハ十五ナリト云フ、因テ四數ヲ問フ、

第五　或人某地ヲ出立シテ、初日ニ一里ヲ歩ミ次日ニ二里、第三日ニ三里ヲ歩ミ、日々ニ増シ歩ムヿ此ノ如シ、既ニ六日ヲ經テ、又一人同地ヲ出立シテ、毎日等シク十五里ヲ歩ムト云フ、第二人出立シテヨリ後幾日ニシ、兩人相會スヘキヤ、

第六　或人金六十圓ヲ借リテ、之ヲ六十日ニ元利皆濟セント云フ、毎日幾許ヲ返スヘキヤ、但シ利息ハ貸借日限ト、其金額トヲ以テ、之ヲ定ムト雖モ、返濟六十日間、日々ニ之ヲ附ス、而シテ利息ノ割合ハ、三十日ヲ以テ一ヶ月ト定メタル十二ヶ月一年ニ一割ナリト云フ、

第七　四數アリ、數學級數タリ、其兩外率平方ノ和ハ六十五ニシテ、兩中率平方ノ和ハ六十一ナリト云フ、四數各幾許ナルヤ、

第八　數學級數アリ、四率ヲ以テ成レリ、其和ハ二十四ニシテ、相乘ノ積ハ九百四十五ナリト云フ、此級數各幾許ナルヤ、

第九　某數アリ、三位ヲ以テ成リ、各位互ニ數學級數タリ、若シ各位ノ和ヲ以テ本數ヲ除スレハ、其商ハ二十六ト為リ、又若シ本數ニ一百九十八ヲ加フレハ、各位順序ヲ反顛スト云フ、知ラス本數幾許ナルヤ、

第十　兩都府アリ、互ニ一百〇二里ヲ隔ツ、甲乙二人各一府ヨリ發途シ、相向テ徃ク、甲ハ初日ニ三里ヲ徃キ、次日ハ五里、又次日ハ七里、日ニ此ノ如ク里數ヲ増シ、乙ハ初日ニ四里ヲ徃キ、次日ハ六里、又次日ハ八里、日ニ此ノ如ク里數ヲ増ス、兩人徃クヿ幾日ニシテ、途ニ相逢フ可キヤ、

第十一　麥若干アリ、之ヲ毎週一斗宛、二十一人ニ分與シテ、若干時日ニ支給ス可キ目筭ナリ、然ルニ分與中ニ毎週一人ノ死者アリ、是ニ由テ目筭ノ時日ヨリモ幾ト倍増シテ只一週日ノ不足ヲ生シタリト云フ、因テ麥ノ斗量ヲ問フ、

幾何級數

第三百五十六章　幾何級數トハ諸率連列シテ、毎率相同シカラスト雖モ、各率皆其前率ニ一定

ノ因子ヲ乗シタル者ナリ、

第三百五十七章　各率一定ノ因子ヲ名ツケテ準則ト云フ、幾何級数ハ始率正数ニシテ、準則一箇ヨリモ大ナレハ、則チ逓加級数ナリ、準則若シ一箇ヨリモ小ナレハ、則チ逓減級数ナリ、

$$2, 6, 18, 54, 162, \ldots\ldots$$

此級数ハ準則三ニシテ、逓加級数ナリ、

$$81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots\ldots$$

此級数ハ準則三分一ニシテ逓減級数ナリ、

第三百五十八章　幾何級数ニシテ定限アル者ハ、其始率及ヒ終率ヲ合シテ、両外率ト曰ヒ、終始両率間ノ諸率ヲ合シテ、幾何中率ト曰フ、

第三百五十九章　幾何級数ノ終率ヲ求ムルノ法アリ、

設如ハaヲ以テ始率ト為シ、rヲ以テ準則ト為シ、lヲ以テ終率ト為シ、nヲ以テ率数ト為ス、然レハ則チ其級数ハ下ノ如シ、

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots l$$

右級數ニ由テ之ヲ觀レハ、各率ニ於テrノ自乘標ハ、其前ノ率數ニ同シ、因テ左式ヲ得、

$$l=ar^{n-1}\cdots(甲)$$

第三百六十章　幾何級數諸率ノ總計ヲ見ルノ法アリ、

設如ハSヲ以テ總計ト為シ、上章ニ說ク所ニ由テ式ヲ得ルヿ左ノ如シ、

$$S=a+ar+ar^2+ar^3\cdots+ar^{n-1}\cdots\cdots(壹)$$

$$rS=\quad ar+ar^2+ar^3\cdots+ar^{n-1}+ar^n\cdots(貳)$$

貳ヨリ壹ヲ減ス、但シ$ar^n=rl$タルヿヲ記憶ス可シ、

$$rS-S=ar^n-a\cdots(参)$$

$$rS-S=rl-a\cdots(肆)$$

$$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\cdots(乙)$$

$$S=\frac{rl-a}{r-1}\cdots(乙')$$

是ニ由テSノ二價ヲ得ルヿ左ノ如シ、

第三百六十一章　遞減幾何級數ノ率數無究ナナル者ノ總計ヲ求ムルノ法アリ、

上章乙式ニ於テ分母子ノ正負ヲ變更シテ、次式ヲ作ル可シ、

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

此ニ於テハ、rヲ一箇ヨリモ小ナリトス、而シテnノ愈大ナレハ則チr^nハ愈小ナリ、n遂ニ其大ヲ極ムレハ、則チr^nハ極小至微ニシテ、感應ナキ者、即チ零ニ至ル可シ、若シ是ニ至テ尚ホ無究ナルモ、之ヲ一箇ノ大ニ比スレハ、則チ之ヲ廢棄シテ可ナリ、是ニ由テ無究級數ノ法式ヲ得ルヿ左ノ如シ、

$$S=\frac{a}{1-r}\cdots(丙)$$

第三百六十二章　已知二數ノ中間ニ、幾何中率若干率ヲ挿入スルノ法アリ、

設如ハn'ヲ以テ、挿入ス可キ中率ノ數ト爲セハ、因テ生スル所ノ總率數ハ、$n'+2$トナル可シ、然レハ則チ $n=n'+2$ ナルヲ以テ、之ヲ甲式中ニ代用シテ左式

ヲ得、

$$l=ar^{n'+2}$$

是ニ由テ

$$r=\sqrt[n+1]{\frac{l}{a}}\cdots(丁)$$

既ニ準則ヲ知レハ、中率ハ容易ニ之ヲ求メ得ヘシ、

第三百六十三章　幾何級數ノ諸率ハ、互ニ同準則ナルカ故ニ、各率互ニ連續比例式ヲ成ス可シ（第三百二十七章）、是ニ由テ左則ヲ得、

第一則　三率若シ幾何級數タル時ハ、兩外率ノ積ハ中率ノ積ニ同シ、

第二則　四率若シ幾何級數タル時ハ、兩中率ノ積ハ、兩外率ニ同シ、

應用式

第三百六十四章　左ノ二式ハ、a r l n S ノ五數ヲ含メリ、已ニ其三ヲ知レハ、餘ノ二ハ之ヲ推算スルヿヲ得ヘシ、

$$l=ar^{n-1}$$

$$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

蓋シ已知三數ヲ以テ式中ニ代用スレハ、乃チ常ニ未知二數ノ二式ヲ得ヘシ、

右普通ノ例式ハ、又別レテ十例二十式ト為ル、

恰モ數學級數ニ於ケルカ如シ、然リ而シテ幾何級數ニ在テハ、諸式悉ク一次、若シクハ二次方程式ヲ以テ、之ヲ解クヿ能ハス、其條件左ノ如シ、

第一條　nハ兩式ニ於テ、共ニ自乗標タルノミナルカ故ニ、通常方程式ヲ解クノ法ヲ以テ、其價格ヲ見ルヿ能ハス、其術タルヤ、必ス對數ノ性質ニ關スルヲ以テ之ヲ、對數ノ條下ニ讓ル可シ、

第二條　rハ兩式ニ於テ、共ニ自乗標ヲ附スルヲ以テ、其價格ヲ得ント欲スレハ、必ス$n-1$乗方根、或ハn乗方根ヲ開カサル可カラス、然リト雖氏

若シn大數ニ非サレハ、一般ノ着眼、或ハ試驗ヲ以テ容易ニ之ヲ見ルヿヲ得ヘシ、

第三條　a l Sノ價格ハ、數學級數ニ於ケルカ如ク、一次方程式ヲ以テ、之ヲ見ルヿヲ得ヘシ、

第一　設如ハ、幾何級數アリ、始率三ニシテ、準則二ナリト云フ、第十二率及ヒ總計ヲ問フ、

術

$a=3\quad r=2\quad n=12$

甲式ニ由リ、

$$l=3\times2^{11}=3\times2048=6144 \text{ 終率}$$

乙式ニ由リ、

$$S=\frac{3(2^{12}-1)}{2-1}=3\times4095=1228 \text{ 總計}$$

第二　幾何級數アリ、總計一千八百二十、率數六ニシテ、準則三ナリト云フ、始率及ヒ終率ヲ問フ、

術

$r=3 \quad n=6 \quad S=1820$

乙式ニ由リ、

$$1820=\frac{a(3^6-1)}{3-1}=364a$$

$a=5$ 始率

甲式ニ由リ、

$l=5\times3^5=1215$ 終率

第三　二數アリ、六、及ヒ四百八十六ナリ、兩數間ニ插入ス可キ幾何中率三率ヲ求ム、

術

丁式ニ由リ、

$$r=\sqrt[4]{\frac{486}{6}}=\sqrt[4]{81}=3$$

是ニ由テ下ノ級數ヲ得、

$$6,\ \underbrace{18,\ 54,\ 162}_{答},\ 486.$$

第四　無究級數、六、二、三分二、九分二、等ノ總計ヲ問フ、

術

$a=6 \quad r=\frac{1}{3}$

丙式ニ由リ、

$$S=\frac{6}{1-\frac{1}{3}}=9$$ 答

第五　無究小數 $.454545\cdots\cdots$ ノ眞價ヲ求ム、

問題ノ小數ハ循環小數ナリ、之ヲ記スルノ別法アリ、左ノ如シ、

$$\frac{45}{100}+\frac{45}{10000}+\frac{45}{1000000}+\cdots$$

此ノ如キ數ニ於テハ、循環數ニ其地位ノ價格ヲ存シテ、以テ幾何級數ノ始率ト為シ、其準則ハ則チ、$\frac{1}{10}$、或ハ其幾次乘方ナリ、此問題ニ於テハ、即チ左ノ如シ、

術

$$a=\frac{45}{100}\qquad r=\frac{1}{100}$$

$$S=\frac{45}{100}\div\left(1-\frac{1}{100}\right)$$

$$=\frac{45}{100}\times\frac{100}{99}=\frac{5}{11}$$ 答

第六　無究級數 $1-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^3}{a^3}+\cdots\cdots$ ノ價格ヲ求ム、

術

$a=1 \quad r=-\frac{x}{a}$

$S=\frac{1}{1+\frac{x}{a}}=\frac{a}{a+x}$ 答

設問

第一　級數アリ、一、二、四、八、等ナリ、此級數九率ノ總計ヲ問フ、

第二　級數アリ、二、六、十八、五十四等ナリ、此級數ノ第八率ヲ問フ、

第三　級數アリ、1、$\frac{2}{3}$、$\frac{4}{9}$、$\frac{8}{27}$等ナリ、此級數十率ノ總計ヲ問フ、

第四　二數アリ、二十四ト一百九十二ナリ、兩數間ニ挿入ス可キ幾何中率、二率ヲ求ム、

第五　二數アリ、三ト七百六十八ナリ、兩數間ニ挿入ス可キ幾何中率、七率ヲ問フ、

下ノ無究級數ノ眞價ヲ問フ、

第六

$1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\cdots$

第七

$\frac{5}{3}+1+\frac{3}{5}+\frac{9}{25}+\cdots$

第八

$5+\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+\frac{5}{27}+\cdots$

下ノ無究小數ノ眞價ヲ求ム、

第九	$.323232\cdots$
第十	$.212121\cdots$

左ノ無究級數ノ眞價ヲ問フ、

第十一	$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cdots\cdots$
第十二	$\frac{1}{5}-\frac{1}{25}+\frac{1}{135}-\frac{1}{625}+\cdots\cdots$
第十三	$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\cdots\cdots$
第十四	$\frac{1}{a}-\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^4}{a^5}-\frac{x^6}{a^7}+\cdots\cdots$

第十五　幾何級數アリ總計一千七百八十五、準則ニニシテ、率數八ナリ、因テ始率ヲ問フ、

第十六　幾何級數アリ、總計七千八百十二、準則五ニシテ、率數六ナリ、因テ終率ヲ問フ、

第十七　幾何級數アリ、始率五、終率一千二百十五ニシテ、率數六ナリ、因テ準則ヲ問フ、

第十八　或人十戸ノ長屋ヲ買ヘリ、其第一戸ハ價金一圓ニシテ、第二戸ハ價金二圓、第三戸ハ價金四圓、此ノ如ク價ヲ倍スト云フ、此長屋ノ價金幾許ナルヤ、

幾何級數例題直ニ法式ニ適應ス可カラサル者

第三百六十五章、幾何級數ノ諸率ヲ記スルノ通法左ノ如シ、

$$x,\ xy,\ xy^2,\ xy^3,\ \cdots$$

然リ而シテ、例題ヲ解クニ方テハ、左ノ記法ヲ以テ便ト為ス、

第一　率數若シ奇數ナル時ハ、左ノ如ク級數ヲ記ス可シ、

三率

$$x^2,\ xy,\ y^2$$

五率

$$\frac{x^3}{y},\ x^2,\ xy,\ y^2,\ \frac{y^3}{x}$$

第二　率數若シ偶數ナル時ハ、級數左ノ如シ、

四率

$$\frac{x^2}{y},\ x,\ y,\ \frac{y^2}{x}$$

六率

$$\frac{x^3}{y^2},\ \frac{x^2}{y},\ x,\ y,\ \frac{y}{x},\ \frac{y^3}{x^2}$$

又三率ハ左ノ如ク、之ヲ記スルヿヲ得ヘシ、

$$x,\ \sqrt{xy},\ y.$$

設問

第一　幾何級數三率アリ、其和ハ二十六ニシテ、其平方ノ和ハ三百六十四ナリト云フ、三數各幾許ナルヤ、

三數ヲx、$\sqrt{xy}$、yト為シテ左式ヲ得ヘシ、

術

$$x+\sqrt{xy}+y=26=a\cdots(\text{壹})$$

$$x^2+xy+y^2=364=b\cdots(\text{貳})$$

壹ノ$\sqrt{xy}$ヲ移シ、式ヲ自乘シテ之ヲ約ス、

$$x^2+xy+y^2=a^2-2a\sqrt{xy}\cdots(\text{参})$$

貳参兩式ニ由リ、

$$a^2-2a\sqrt{xy}=b$$

$$\sqrt{xy}=\frac{a^2-b}{2a}=6$$

壹貳兩式ニ由リ、

$$x=2$$

$$y=18$$

是ニ由テ

2,　6,　18.　答

第二　幾何級數四率アリ、其和八十五即チaニシテ、其平方ノ和ハ八十五即チbナリト云フ、四數各幾許ナルヤ、

率數偶數ナルニ適當ノ記法ヲ以テ、左式ヲ得、

$$\frac{x^2}{y}+x+y+\frac{y^2}{x}=a\cdots\cdots(壹)$$

$$\frac{x^4}{y^2}+x^2+y^2+\frac{y^4}{x^2}=b\cdots\cdots(貳)$$

假ニ$x+y$ヲsト為シ、xyヲpト為ス時ハ、第三百〇一章ニ由テ次式ヲ得ヘシ、

$$x^2+y^2=s^2-2p$$

$$x^3+y^3=s^3-3sp$$

$x+y$及ヒx^2+y^2ノ數價ヲ壹貳兩式ニ代用ス、

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=a-s\cdots(参)$$

$$\frac{x^4}{y^2}+\frac{y^4}{x^2}=b-s^2+2p\ (肆)$$

参ヲ自乗シテ$2xy$即チ$2p$ヲ移ス、

$$\frac{x^4}{y^2}+\frac{y^2}{x^4}=(a-s)^2-2p\cdot(伍)$$

肆伍兩式ニ由リ、

$$(a-s)^2-2p=b-s^2+2p$$

即チ

$$a^2-2as+2s^2-4p=b\cdot(陸)$$

参ノ分數ヲ省キ、$xy=p$ヲ後項ニ置ク

$$x^3+y^3=ap-ps$$

即チ

$$s^3 - 3sp = ap - ps$$

$$p = \frac{s^3}{a+2s} \quad \cdots\cdots(柒)$$

p ノ此數價ヲ陸ニ代用シテ之ヲ約ス、

$$a^3 - 2as^2 = ab + 2bs$$

即チ

$$as^2 + bs = \frac{a}{2}(a^2 - b)$$

a b ノ眞數ヲ復ス、

$$15s^2 + 85s = 70 \times 15$$

$$s = 6$$

a s ノ數價ヲ七ニ代用ス、

$$p = 8$$

故ニ

$$x + y = 6 \qquad xy = 8$$

$$x = 2 \qquad y = 4$$

是ニ由テ四數ヲ得、

1, 2, 4, 3. 答

第三　幾何級數三率アリ、其和ハ二十一ニシテ、平方ノ和ハ一百八十九ナリ、三率各幾許ナルヤ、

第四　數二百二十アリ、分テ幾何級數三率ト為シ、其終率ヲシテ始率ヨリモ九十多カラシメント欲ス、三率各幾許ナルヤ、

第五　幾何級數四率アリ、其和ハ三十ナリ、中率

ノ和ヲ以テ終率ヲ除スレハ、商一箇三分一ヲ得ルト云フ、四數各〻幾許ナルヤ、

第六　幾何級數四率アリ、其第一第三率ノ和ハ一百四十八ニシテ、第二第四ノ和ハ八百八十八ナリト云フ、因テ四數ヲ問フ、

第七　三率ノ幾何級數ニシテ、其和ハ十四トナリ、其平方ノ和ハ八十四トナル可キ者ヲ求ム、

第八　幾何級數四率アリ、其第二率ハ第四率ヨリモ少キコ二十四ナリ、其兩外率ノ和ト兩中率ノ和トノ比準ハ七ト三トノ如シト云フ、四數各〻幾許ナルヤ、

第九　幾何級數三率アリ、其第一第二率ノ和ハ二十ニシテ、第二第三率ノ差ハ三十ナリト云フ、因テ四數ヲ問フ、

第十　幾何級數三率相乘ノ積ハ、二百十六ニシテ兩外率平方ノ和ハ、三百二十八ナリト云フ、三數各〻幾許ナルヤ、

第十一　幾何級數三率ノ和ハ十三ニシテ兩外率ノ和ニ中率ヲ乘スレハ、其積三十ナリト云フ、因テ各數ヲ問フ、

第十二　幾何級數三率相乘ノ積ハ六十四ニシテ其立方ノ和ハ五百八十四ナリト云フ各率幾許ナルヤ

第十三　幾何級數三率相乘ノ積ハ一ナリ其第一第二率ノ差ト第二第三率ノ差トノ準則ハ五ト一トノ如シト云フ因テ三率ヲ問フ

第十四　金一百二十圓アリ之ヲ四人ニ配分スルニ各人ノ所得分ハ數學級數ヲ成セリ然リト雖モ若シ第二第三人ノ所得分各金十二圓ヲ減シ第四人ニハ金二十四圓ヲ增ス時ハ其配分ハ幾何級數ト爲ル可シト云フ因テ四人ノ配分ヲ問フ

第十五　幾何級數三率アリ其和ハ三十一ニシテ第一第三率ノ和ハ二十六ナリト云フ因テ各數ヲ問フ

第十六　幾何級數六率ノ和ハ一百八十九ナリ第二第五率ノ和ハ五十四ナリト云フ六數各幾許ナルヤ

第十七　幾何級數六率ノ和ハ一百八十九ニシテ兩中率ノ和ハ三十六ナリト云フ因テ六數ヲ

問フ、

第十八　或人金p圓ヲ借リ、之ヲn年賦ニ返サントト約シ、利息ハ元金未濟ノ分、一ヶ年金一圓ニ付r錢ト定メタリト云フ、毎年金幾圓ヲ返濟スヘキヤ、

一致式

第三百六十六章　一致式トハ兩項同一ノ代數ヲ記シタル者、或ハ其一項僅ニ形ヲ變シタル者ヲ謂フ、凡ソ一致式ハ本來兩項同一ナリト雖圧、毎ニ變化ス可キ者ナルカ故ニ、此一項形ヲ異ニスルト圧、之ヲ變シテ、直ニ彼一項ト、同一ナラシメ、或ハ兩項ヲ變シテ更ニ新形ヲ成サシムルヿヲ得ル者ナリ左式ノ如キハ、即チ一致式ト為ス、

$$ax+b=ax+b$$

$$x^2+(a-b)x-ab=(x+a)(x-b)$$

$$1-x+x^2-\frac{x^3}{1+x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2(1+x)}$$

右三式中第一式ハ兩項全ク同一ナル者ナリ、第二式ハ兩項形同シカラスト雖𪜈、其後項ニ乘術ヲ施セハ、乃チ前項ノ形ヲ為サシム可キ者ナリ、第三式ニ在テハ兩項共ニ同一ノ分數 $\frac{1}{1+x}$ ト為ス可キ者ナリ、

第三百六十七章　一致式ニ自ラ別格ノ性質アリ、方程式ノ論説ニ必用ニシテ、殊ニ此以下級數ヲ論スル、ニ缺ク可カラサル者ナリ、今之ヲ説明セシカ為ニ、左ノ一例ヲ考定ス可シ、

假令ハ ax^n ノ如ク、x ヲ保テル數ニシテ x ヲ變化スヘキ者ト為シ、自乘標ノ模様ニ由テ、若シ $x=0$ トナル時ハ、其變化如何、

第一　n 正數ニシテ、$x=0$ ナル時ハ、左ノ如シ、

$$ax^n = a\,0^n = 0$$

第二　n 負數ニシテ、$x=0$ ナル時ハ、左ノ如シ、

$$ax^{-n} = \frac{a}{x^n} = \frac{a}{0} = \infty$$

第三 n零ニシテ$x=0$ナル時ハ、左ノ如シ、

$$ax^n=a\cdot0^0=a\cdot1=a$$

第三百六十八章 今茲ニ一致式ノ定則ヲ説明セントス、

定則第一 一致式ハ未知數ヲ以テ何ノ數ト為ストモ皆以テ式ニ合ス可シ、

此定則ノ正確ナルハ一致式ノ本義ニ於テ直ニ必然ナルヲ知ル可シ、蓋シ代數ノ記號ハ、何ノ數量ニ代用スルヲ問ハス、其形狀ハ千變萬化スト雖トモ、未タ嘗テ各字ノ定價ヲ變セサルカ故ニ、方程式ノ兩項同形ナル時、或ハ同形ニ變スヘキ者ニタル時ハ、未知數ニ何ノ數價ヲ附與スルトモ、常ニ相同シカラサルヲ得ス、

此理ヲ辨明センカ為ニ、左ニ一致式ヲ掲ク、

左ノ式ニ於テハ、兩項果シテ一致スルヤ否ヤ、一目シテ之ヲ知ル可カラサルカ如シト雖トモ、xニ代ルニ一、二、三、四、五、等ノ如キ諸數ヲ附與シ

$$\left\{(x-3)^2+1+(x-2)^2\right\}^2=2\left\{(x-3)^4+1+(x-2)^4\right\}$$

テ、其所得左ノ如ク、皆以テ式ニ合ス可シ、

$$\left\{4+1+1\right\}^2=2\left\{16+1+1\right\}$$

$$\left\{1+1+0\right\}^2=2\left\{1+1+0\right\}$$

$$\left\{0+1+1\right\}^2=2\left\{0+1+1\right\}$$

$$\left\{1+1+4\right\}^2=2\left\{1+1+16\right\}$$

$$\left\{4+1+9\right\}^2=2\left\{16+1+81\right\}$$

等、

定則第二（定則第一ノ又）、未知數ヲ以テ何ノ數ト為スモ、皆以テ式ニ合ス可キ方程式ハ一致式ナリ、

爰ニ方程式アリ、其分數ヲ省キ、兩項未知數ノ遞加自乘標ニ從テ、位次ヲ立ツル時ハ、左ノ如ク其式ヲ記スルヿヲ得ヘシ、

左ノ方程式ニ於テ、自乘標 a b c 及ヒ a' b' c' ヲ假定スルヿ左ノ如シ、

$$a<b<c\ldots\ldots$$

$$a'<b'<c'\ldots\ldots$$

$$Ax^{a}+Bx^{b}+Cx^{c}+\cdots=A'x^{a'}+B'x^{b'}+C'x^{c'}+\cdots \quad (壹)$$

又倍數ABC、又ヒA'B'C'ハ皆零ヨリモ大ナル定數ニシテ、xニ關セスト為シ、率數ハ定限アル者ト為シ、或ハ無究ト為ス可シ、

今x^{a}ヲ以テ兩項ヲ除スレハ、左ノ如シ、

$$A+Bx^{b}+Cx^{c}+\cdots=A'x^{a'-a}+B'x^{b'-a}+Cx^{c'-a}+\cdots \quad (貳)$$

此ニ於テ$a<b<c\cdots$ナルカ故ニ此式ノ前項ニ於テハ、自乘標$b-a$ $c-a$等ハ皆正數ナリ、

此式ニ於テ、xニ何ノ數ヲ附スルモ、皆以テ式ニ合ス可シト假定スル時ハ、式ノ變化如何ニ拘ラスxノ數價ヲ論セスシテ、皆式ニ合ス可シ、仍テ$x=0$ト為ス時ハ、貳式ノ前項ナル第二率以下皆零ト為ス可シ、(第三百六十七章第一)、是ニ由テ復左式ヲ得、

$$A=A'x^{a'-a}+B'x^{b'-a}+C'x^{c'-a}+\cdots \quad (参)$$

此ニ於テ $a'<b'<c'\cdots$ ナルカ故ニ、

$$(a'-a)<(b'-a)<(c'-a)<\cdots$$

ナルハ、必定ナリ、仍テ参式ノ第一自乘標 $a'-a$ ハ最小ナリ、然リ而シテ、左ノ二條ヲ知ル可シ、

第一條　自乘標 $a'-a$ ハ、必ス正數ナルヿ能ハス、何トナレハ、x 既ニ零ナレハ、此自乘標アル一率ハ、全ク零ナル可ク、(第三百六十七章第二)、又AモOナラサルヲ得ス、若シ然レハ則チ、定則ニ反スル者タルヲ免カレス、

第二條　自乘標 $a'-a$ ハ必ス負數ナルヿ能ハス、何トナレハ、x 既ニ零ナル時ハ、此自乘標アル一率ハ、變シテ無究トナル可ク、(第三百六十七章第二)、又Aモ∞ナラサルヲ得ス、是レ亦定則ニ反スル者トス、是ヲ以テ $a'-a$ ハ既ニ正數ナルヿ能ハス、亦負數ナルヿ能ハス、0ニアラスシテ、又何トカ為ラン、因テ下ノ如キヲ知ル可シ、

$$a'-a=0$$

即チ

$$a'=a$$

又参式中ナル他ノ自乗標 $b'-a$ $c'-a$ 等ハ、代數學ニ於テ各、零ヨリ大ナルヲ以テ正數ナリ、故ニxモシ0ナル時ハ、参式ノ後項第二率ヨリ以下皆消失セサル可カラス（第三百六十七章第二）、仍テ左式ヲ得ヘシ、

$$A=A'x^0=A'$$

今AトA'トハ、xニ關セサルヲ以テ、xノ價ヲ論セスシテ、次式ヲ得、

$$Ax^{a}=A'x^{a'}$$

是ヲ以テ壹式ノ此二率ヲ廢棄スルコヲ得ヘシ、然レハ則チ次式ヲ得、

$$Bx^{b}+Cx^{c}+\cdots=B'x^{b'}+C'x^{c'}+\cdots$$

此式モ亦、上ト同一理ナルヲ以テ、左式ノ如キヲ知ル可シ、

$$b=b'$$

$$B=B'$$

$$c=c'$$

$$C=C'$$

餘之ニ準ス、

是故ニ壹式ハ、一致式ニシテ兩項同形ナリ、即チ問題ノ方程式ハ、一致式ニシテ、定則ノ正確ナルヲ證ス可シ、

右辨明ニ由レハ、a b c 等ノ自乗標ニ一二ノ負

數アル氏亦以テ上ノ例ニ適用ス可ク或ハ若シ$a=0$ナルモ兩項各一ノ隨意數ヲ見ルノミ

定則第三　未知數ハ何等ノ數價ヲ附與スル氏每ニ式ニ合シ且ツ其未知數兩項ニ於テ同乘方ナル方程式ニ在テハ兩項對當ノ未知數ノ倍數モ亦互ニ相同シ

假令ハ其式左ノ如シ

但シ率數ニハ定限アル氏或ハ無究ナル氏更ニ之ニ關セス

$$Ax^{a}+Bx^{b}+Cx^{c}+\cdots=A'x^{a'}+B'x^{b'}+C'x^{c'}+$$

今此式ノxニ何等ノ數價ヲ附與スル氏每ニ式ニ合スルヿヲ得レハ則チ上ノ說明ニ從テ當ニ兩項ナルxノ自乘標相同シキノミナラス亦其倍數モ必ス互ニ相同シカル可シ故ニ其倍數ハ則チ左ノ如シ

$$A=A'$$

$$B=B'$$

$$C=C'$$

凡ソ此ノ如キ式ハ、一致式ナルヿ論ヲ俟タス、又ABC及ヒA′B′C′等ノ如キ、兩項ノ倍數ハ、必スシモ同形ナルヲ要セス、

定則第四　未知數ニ何等ノ數價ヲ附與スル𪜈、毎ニ式ニ合シ而シテ其一項零ナル方程式ニ在テハ自乘標相同シカラサル各未知數ノ倍數ハ必ス各零ニ同シ、

假令ハ左ノ如ク式ヲ作リ、xノ遞加自乘標ニ從テ序次ヲ立ツ可シ、

$$Ax^a+Bx^b+Cx^c+Dx^d+\cdots=0 \quad (壹)$$

倍數ABCD等ハ、xニ關セサル者ト為スカ故ニ、xノ諸價ハ皆相同シ、

今x^aヲ以テ此式ノ各率ヲ除スレハ、則チ次式ノ如シ、

$$A+Bx^{b-a}+Cx^{c-a}+Dx^{d-a}+\cdots=0 \quad (貳)$$

貳式ニ於テ$x=0$トスル時ハ、自乘標$b-a$ $c-a$ $d-a$等ハ皆正數ナルカ故ニ第二率以下皆零ト為ル可シ、(第三百六十七章)、因テ左式ヲ得、

$A=0$

故ニ壹式ノAx^aヲ廢棄シテ後ニ、x^bヲ以テ之ヲ除スレハ、則チ左式ヲ得、

$$B+Cx^{c-a}+Dx^{d-a}+\cdots\cdots=0 \quad (參)$$

此式ニ於テ$x=0$トスル時ハ、則チ次式ヲ得

$$B=0$$

右同法ヲ以テ、自餘ノ倍數皆零ト爲ルヲ證ス可シ、

是ニ由テ之ヲ觀レハ、倍數A、B、C、D等ハ、正、負、兩數ハ、復數ニ代ル者ニシテ、其正負相半スルヲ以テ零ト爲ル者ナリ、

自乘分數分離

第三百六十九章　以上說ク所ノ一致式ノ性質ニ由テ、分數ヲ分離シテ二三ノ分數ト爲スノ方畧ヲ得ヘシ、而シテ分部ノ分母ハ必ス本部ノ分母ヨリモ單純ナルヘク、且ツ本部ノ分數ハ毎ニ各分部諸分數ノ和ニ同シキカ故ニ本部ノ分母ハ必ス各分部諸分母ノ公除數ナル可シ、

設如ハ左ノ分數ヲ分離ス可シ、

第一 $\dfrac{8x-31}{x^2-7x+10}$ 分母ニ着目シテ先ツ左式ヲ作ル可シ

$$x^2-7x+10=(x-5)(x-2)$$

是ニ由テ、次式ヲ作ル、

$$\frac{8x-31}{(x-5)(x-2)}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-2}\cdots(壹)$$

此式ノ前項ハ、唯、後項両部、分數ノ和タルノミナルヲ以テ、固ヨリ一致式ナリ、今此分數ヲ省キ、諸率ヲ合シテ次式ヲ得、

$$8x-31=(A+B)x-(2A+5B)\cdots(弐)$$

前項ノ31ト、後項ノ$(2A+5B)$トハ、之ヲx^0ノ倍數ト見做スヿヲ得ヘシ、又第三百六十八章定則第三ニ從ヘハ、xノ同乗方ノ倍數ハ、必ス相同シカル可シ、因テ下式ヲ得、

$$A+B=8\cdots\cdots(参)$$

$$2A+5B=31\cdots\cdots(肆)$$

参肆両式ニ由テ直ニ次式ヲ得、

$$A=3$$

$$B=5$$

之

ヲ壹式ニ適用シテ次式ヲ得、

$$\frac{8x-31}{x^2-7x+10}=\frac{3}{x-5}+\frac{5}{x-2}$$

答

是ニ由テ之ヲ觀レハ、參肆兩式ハ即チ要件式ニシテ、xノ諸價因テ以テ壹式ニ合スルヿヲ得ル者ナリ、

第二 $\dfrac{7x^2+x}{(x+1)(2x-1)}$

此分數ヲ分離スルニ、若シ成ル可クハ、則チ先ツ次式ノ如ク假定ス可シ、

$$\frac{7x^2+x}{(x+1)(2x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-1}\cdots(\text{壹})$$

分數ヲ省ク、

$$7x^2+x=(2A+B)x+(B-A)$$

諸率ヲ前項ニ移ス、

$$7x^2+(1-2A-B)x+(A-B)=0\cdots(\text{貳})$$

若シ此式ヲ以テ成立ツ可キ者トスレハ、則チ必ス一致式ナリ、而シテ一項零ナルメ故ニ、xノ各次乗方ノ倍數ハ、皆各零ナラサルヲ得ス、(第三百

六十八章定則第四ニ因テ次式ヲ得、

$$7=0$$

即チ隨意式ナリ、是ヲ以テ、分子xニ關セサレハ、分離スルヿ能ハサルヲ知ル可シ、

或ハ又、次ノ如ク假定ス可シ、

$$\frac{7x^2+x}{(x+1)(2x-1)}=\frac{Ax}{x+1}+\frac{Bx}{2x-1}\cdots(壹)$$

分數ヲ省キ、各率ヲ合ス、

$$7x^2+x=(2A+B)x^2+(B-A)x\cdots(貳)$$

同乗方xノ倍數ヲ以テ、方程式ヲ作ル、

$$2A+B=7$$

$$B-A=1$$

$$A=2$$

$$B=3$$

此數價ヲ壹式ニ代用シテ、次式ヲ得、

$$\frac{7x^2+x}{(x+1)(2x-1)}=\frac{2x}{x+1}+\frac{3x}{2x-1}$$

答

是ニ由テ之ヲ觀レハ、分數ヲ分離セント欲シテ、若シ成立ツ可カラサルノ式ヲ作レハ、輙チ要件式ニ於テ隨意式ヲ得ルヲ以テ、其成立ツ可カラサルヲ知ル可シ、

原註ニ曰ク、分母ニ三因子若シクハ數因子アル者ハ、之ヲ分離シテ三數分部ノ分數ト爲ス

可シ、又其三數分子ヲ確定スルニハ、必ス之ニ應スル所ノ要件式アル可シ、

設問

左ノ諸分數ヲ分離ス可シ、

第一

$$\frac{7x-24}{x^2-9x+14}$$

第二

$$\frac{20x-2}{2x^2+3x-20}$$

第三

$$\frac{6x^2-22x+18}{(x+1)(x^2-5x+6)}$$

第四

$$\frac{x-2}{x^3-x}$$

第五

$$\frac{10}{x^4-13x^2+36}$$

奇零式

第三百七十章　既ニ初巻(第八十九章第四例)ニ於テ、x^m-y^mハm若シ正數ニシテ、整數ナル時ハ、$x-y$ヲ以テ之ヲ整除ス可キヲ論シタリ、其商ノ形ハ、則

ナ左ノ如シ、

$$\frac{x^m-y^m}{x-y}=x^{m-1}+x^{m-2}y+x^{m-3}y^2+x^{m-4}y^3+\cdots+y^{m-1}$$

此商ノ率數ハ必スmニ同シ、今假ニ$x=y$トスレハ、則チ各率x^{m-1}トナリ、而シテ率數mナルヲ以テ左ノ法式ヲ得、

$$\left(\frac{x^m-y^m}{x-y}\right)_{y=x}=mx^{m-1}\cdots(甲)$$

此ニ小書スル所ノ附式$y=x$ハ、甲式ノ両項適合ナルノ要件ヲ示ス者ナリ、

第三百七十一章　今將ニ上章ノ法式ハmノ數價ニ拘ラス、常ニ正確ナルヲ示サントス、茲ニ二例アリ、

第一　mハ正數ニシテ分數ナル時ノ例、

假令ハ　$m=\frac{r}{s}$　トスレハ

$$x^m-y^m=x^{\frac{r}{s}}-y^{\frac{r}{s}}$$

又分數自乗標ヲ避ケンカ為ニ補助數ヲ用フルヿ左ノ如シ、

$$x^{\frac{1}{s}}=z$$
$$x^{\frac{r}{s}}=z^r$$
$$x=z^s$$

又

$$y^{\frac{1}{s}}=u$$
$$y^{\frac{r}{s}}=u^r$$
$$y=u^s$$

之ヲ代用シテ左式ヲ得、

$$\frac{x^{\frac{r}{s}}-y^{\frac{r}{s}}}{x-y}=\frac{z^r-u^r}{z^s-u^s}=\frac{\frac{z^r-u^r}{z-u}}{\frac{z^s-u^s}{z-u}}\cdots\cdots(壹)$$

令 $x=y$ トスルカ故ニ $z=u$ ナリ、而シテ r 及ヒ s ハ正數ニシテ、整數ナレハ、壹式ニ由テ下式ヲ得、

$$\left\{\frac{x^{\frac{r}{s}}-y^{\frac{r}{s}}}{x-y}\right\}_{y=x}=\frac{\left(\frac{z^r-u^r}{z-u}\right)_{u=z}}{\left(\frac{z^s-u^s}{z-u}\right)_{u=z}}=\frac{rz^{r-1}}{sz^{s-1}}=\frac{r}{s}z^{r-s}=\frac{r}{s}x^{\frac{r}{s}-1}$$

是故ニ上ノ法式ハ、自乗標正數ノ分數ナル時モ、亦正確ナリトス、

第二 m 負數ニシテ整數或ハ分數ナル時ノ例、

假令ハ x 及ヒ y ノ自乗標ヲ $-m$ ト為シテ、下式ヲ得、

$$x^{-m}-y^{-m}=-x^{-m}y^{-m}(x^m-y^m)$$

是ニ由テ

$$\frac{x^{-m}-y^{-m}}{x-y}=-x^{-m}y^{-m}\left(\frac{x^m-y^m}{x-y}\right)\cdots(壹)$$

令 $x=y$ ト為セハ、m ハ整數分數ヲ論セス、上ニ說ク所ノ理ニ由テ左ノ如シ、

$$-x^{-m}y^{-m}=-x^{-2m}$$

又

$$\frac{x^m-y^m}{x-y}=mx^{m-1}$$

是ニ由テ

$$\left(\frac{x^{-m}-y^{-m}}{x-y}\right)_{y=x}=(-x^{-2m})\times(mx^{m-1})$$

$$=-mx^{-m-1}$$

是故ニ上章ノ法式ハ普ク通シテ正確ナリトス、

雙率級數解

第三百七十二章　雙率級數解ハ自乗標ヲ附スル所ノ雙率ヲ解テ級數ト為スヲ以テ目的ト為ス、此解ヲ為スニ雙率法式ト名ツクル所ノ方程式ヲ以テス、

第三百七十三章　$(a+x)^n$ヲ開散シテ級數ト為ス可シ、但シnハ正負整分ヲ論セス各種ノ真數タル可シ、式ヲ作ルヿ次ノ如シ、

$$a+x=a\left(1+\frac{x}{a}\right)$$

$$(a+x)^n=a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$$

是ニ於テ先ツ$\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$ヲ開散シテ其所得ニ$a^n$ヲ乗スレハ則チ$(a+x)^n$ノ開

散ヲ得ヘシ、

今假リニ $z=\dfrac{x}{a}$ トスレハ、則チ $\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^n=(1+z)^n$ トナル可シ、仍テ又方程式ヲ作ルコ左ノ如シ、

$$(1+z)^n=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots\text{(壹)}$$

式中ABCD等ハzニ關セス、而シテ此等ノ倍數ノ價格ヲ求メ、zノ諸價ヲ悉ク壹式ニ合シテ、正確ナラシム可シ、若シ$z=0$トスレハ、壹式ニ由テ$A=1$ヲ得ヘシ、然レハ則チ、壹式ヲ變シテ、zノ諸價ヲ得ルコ左ノ如シ、

$$(1+z)^n=1+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots\text{(貳)}$$

又$z=u$トスレハ則チ次ノ如シ、

$$(1+u)^n=1+Bu+Cu^2+Du^3+Eu^4+\cdots\text{(參)}$$

貳ヨリ參ヲ減シ、$z-u$ヲ以テ其ノ所得ヲ除スレハ、則チ次式ヲ得ヘシ、

$$\frac{(1+z)^n-(1+u)^n}{z-u}=B+C\left(\frac{z^2-u^2}{z-u}\right)+D\left(\frac{z^3-u^3}{z-u}\right)+\cdots\text{(肆)}$$

又

$P=1+z$

$Q=1+u$

トスレハ、

$P-Q=z-u$

トナリ、肆式變シテ左ノ如

シ、

$$\frac{P^n-Q^n}{P-Q}=B+C\left(\frac{z^2-u^2}{z-u}\right)+\left(\frac{z^3-u^3}{z-u}\right)+\cdots\cdots\quad(伍)$$

今$z=u$ナレハ$P=Q$ナリ、仍テ奇零法式（第三百七十章）ニ由テ、次式ヲ得、

$$\left(\frac{P^n-Q^n}{P-Q}\right)_{P=Q}=nP^{n-1}=n(1+z)^{n-1}$$

又

$$\left(\frac{z^2-u^2}{z-u}\right)_{u=z}=2z$$

$$\left(\frac{z^3-u^3}{z-u}\right)_{u=z}=3z^2$$

$$\left(\frac{z^4-u^4}{z-u}\right)_{u=z}=4z^3$$

等ヲ得、

右數價ヲ伍式ニ代用スレハ、則チ左ノ如シ、

$$n(1+z)^{n-1}=B+2Cz+3Dz^2+4Ez^3+\cdots\cdots\quad(陸)$$

$(1+z)$ヲ以テ陸式ノ兩項ニ乘ス、

$$\begin{array}{l|l|l|l}
n(1+z)^n=B+2C & z+3D & z^2+4E & z^3+\cdots\cdots\quad(柒)\\
\quad\quad\quad\quad+B & +2C & +3D &
\end{array}$$

nヲ以テ貳式ノ兩項ニ乘ス、

$$n(1+z)^n=n+nBz+nCz^2+nDz^3+\cdots\cdots\quad(捌)$$

今柰扒兩式ノ後項ヲ比較シテ、方程式ヲ作ラハ、xニ何等ノ數價ヲ附スルトモ、皆式ニ合ス可キカ故ニ、即チ一致式ナリ、然レハ則チ同乘方ノ倍數ハ、柰扒兩式ニ於テ互ニ相同シ（第三百六十八章定則第三）、仍テ次式ヲ得、

$$B=n$$

$$2C+B=nB$$

$$C=B\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

$$3D+2C=nC$$

$$D=C\left(\frac{n-2}{3}\right)$$

$$4E+3D=nD$$

$$E=D\left(\frac{n-3}{4}\right)$$

等

是ニ由テ各倍數ノ價格左ノ如シ、

$$A=1$$

$$B=n$$

$$C=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$D=\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}$$

$$E=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4}$$

等、

此數價ヲ壹式ニ代用シテ左式ヲ得、

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}x^3 + \cdots \text{(甲)}$$

xノ本價即チ$\frac{x}{a}$ヲ回復シテ次式ヲ得、

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)^n = 1 + n\frac{x}{a} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{x^2}{a^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\cdot\frac{x^3}{a^3} + \cdots \text{(乙)}$$

乙式ノ兩項ニa^nヲ乘ス、

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}a^{n-3}x^3 + \cdots \text{(丙)}$$

丙式ハ即チ通常書記スル所ノ雙率法式ナリ然リ而シテ諸倍數、即チnニ關スル所ノ因子ニ至テハ、甲乙丙三式共ニ相同シ、故ニ實用ニ方テハ、開散ス可キ雙率ニ由リ、便宜ニ從テ、三式孰レヲ用フルモ皆可ナリ、

第三百七十四章　普通法式丙ニ於テ、$a+x$状ノ雙率乘方ノ開散ヲ觀レハ、自乘標ノ法則左ノ如シ、

第一則　各率主字ノ自乘標ハ級數トナリ雙率ハ自乘標ヲ以テ第一率ヨリ起リ以下毎率右方ニ至ルニ随ヒ一箇ヲ減ス、

第二則　各率第二字ハ自乘標ハ一箇ヲ以テ第二率ヨリ起リ以下毎率右方ニ至ルニ隨ヒ一箇ヲ增ス

倍數ノ法則左ノ如シ

第三則　第一率ノ倍數ハ一箇ニシテ第二率ノ倍數ハ求ムル所ノ自乘標ニ同シ

第四則　各率ノ倍數ニ其主字ノ自乘標ヲ乘シ第二字ノ自乘標ニ一箇ヲ加ヘタル者ヲ以テ之ヲ除スレハ則チ次率ノ倍數ヲ得ヘシ

第三百七十五章　開散式ノ第二率以下各率ノ最小因子ヲ取レハ則チ左ノ遞減級數ト爲ル可シ而シテ其等差ハ則チ一箇ナリ

$$n,\ (n-1),\ (n-2),\ (n-3),\ \cdots$$

今若シnヲ以テ正整數ト爲セハ分子ノ最小因子ハ第$n-2$率ニ至テ$n-n$即チ0トナル可キカ故ニ此率ハ則チ消失ス可シ然リト雖𪜈nハ若シ負數或ハ分數ナル時ハ$(n-1)$ $(n-2)$ $(n-3)$等ハ決シテ零ト爲ルヿ無ク開散式連續シテ無究ニ至ル可シ仍テ左則ヲ得

第一則　n若シ正整數ナル時ハ雙率開散式ハ

定限級數ニシテ率數$n+1$ナリ、

第二則　n若シ負數或ハ分數ナル時ハ雙率ノ開散式ハ無究級數ナリ、

應用雙率式

第三百七十六章　雙率法式左ノ如シ、

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot3}a^{n-3}x^3+\cdots\cdots(丙)$$

n若シ整數ニシテ正數ナル時ハ、此法式ハ乘方ヲ記スル者ニシテ、雙率ノ幾次自乘タルヲ示ス者ナリ、

n若シ分數ニシテ正數ナル時ハ、此法式ハ開方ノ記ニシテ、雙率ノ幾次方根タルヲ示ス者ナリ、

n若シ負數ナル時ハ、此法式ハ以テ雙率ノ乘方、若シクハ方根ノ一箇分子ヲ記スル者ナリ、

第三百七十七章　雙率法式ノ倍數ハ、全ク自乘標nニ關スル者ナルヲ以テ自由ニ倍數ヲ作ルヿヲ得ヘシ、其術ハ單ニ一箇ヲ以テ始ト爲シ、逐

次ニ n $\frac{n-1}{2}$ $\frac{n-2}{3}$ 等ヲ乘シタル者ナリ、

第一 $(a-x)^6$ ヲ開散シテ級數ト為ス可シ、

此題ニ於テハ、$n=6$ ナルカ故ニ、倍數左ノ如シ、

第一倍數	1	$=1$
第二	1×6	$=6$
第三	$6\times\frac{5}{2}$	$=15$
第四	$15\times\frac{4}{3}$	$=20$
第五	$20\times\frac{3}{4}$	$=15$
第六	$15\times\frac{2}{5}$	$=6$
第七	$6\times\frac{1}{6}$	$=1$

$-x$ ノ奇數乘方ハ負數ナルカ故ニ、各率字因ハ左ノ如シ、

$$a^6,\ -a^5x,\ +a^4x^2,\ -a^3x^3,\ +a^2x^4,\ -ax^5,\ +x^6$$

是ニ由テ、開散式ヲ得ルコト下ノ如シ、

$$(a-x)^6=a^6-6a^5x+15a^4x^2-20a^3x^3+15a^2x^4-6ax^5+x^6$$

答

第二 $(a+x)^{\frac{1}{2}}$ ヲ開散シテ級數ト為ス可シ、

此例ニ於テハ $n=\frac{1}{2}$ ナリ、倍數ハABCD等ヲ以テ之ヲ記スレハ、則チ左ノ如シ、

$$A \qquad\qquad = 1$$

$$B = A \times n \qquad = \frac{1}{2}$$

$$C = B \times \left(\frac{n-1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$$

$$D = C \times \left(\frac{n-2}{3}\right) = +\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}$$

$$E = D \times \left(\frac{n-3}{4}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}$$

等

各率ノ字因ハ、則チ左ノ如シ、

$$a^{\frac{1}{2}},\ a^{-\frac{1}{2}}x,\ a^{-\frac{3}{2}}x^2,\ a^{-\frac{5}{2}}x^3,\ a^{-\frac{7}{2}}x^4,\ a^{-\frac{9}{2}}x^5,\ \cdots$$

開散式

$$(a+x)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}x - \frac{1}{2\cdot 4}a^{-\frac{3}{2}}x^2 + \frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}a^{-\frac{5}{2}}x^3 - \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}a^{-\frac{7}{2}}x^4 + \cdots$$

後項ノ因子 $a^{\frac{1}{2}}$ ヲ分割ス、

$$(a+x)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}a^{-1}x - \frac{1}{2\cdot 4}a^{-2}x^2 + \frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}a^{-3}x^3 - \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}a^{-4}x^4 + \cdots\right)$$

或ハ負數自乘標ヲ省ク、

$$(a+x)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{2\cdot 4a^2} + \frac{3x^3}{2\cdot 4\cdot 6a^3} - \frac{3\cdot 5x^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8a^4} + \cdots\right)$$

此最後ノ所得ハ、雙率ノ形ヲ改メテ $a^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ ト為セハ、直ニ之ヲ得ヘシト雖モ、上ノ如ク術ヲ施シテ、形状ノ變化ニ注目スルモ、亦無用ニアラサル可シ、

第三　$\frac{1}{(a+x)^2}$ ヲ開散シテ級數ト為ス可シ、

此例ニ於テハ、先ツ左式ニ注意ス可シ、

$$\frac{1}{(a+x)^2}=(a+x)^{-2}=a^{-2}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-2}=\frac{1}{a^2}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-2}$$

此因子 $\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-2}$ ヲ開散シテ下式ヲ得、

$$\frac{1}{(a+x)^2}=\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{2x}{a}+\frac{3x^2}{a^2}-\frac{4x^3}{a^3}+\frac{5x^4}{a^4}-\cdots\right)$$

第四 $(a^3-x^2)^5$ ヲ開散シテ級數ト為ス可シ、

a^3 ノ五乗方ヨリ起シテ遞減自乗標ヲ作リ、x^2 ノ一乗方ヨリ起シテ遞加自乗標ヲ作レハ、各率ノ字因次ノ如シ、

$$a^{15},\ a^{12}x^2,\ a^9x^4,\ a^6x^6,\ a^3x^8,\ x^{10}.$$

是ニ由テ倍數ヲ附スレハ、則チ開散式ヲ得、

$$(a^3-x^2)^5=a^{15}-5a^{12}x^2+10a^9x^4-10a^6x^6+5a^3x^8-x^{10}$$

設問

左ノ雙率ヲ開散シテ、級數ト為サハ如何

第一 $(a-b)^5$	第六 $(1+ax)^5$	第十一 $(1-x)^{\frac{1}{3}}$
第二 $(1+c)^6$	第七 $(a^2-x^2)^6$	第十二 $(a+1)^{\frac{1}{4}}$
第三 $(x+y)^7$	第八 $(x^2-z^4)^5$	第十三 $(a+b)^{\frac{1}{3}}$
第四 $(a^2-1)^8$	第九 $(a^2x+dy^2)^6$	第十四 $\frac{1}{a-b}$
第五 $(a-c)^9$	第十 $(a-x)^{\frac{1}{2}}$	第十五 $\frac{a}{(1-x)^2}$

第十六	第廿一
$(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$	$(a+y)^{-4}$
第十七	第廿二
$(a-c^2)^{\frac{2}{3}}$	$\dfrac{r}{\sqrt[5]{1-r}}$
第十八	第廿三
$d(c^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt[15]{1-x^4}$
第十九	
$(1-a)^{-3}$	
第二十	
$(a^2-x^2)^{\frac{3}{4}}$	

第三百七十八章

代用法

假令ハ法式アリ左ノ如シ

$$(x+y)^n=$$

$$x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}x^{n-3}y^3+\cdots$$

此式ニ於テx及ヒyハ何等ノ數タルヲ論セサルカ故ニ倍數ヲ附スル所ノ雙率或ハ多率ノ若干衆方ヲ開散シタル者ト為スヿヲ得ヘシ仍テ左ニ二例ヲ掲ク

第一 $3a+2c$ ノ五乘方ヲ求ム、

雙率・五乘方ノ倍數、次ノ如シ、

$$1,\quad 5,\quad 10,\quad 10,\quad 5,\quad 1.$$

法式ニ從テ、之ヲ問題ノ兩率ニ附接ス、

$$(3a+2c)^5=(3a)^5+5(3a)^4(2c)+10(3a)^3(2c)^2+10(3a)^2(2c)^3+5(3a)(2c)^4+(2c)^5$$

乘術ヲ施シ、同率ヲ合スレハ、則チ下ノ如シ、

$$(3a+2c)^5=243a^5+810a^4c+1080a^3c^2+720a^2c^3+240ac^4+32c^5$$

第二 $a+b+2c^2$ ノ四乘方ヲ求ム、

多率ヲ分テ二部ト爲シ、$a+b$ヲxト爲シ、$+2c^2$ヲyト爲シ、以テ法式ニ適用シテ次式ヲ得、

$$(a+b+2c^2)^4=(a+b)^4+4(a+b)^3(2c^2)+6(a+b)^2(2c^2)^2+4(a+b)(2c^2)^3+(2c^2)^4.$$

術ヲ施シテ、下式ヲ得、

$$(a+b+2c^2)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4+8a^3c^2+24a^2bc^2+24ab^2c^2+8b^3c^2+24a^2c^4+48abc^4+24b^2c^4+32ac^6+32bc^6+16c^8.$$

設問

第一 $(a-2b)^3$

第二 $(2a+3x)^7$

第三 $\left(1+\frac{1}{2}a\right)^4$

第四 $(a^2-ax+x^2)^4$

第五 $(4a^2-3x)^{\frac{1}{4}}$

第三百七十九章 數字ノ倍數ヲ附スル所ノ雙率ヲ若干乘方ト為ス時ハ、聊カ雙率法式ヲ改革スレハ、則チ大ニ便宜ヲ得テ、開散式ノ倍數ヲ得ルコト甚タ容易ナル可シ、仍テ更ニ法式ヲ作ルコト左ノ如シ、

$$(z+u)^n=z^n+nz^{n-1}u+\frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}u^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot3}z^{n-3}u^3+\cdots$$

此式ニ於テ $z=ax$ ト $u=by$ ト為セハ、則チ次ノ如シ、

$$(ax+by)^n=a^nx^n+na^{n-1}bx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot3}a^{n-3}b^3x^{n-3}y^3+\cdots$$

式中 a . b ハ x y ノ數字倍數ニ代ル者ナリ、今 C_1 C_2 C_3 等ヲ以テ開散式ノ數字倍數ニ代レハ、則チ左式ノ如シ、

$$(ax+by)^n = C_1x^n + C_2x^{n-1}y + C_3x^{n-2}y^2 + C_4x^{n-3}y^3 + \cdots$$

此式ニ於テ倍數左ノ如シ、

$$C_1 = a^n$$

$$C_2 = C_1 \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{b}{a}$$

$$C_3 = C_2 \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{b}{a}$$

$$C_4 = C_3 \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{b}{a}$$

$$C_5 = C_4 \cdot \frac{n-3}{4} \cdot \frac{b}{a}$$

第一　$5a+3x$ ノ四乘方ヲ求ム、

此例ニ於テハ、$n=4$　$a=5$　$b=3$ ナルカ故ニ、開散式ノ倍數左ノ如シ、

$$C_1 = 5^4 = 625$$

$$C_2 = 625 \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{5} = 1500$$

$$C_3 = 1500 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5} = 1350$$

$$C_4 = 1350 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = 540$$

$$C_5 = 540 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = 81$$

是ニ由テ、下式ヲ得、

$$(5a+3x)^4 = 625a^4 + 1500a^3x + 1350a^2x^2 + 540ax^3 + 81x^4.$$

答

第二　$\frac{2c}{3}-\frac{4x}{5}$ノ四乗方ヲ求ム、

今 $n=4$　$a=\frac{2}{3}$　$b=\frac{4}{5}$　$\frac{b}{a}=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{6}{5}$ ナルヲ以テ、開散式ノ倍數左ノ如シ、

$$C_1=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

$$C_2=\frac{16}{81}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{6}{5}=\frac{128}{135}$$

$$C_3=\frac{128}{135}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}=\frac{128}{75}$$

$$C_4=\frac{128}{75}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}=\frac{512}{375}$$

$$C_5=\frac{512}{375}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{256}{625}$$

是ニ由テ下式ヲ得、

$$\left(\frac{2c}{3}-\frac{4x}{5}\right)^4=\frac{16}{81}c^4-\frac{128}{135}c^3x+\frac{128}{75}c^2x^2\ \frac{512}{375}cx^3+\frac{256}{625}x^4$$

設問

第一 $(2x+5y)^4$	第五 $\left(\frac{2t}{3}+\frac{3r}{2}\right)^6$
第二 $(2a-3x)^5$	第六 $\left(\frac{m}{4}-\frac{1}{5}\right)^5$
第三 $(3+4x)^6$	第七 $\left(\frac{m}{2}-\frac{1}{2m}\right)^8$
第四 $\left(\frac{3a}{4}+\frac{4r}{5}\right)^4$	

第三百八十章　不開方根化級數

不開方根ハ、之ヲ解テ級數ト為

セハ其所得ハ真實ニ近迫セル數價ト為ル可シ、設如ハa^nヲ以テ適合ノn乘方ト為シ其大小幾ト某數ト相近シ、而シテ某數トa^nトノ小差ヲ以テbト為セハ、則チa^n+b或ハa^n-bヲ以テ某數ヲ記ス可シ、仍テ式ヲ作ルコト左ノ如シ、

$$\sqrt[n]{a^n+b}=a\sqrt[n]{1+\frac{b}{a^n}}$$

$$\sqrt[n]{a^n-b}=a\sqrt[n]{1-\frac{b}{a^n}}$$

令此不開部ヲ解テ級數ト為セハ、則チ左ノ如シ、

$$\sqrt[n]{a+b}=a\left(1+\frac{1}{n}\,\frac{b}{a^n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1-n}{2n}\cdot\frac{b^2}{a^{2n}}+\right.$$
$$\left.\frac{1}{n}\cdot\frac{1-n}{2n}\cdot\frac{1-2n}{3n}\cdot\frac{b^3}{a^{3n}}+\cdots\right.\quad\cdots\text{(壹)}$$

$$\sqrt[n]{a-b}=a\left(-\frac{1}{n}\cdot\frac{b}{a^n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1-n}{2n}\cdot\frac{b^2}{a^{2n}}-\right.$$
$$\left.\frac{1}{n}\cdot\frac{1-n}{2n}\cdot\frac{1-2n}{3n}\cdot\frac{b^3}{a^{3n}}+\cdots\right.\quad\cdots\text{(貳)}$$

此兩式ノ後項ニハ、未タ嘗テ方根數ヲ見ス、是故ニ、不開數ハ、解テ、開方適合ノ數ト為ス、可ク、之ヲ總計スレハ、則チ、不開數ノ真方根ニ最モ近迫セル者ヲ得ヘシ、

若シ分數$\frac{b}{a^n}$愈小ナ

レハ、則チ級數愈速ニ收縮ス可シ、

第一　七十六ノ立方根ヲ求ム、但シ小數六位ニ至ル可シ、

七十六ヨリ小ニシテ、最近ノ適合立方數、六十四ヲ取リ、以テ最小分數ヲ得ルヿ左ノ如シ、

$$\sqrt[3]{76}=\sqrt[3]{64+12}=4\sqrt[3]{1+\frac{12}{64}}$$

$$=4\sqrt[3]{1+\frac{12}{64}}.$$

今壹式ニ由テ、此不開部ヲ解散ス可シ、但シ式中各字ノ數價ハ、則チ左ノ如シ、

$$n=3 \qquad a=4 \qquad \frac{b}{a^2}=\frac{3}{16}$$

雙率ノ倍數ヲ作ラント欲シテ、先ツ各因子ヲ求ルヿ左ノ如シ、

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1-n}{2n}=-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1-2n}{3n}=-\frac{5}{9}$$

$$\frac{1-3n}{4n}=-\frac{2}{3}$$

$$\frac{1-4n}{5n}=-\frac{11}{15}$$

$$\frac{1-5n}{6n}=-\frac{7}{9}$$

$$\frac{1-6n}{7n}=-\frac{17}{21}$$

等、

各率ヲ以テ、A B C等ノ文字ニ代ヘ、小數六位ニ至ルマテ精密ノ數價ヲ得ンカ為ニ、先ツ七位ニ至ルマテノ小數ヲ顯スヿ左ノ如シ、

A		$=+1.0000000$
B	$=+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{16}$	$=+.0625000$
C	$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{16}\cdot B$	$=-.0039062$
D	$=-\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{16}\cdot C$	$=+.0004069$
E	$=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{16}\cdot D$	$=-.0000508$
F	$=-\frac{11}{15}\cdot\frac{3}{16}\cdot E$	$=+.0000069$
G	$=-\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{16}\cdot F$	$=-.0000010$
H	$=-\frac{17}{21}\cdot\frac{3}{16}\cdot G$	$=+.0000001$

總計 $1.0589559=\sqrt[3]{1+\frac{3}{16}}$

4

$\sqrt[3]{76}=4.235824\pm$ 答

第二　二十五ノ五乘方根ヲ求ム、但シ小數六位ニ至ル可シ、

二十五ヨリモ大ニシテ、最近ナル五乘方數三十二ヲ取レハ、最モ便利ナル分數ヲ得ヘシ、其式ハ則チ下ノ如シ、

$$\sqrt[5]{25}=\sqrt[5]{32-7}$$
$$=2\sqrt[5]{1-\frac{7}{32}}$$

今貳式ニ從テ之ヲ解散スルノ術左ノ如シ

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{5}$$
$$\frac{1-n}{2n}=-\frac{2}{5}$$
$$\frac{1-2n}{3n}=-\frac{3}{5}$$
$$\frac{1-3n}{4n}=-\frac{7}{10}$$
$$\frac{1-4n}{5n}=-\frac{19}{25}$$
$$\frac{1-5n}{6n}=-\frac{4}{5}$$
$$\frac{1-6n}{7n}=-\frac{29}{35}$$

等、

$$A \qquad\qquad = +1.0000000$$

$$B = -\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{32} \qquad = - \quad 437500$$

$$C = +\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{32}\cdot B = - \quad 38281$$

$$D = +\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{32}\cdot C = - \quad 5024$$

$$E = +\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{32}\cdot D = - \quad 769$$

$$F = +\frac{19}{25}\cdot\frac{7}{32}\cdot E = - \quad 128$$

$$G = +\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{32}\cdot F = - \quad 22$$

$$H = +\frac{29}{32}\cdot\frac{7}{32}\cdot G = - \quad 4$$

加減合計 $.9518272 = \sqrt[5]{1-\frac{7}{32}}$

$\quad 2$

$\sqrt[5]{25} = 1.903654+$ 答

設問

左ニ記スル所ノ諸方根數價ヲ求ム、但シ小數六位ニ至ル可シ、

第一 $\sqrt[3]{9}$	第六 $\sqrt[6]{60}$
第二 $\sqrt[3]{31}$	第七 $\sqrt[5]{4}$
第三 $\sqrt[3]{100}$	第八 $\sqrt[3]{3275}$
第四 $\sqrt[3]{110}$	第九 $\sqrt[7]{125}$
第五 $\sqrt[5]{297}$	

分數化級數

第三百八十一章　既ニ已ニ變化ス可カラサル分數ト雖𪜈、分母ヲ以テ分子ヲ除スレハ、則チ猶ホ之ヲ化シテ級數ト為ス可シ、

設如ハ分數 $\frac{1}{1+a}$ ヲ化シテ級數ト為ス可シ、

此兩項相同シキカ故ニ、化級數ノ法、二樣アリ、即チ左ノ如シ、

$$\frac{1}{1+a}=\frac{1}{a+1}$$

第一

$$
\begin{array}{r|l}
1+a\,)\,1 & \left(1-a+a^2-\cdots\cdots\right. \\
\underline{1+a} & \\
-a & \\
\underline{-a-a^2} & \\
+a^2 &
\end{array}
$$

第二

$$
\begin{array}{r|l}
a+1\,)\,1 & \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}-\cdots\right. \\
\underline{1+\frac{1}{a}} & \\
-\frac{1}{a} & \\
\underline{-\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}} & \\
+\frac{1}{a^2} &
\end{array}
$$

右兩商ニ由テ之ヲ觀レハ、自ラ解散ノ法ヲ得ヘク、又同一ノ分數ニ由テ二樣ノ級數ヲ得ル事左ノ如シ、

$$\frac{1}{1+a}=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+\cdots\cdots \quad (壹)$$

$$\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a^6}+\cdots\cdots \quad (貳)$$

此二級數ハ解散ノ法ニ於テ之ヲ觀レハ、兩ナカラ無究級數ナルヲ知ル可シ、

設問

左ノ分數ヲ化シテ無究級數ト為ス可シ、

第一 $\frac{a}{a+x}$	第五 $\frac{1}{1-a+a^2}$
第二 $\frac{a}{a-x}$	第六 $\frac{1-x}{1-2x-3x^2}$
第三 $\frac{1+x}{1-x}$	第七 $\frac{1+2x}{1-x-x^2}$
第四 $\frac{a+x}{a^2+x^2}$	

第三百八十二章　無窮倍數法

若シ分數ヲ變シテ級數ト為

シ、以テ舊本ノ分數ニ比シテ方程式ヲ作レハ、則チ其未知數ニ何等ノ數價ヲ附與スルモ、皆式ニ合ス可シ、是レ他ナシ、即チ一致式タルノミ、此理ニ由テ、代數ヲ開散シテ級數ヲ作ルノ要法ヲ得、是ヲ無窮倍數法ト為ス、其術タルヤ、未知倍數ヲ化シテ級數狀ト為シ、以テ求ムル所ノ解散式ヲ得、而シテ後ニ一致式ノ性質ニ從ヒ倍數ノ價格ヲ筭定スルニ在リ、

第一 $\frac{1+2x}{1-3x}$ ヲ解テ無究級數ト為ス可シ、

$$\frac{1+2x}{1-3x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\cdots\cdots \quad (壹)$$

此式ノ分數ヲ省キ、悉ク諸率ヲ後項ニ移轉ス、

$$0=(A-1)+\left.\begin{matrix}B\\-3A\\2\end{matrix}\right|x+\left.\begin{matrix}C\\-3B\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}D\\-3C\end{matrix}\right|x^3+\left.\begin{matrix}E\\-3D\end{matrix}\right|x^4+\cdots\cdots \quad (貳)$$

式中$A-1$ハ自ラ含ム所ノx^0ノ倍數ト見做ス可シ、

今貳式モ亦一致式ナルカ故ニ、xノ各次乗方ノ倍數ハ各零ニ同シ(第三百六十八章定則第四)、仍テ次式ヲ得

$$A-1=0 \qquad B-3A-2=0 \qquad C-3B=0$$

$$A=1 \qquad B=5 \qquad C=15$$

$$D-3C=0 \qquad E-3D=0$$

$$D=45 \qquad E=135$$

此數價ヲ壹式ニ代用シテ、次式ヲ得、

$$\frac{1+2x}{1-3x}=1+5x+15x^2+45x^3+135x^4+\cdots\cdots$$

第二

$$\frac{1+x}{x-2x^2+6x^3}$$

ヲ無究級數ト為ス可シ、

求ムル所ノ級數ノ始率ハ$\frac{1}{x}$即チx^{-1}タルベキカ故ニ、次式ヲ作ル、

$$\frac{1+x}{x-2x^2+6x^3}=Ax^{-1}+Bx^0+Cx+Dx^2+Ex^3+Fx^4\cdots\cdots$$

上ノ如ク分數ヲ省テ諸率ヲ移轉ス、

$$\begin{array}{rl|l|l|l|l|l}
0= & A & x^0+B & x+C & x^2+D & x^3+E & x^4+F \; x^5\cdots\cdots \\
 & -1 & -2A & -2B & -2C & -2D & -2E \\
 & & -1 & +6A & +6B & +6C & +6D
\end{array}$$

諸倍數ハ各零ナルヲ以テ左式ノ如シ、

$$A-1=0,\quad B-2A-1=0,\quad C-2B+6A=0,$$
$$A=1;\qquad B=3;\qquad C=0;$$

$$D-2C+6B=0,\qquad E-2D+6C=0,$$
$$D=-18;\qquad E=-36;$$

$$F-2E+6D=0,\qquad G-2F+6E=0,$$
$$F=+36;\qquad G=+288;$$

此數價ヲ初式ニ代用ス、而シテC=0ナルヲ以テCヲ含メル諸率皆消失ス、

$$\frac{1+x}{x-2x^2+6x^3}=\frac{1}{x}+3-18x^2-36x^3+36x^4+288x^5+\cdots\cdots$$

原註ニ曰ク、右術中ニ於テ、必スシモ諸率ヲ悉ク一項ニ移スヲ要セス、蓋シ此方程式タルヤ必シモ一項零ニアラサルモ、xノ同乗方ノ倍數ヲ比シ、一致式ノ第三性質ニ從フカ故ナリ、

無究倍數法ハ幾多ノ例題ニ適當シ、其用タルヤ太タ廣シト雖氏、必ス左ノ約束ニ從フ者トス曰ク、解散式ハ始率ニ於テ變數ノ自乗標何者タルヲ觀テ以テ之ヲ算定シ解散豫定式ハ始率ヲ以テ已知ノ事實ニ適當セシム可シ、

解散豫定式ニ於テ、若シ變數ノ自乗標ヲ起スヿ、

高キ過クレハ、其事實ハ必ス所得ノ一式ニ於テ、隨意式ヲ得ルヲ以テ、之ヲ徵ス可ク、又若シ解散豫定式ニ於テ變數ノ自乘標ヲ起スコ、低キニ過クレハ、隨意式ヲ得ルコ無シト雖圧、必ス幾多ノ冗率ヲ生ス、然リ而シテ冗率ハ皆其倍數零ト爲ルノ故ヲ以テ悉ク消失ス可シ、

設問

左ニ揭クル所ノ諸代數ヲ解散シテ、各級數ト爲ス可シ、

第一 $\dfrac{1-2x}{1-3x}$

第二 $\dfrac{1+2x}{1-x-x^2}$

第三 $\dfrac{1-x}{1-3x-2x^2}$

第四 $\dfrac{x(1+5x)}{(1-2x)^2}$

第五 $\dfrac{2}{3x-2x^2}$

第六 $\dfrac{1}{1+2x^2+3x^4}$

第七 $\dfrac{1+x}{(1+ax)^2}$

第八 $\sqrt{1-x}$

原註ニ曰ク、第八問ハ下ノ如ク豫定式ヲ作リ、兩項ヲ自乘セハ、則チ容易ニ倍數ノ方程式ヲ得ヘシ、

$$\sqrt{1-x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots\cdots$$

第九

$$\sqrt{1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\cdots}$$

第十

$$\frac{1-2x^2+3x^4-4x^6+5x^8-6x^{10}+\cdots}{1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+\cdots}$$

級數轉倒

第三百八十三章　級。數。轉。倒。トハ、級數中ノ未知數價ヲ求メ、他ノ未知數率ヲ以テ之ヲ記スルノ術ナリ、

第一　假令ハ左式アリ、yノ遞加自乘標ヲ有テル諸率ニ於テxノ數價ヲ求ム、

$$y=ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5+\cdots$$

式中x yハ、兩ナカラ未定數ナルカ故ニ、級數ノ形狀ヲ變セスシテ、何等ノ數價ヲ附スルモ更ニ妨ナシトス、仍テ無究倍數法ヲ適用シテ左式ヲ豫定ス、

$$x=Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+Ey^5+\cdots\cdots \qquad (壹)$$

今之ヲ自乘シテ、x^2 x^3 x^4 x^5等ノ價格ヲ求メ、其所得ハ各y^5ヲ有ツ所ノ一率ニ送リ、問題ノ式中ニ在ルx x^2 x^3 x^4等ニ之ヲ代用シ、yヲ移轉シテ左式ヲ得ヘシ、

$$0=\left.\begin{array}{r}aA\\-1\end{array}\right|y+\left.\begin{array}{r}aB\\bA^2\end{array}\right|y^2+\left.\begin{array}{r}aC\\+2bAB\\+cA^3\end{array}\right|y^3+\left.\begin{array}{r}aD\\+2bAC\\+bB^2\\+3cA^2B\\+dA^4\end{array}\right|y^4+\left.\begin{array}{r}aE\\+2bAD\\+2bBC\\+3cA^2C\\+3cAB^2\\+4dA^3B\\+eA^5\end{array}\right|y^5\cdots\cdots$$

式中ノyニハ、何等ノ數價ヲ附與スルモ、皆式ニ合スルカ故ニ、此式ハ即チ一致式ナリ、因テyノ各次乘方ノ倍數ヲ以テ各零ト為シ、(第三百六十八章定則第四)、所得ノ方程式ヲ約スレハ、則チ豫定倍數ヲ得ルヿ左ノ如シ、

(乾)

$$A=\frac{1}{a}$$

$$B=-\frac{b}{a^3}$$

$$C=\frac{2b^2-ac}{a^5}$$

$$D=-\frac{5b^3-5abc-a^2d}{a^7}$$

$$E=\frac{14b^4-2ab^2c+6a^2bd+3a^2c^2-a^2c}{a^9}$$

ABC等ノ此價格ヲ以テ壹式ニ代用スレハ、abc等ノ諸率ヲ以テxノ數價ヲ得ヘシ、是ヲ問題ノ級數ヲ轉倒シタリト曰フ、

第二 左ノ級數ヲ轉倒シ、yノ諸率ニ於テxノ數價ヲ求ム、

$$y=ax+bx^3+cx^5+dx^7+ex^9+\cdots$$

問題ニ由テ、次ノ式ヲ豫定ス、

$$x=Ay+By^3+Cy^5+Dy^7+Ey^9+\cdots$$

上ノ如ク、術ヲ施シテ、次ノ式ヲ得、

$$A=\frac{1}{a}$$

$$B=-\frac{b}{a^4}$$

$$C=\frac{3b^2-ac}{a^7}$$

$$D=-\frac{12b^3-8abc+a^2d}{a^{10}}$$

$$E=\frac{55b^4-55ab^2c+10a^2bd+5a^2c^2-a^2c}{a^{13}}$$

(坤)

以上二例ニ於テ、a b c 等ハ何ノ數タルヲ論セサルカ故ニ、凡ソ此ノ如キ級數ヲ轉倒スル時ハ、乾坤二式ヲ以テ法式ト為シ、普ク之ヲ適用ス、

第三　左ノ級數ヲ轉倒ス可シ、

$$y=x+2x^2+4x^3+8x^4+\cdots\cdots$$

是ニ由テ、次式ヲ豫定ス、

$$x=Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\cdots\cdots$$

今之ヲ乾式ニ代用スレハ次ノ如シ、

$$a=1 \quad b=2 \quad c=4 \quad d=8$$

$$A=1 \quad B=-2 \quad C=4 \quad D=-8$$

$$x=y-2y^2+4y^3+8y^4+\cdots\cdots$$

答、

設問

左ノ級數ヲ轉倒ス可シ、

第一

$$y=x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots\cdots$$

第二

$$y=x+3x^2+5x^3+7x^4+9x^5+\cdots\cdots$$

第三

$$x=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\frac{y^5}{5}-\cdots\cdots$$

第四

$$y=x-x^3+x^5-x^7+x^9-x^{11}+\cdots\cdots$$

第五

$$y = 2x + 3x^3 + 4x^5 + 5x^7 + \cdots\cdots$$

第六

$$x = 2y + 4y^2 + 6y^3 + 8y^4 + 10y^5 + \cdots$$

第三百八十四章　級數轉倒ノ一大眼目ハ、級數ノ總計ヲ知レハ、則チ未知數價ノ最近ナル者ヲ求メ得ルニ在リ、

第一　設如ハ左ノ級數中、xノ最近數價ヲ求ハ、

$$\frac{1}{4} = 2x - \frac{4x^2}{3} + \frac{6x^3}{5} - \frac{8x^4}{7} + \cdots\cdots$$

此總計次ノ如シ、

$$s = 2x - \frac{4x^2}{3} + \frac{6x^3}{5} - \frac{8x^4}{7} + \cdots\cdots \quad (壹)$$

式中x及ヒsヲ以テ變數ト為シ乾式ニ從テ壹式ヲ轉倒スレハ、則チ下式ノ如シ、

$$x = \frac{s}{2} + \frac{s^2}{6} + \frac{13s^3}{360} + \frac{5s^4}{1512} + \cdots\cdots \quad (貳)$$

代數學卷之五

今此式ニ於テ$\delta=\frac{1}{4}$トスレハ、則チ收縮級數ヲ得ヘク、因テ各率ノ數價ヲ一々算定シテ、xノ最近數ヲ得ルコ左ノ如シ、

$$\frac{\delta}{2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = .125000$$

$$\frac{\delta^2}{6} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{6} = .010416$$

$$\frac{13\delta^3}{360} = \frac{1}{64}\cdot\frac{13}{360} = .000564$$

$$\frac{5\delta^4}{1512} = \frac{1}{256}\cdot\frac{5}{1512} = .000013$$

$$x = 135993$$

答、

設問

左ノ級數式ニ於テ、xノ最近數價ヲ問フ、

第一

$$\frac{2}{5} = 5x - 20x^2 + 80x^3 - 320x^4 + 128x^5 \cdots\cdots$$

第二

$$\frac{1}{2} = x + \frac{x^2}{2\cdot3} + \frac{x^3}{3\cdot4} + \frac{x^4}{4\cdot5} + \frac{x^5}{5\cdot6} + \cdots\cdots$$

第三

$$\frac{1}{5} = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} \cdots\cdots$$

第四

$$\frac{1}{4} = x - \frac{3x^2}{2\cdot4} + \frac{5x^3}{4\cdot6} - \frac{7x^4}{6\cdot8} + \cdots\cdots$$

無究級數總計

第三百八十五章　凡ソ級數ヲ總計スルトハ、級數ヲ一團ノ定數ト為スノ術ナリ、

第三百八十六章　級數ヲ總計スルノ法ハ、各自級數ノ性質、即チ其解散式ニ關與セサル可カラス、而シテ數學級數及ヒ幾何級數ノ總計法ハ、既ニ之ヲ前ニ說示シタリ、今茲ニ又其餘ノ各種級數ノ總計スルノ法ヲ論ス可シ、

反覆級數

第三百八十七章　反覆級數トハ、級數各率或ハ二三率ト其次率トノ間ニ、一定ノ關渉アル者ナリ、即チ左ノ如シ、

$$1+4x+11x^2+34x^3+101x^4+\cdots\cdot$$

是レ即チ反覆級數ニシテ、各二率ヲ取リ、其第一率ニ$3x^2$ヲ乘シ、第二率ニ$2x$ヲ乘シ、兩積ノ和ハ則チ次率トナル者ナリ、此乘法3及ヒ2ヲ級數關渉ノ度ト曰フ、又下ノ反覆級數ニ於テハ、3　2　1ヲ以テ關渉ノ度ト為ス、

$$1+x+3x^2+8x^3+17x^4+42x^5+110x^6+\cdots\cdot$$

第三百八十八章　反覆級數ノ第二率以下、毎率其前ノ一率ニ關渉スル時ハ、之ヲ一次反覆級數ト謂フ、其關渉ノ度ハ單一ニシテ即チ幾何級數ナリ、

反覆級數ノ第三率以下、毎率其前ノ二率ニ關渉スル時ハ、之ヲ二次反覆級數ト謂ノ、其關渉ノ度ハ、則チ二ナリ、

反覆級數ノ第三率以下、毎率其前ノ三率ニ關渉スル時ハ、之ヲ三次反覆級數ト謂フ、其關渉ノ度ハ、則チ三ナリ、

第三百八十九章　二次反覆級數ノ度、及ヒ總計ヲ求ムルノ法アリ、即チ左ノ如シ、

第一　a b c d ヲ以テ級數四率ノ倍數ト爲シ、m n ヲ以テ關渉ノ度ト爲セハ、則チ級數ノ性質ニ由テ次式ヲ得、

$$\left.\begin{aligned} ma+nb&=c \\ mb+nc&=d \end{aligned}\right\} \cdots(元)$$

此二式ハ則チ以テ、m n ノ數價ヲ算定ス可シ、

第二　級數ノ總計ヲ求メント欲セハ、ＡＢＣ等ヲ以テ各率ト為シ、以テ左式ヲ作ル可シ、

$$S = A + B + C + D + E + \cdots\cdots \quad (壹)$$

此級數ニハxノ遞加自乘標ヲ含ミＡ或ハＢニ於テ、xノ初乘アリトス可シ、而シテ二次級數ナルカ故ニ、次式ヲ得ヘシ、

$$\left.\begin{array}{l} C = mAx^2 + nBx \\ D = mBx^2 + nCx \\ E = mCx^2 + nDx \\ 〃 \quad 〃 \quad 〃 \end{array}\right\} \cdots\cdots \quad (貳)$$

此諸式ヲ加ヘ壹式ノＳ數價ニ注目スレハ、則チ次式ヲ得ヘシ、

$$S - A - B = mx^2S + nx(S - A)$$

$$S = \frac{A + B - Anx}{1 - nx - mx^2} \cdots \quad (亏)$$

第三百九十章　三次反覆級數ノ度、及ヒ總計ヲ求ムルノ法アリ、即チ左ノ如シ、

第一　$a\ b\ c\ d\ e\ f$ヲ以テ級數六率ノ倍數ト為シ、又$m\ n\ r$ヲ以テ關渉ノ度ト為スキハ、則チ

左式ヲ得、

$$\left.\begin{aligned} ma+nb+rc&=d \\ mb+nc+rd&=e \\ mc+nd+re&=f \end{aligned}\right\} \cdots (利)$$

此三式ハ則チ以テ、$m\ n\ r$ノ數價ヲ算定ス可シ、

第二　級數ノ總計ヲ求メント欲セハ、$A\ B\ C$等ヲ以テ各率ト為シ、以テ次式ヲ作ル可シ

$$S=A+B+C+D+E+F+\cdots\cdots \quad (壹)$$

是レ三次級數ナルカ故ニ、次式ヲ得ヘシ、

$$\left.\begin{aligned} D&=mAx^3+nBx^2+rCx \\ E&=mBx^3+nCx^2+rDx \\ F&=mCx^3+nDx^2+rEx \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (貳)$$

此諸式ヲ加ヘ、壹式ニ於テxノ數價ニ注目スレハ、則チ下式ヲ得、

$$S-A-B-C=mx^3S+nx^2(S-A)+rx(S-A-B)$$

$$S=\frac{A+B+C-(A+B)rx-Anx^2}{1-rx-nx^2-mx^3} \quad \cdots (貞)$$

又同法ヲ以テ四次以上ノ反覆級數ノ總計ヲ求ムルノ法式ヲ得ヘシ、

第三百九十一章　其級數ヲ總計スルニ方テ、上ノ法式ヲ適用セント欲セハ、先ツ元式、或ハ利式ニ由テ關渉ノ度ヲ算定シ、而シテ後ニ亨式、或ハ貞式ニ由テ級數ノ總計ヲ得ヘシ、

若シ級數ノ幾次タルヲ知ラサレハ、第一ニ元式ニ由テ m n ノ數價ヲ算定シ、而シテ其所得ハ能ク級數關渉ノ度ニ適當スルヤ否ヤヲ觀ル可シ、若シ適當セサレハ、則チ利式ニ由テ m n r ノ數價ヲ求メ、而シテ又其所得能ク關渉ノ度ニ適スルヤ、否ヤヲ察ス可シ、若シ亦其度ニ適セサレハ、尚又進テ四次以上ノ法式ニ及ホシ、逐次ニ其當否ヲ觀察ス可シ、

然リト雖氏若シ最初ヨリ關渉ノ適度ヲ概測スルコト高キニ過クレハ、輙チ m n r 等ノ内ニ必ス零トナル者ヲ生ス可シ、然レハ則チ零ト為ル者ヲ省キ、其餘ヲ以テ直ニ關渉ノ度ト為シ、更ニ再三ノ觀察ヲ要セス、

第一　左ノ無究級數ノ總計ヲ問フ、

關涉ノ變ヲ算定スルヿ次ノ如シ、

$$1+4x+10x^2+22x^3+46x^4+\cdots$$

$$a=1 \qquad b=4$$

$$c=10 \qquad d=22$$

此數價ヲ元式ニ適用シテ次式ヲ得

$$m+4n=10$$

$$4m+10n=22$$

是ニ由テ容易ニ下式ヲ得、

$$m=-2$$

$$n=3$$

此數價ハ即チ眞ノ適度ナリ、蓋シ問題ノ級數ニ於テハ第三率以下、各率ノ倍數ハ其前二率ノ第一率ノ倍數三倍ヨリ、第二率倍數ノ二倍ヲ減スル者ニ同シキヲ以テナリ、

是ニ由テ級數ノ總計ヲ得ルヿ左ノ如シ、

$$A=1 \qquad B=4x$$

之ヲ亨式ニ適用シテ、次式ヲ得、

$$S=\frac{1+4x-3x}{1-3x+2x^2}=\frac{1+x}{1-3x+2x^2}$$

答

凡ソ此ノ如キ級數ノ總計ハ、必ス代數學分數ノ形狀ヲ為ス可シ若シ之ニ反シテ、此ノ如キ分數ヲ除シ、或ハ無究倍數法ヲ適用シテ、之ヲ解散ス

レハ、則チ舊本ノ級數ヲ得ヘシ、是ニ由テ之ヲ觀レハ、反覆級數ハ本來既ニ約ス可カラサルノ分數タル可ク又其分數ハ即チ反覆級數ノ因テ生スル所以ノ者タルヲ知ル可シ、九ソ此ノ如キ特異ノ級數ヲ生スル所ノ分數ハ、之ヲ名ソケテ級數統括ノ分數ト曰フ、即チ級數總計ノ謂ナリ

設問

左ノ各級數ノ總計ヲ求ム

第一

$$1+3x+4x^2+7x^3+11x^4+\cdots\cdots$$

第二

$$1+6x+12x^2+48x^3+120x^4+\cdots\cdots$$

第三

$$1+2x-5x^2+26x^3-119x^4+\cdots\cdots$$

第四

$$1+4x+3x^2-2x^3+4x^4+17x^5+3x^6+\cdots\cdots$$

第五

$$1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\cdots$$

第六

$$1+x+5x^2+13x^3+41x^4+121x^5+\cdots$$

第七

$$1+4x+6x^2+11x^3+28x^4+63x^5+\cdots$$

第八

$$\frac{x}{2}+x^3+\frac{7x^5}{2}+10x^7+\frac{61x^9}{2}+91x^{11}+\cdots$$

微分法

第三百九十二章　微分法トハ、正則ノ級數各率毎次ノ差ヲ用テ、以テ各率ヲ求メ、或ハ諸率ノ總計ヲ求ムルノ術ナリ、

第三百九十三章　微分ヲ以テ級數ノ各率ヲ求ムルノ法アリ、左ノ如シ、

級數ノ各率ヲ各、其次率ヨリ減スレハ、其差ハ則チ新ニ一連ノ級數ヲ成ス可シ、是ヲ一次微分級數ト曰ス、若シ此新級數ノ各率ヲ各其次率ヨリ減スレハ、其差モ亦更ニ新級數ヲ成ス可シ、是ヲ

二次微分級數ト曰フ、其他之ニ傚ヘ、

設如ハ a b c d e 等ヲ以テ正則級數ト為シ、毎率一定ノ法則ヲ踏テ成立ツ者ト為ス可シ、今此各率ヲ直立一行ニ書記シ、各率ノ差ヲ取テ、毎次其右ノ別行ニ記シ、各次ノ微分級數ヲ作レハ、則チ左表ノ如シ、

級數	一次微分級數	二次微分級數	三次微分級數	四次微分級數
a				
b	$b-a$			
c	$c-b$	$c-2b+a$		
d	$d-c$	$d-2c+b$	$d-3c+3b-a$	
e	$e-d$	$e-2d+c$	$e-3d+3c-b$	$e-4d+6c-4b+a$

表中各行ノ第一列ニ在ル者ハ、衆率ト雖モ之ヲ總括シテ微分級數ノ始率ト為ス、其幾次タルハ、

所在ノ行ニ由テ之ヲ知ル可シ、

今 d_1 d_2 d_3 d_4 等ヲ以テ一次二次三次四次等ノ微分級數ノ始率ト為ス時ハ、其式左ノ如シ、

$$d_1 = b - a$$
$$d_2 = c - 2b + a$$
$$d_3 = d - 3c + 3b - a$$
$$d_4 = e - 4d + 6c - 4b + a$$

之ヲ移轉シ、且ツ必用ノ代用ヲ為シテ次式ヲ得、

$$a = a$$
$$b = a + d_1$$
$$c = a + 2d_1 + d_2$$
$$d = a + 3d_1 + 3d_2 + d_3$$
$$e = a + 4d_1 + 6d_2 + 4d_3 + d_4$$

此式ハ a d_1 d_2 d_3 d_4 等ノ諸率ヲ以テ、a b c d e 等ノ諸數價ヲ示ス者ナリ、後項ノ倍數ハ雙率法式ニ從テ成ル者ニシテ、雙率ノ二乘方ノ倍數ハ第三式ニ於テ之ヲ見ル可ク、三乘方ノ倍數ハ第四式ニ於テ之ヲ見ル可シ、以下皆此ノ如シ、

是故ニ問題ノ級數 a b c d e 等ノ第 $n-1$ 率ヲ T_{n+1} ト定ムレハ、則チ左式ノ如シ、

$$T_{n+1} = a + n d_1 + \frac{n(n-1)}{2} d_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} d_3 + \cdots \text{(子)}$$

$n-1$ヲ以テnニ代用スレハ、則チ問題ノ第n率ヲ求ムルノ法式ヲ得ヘシ、即チ次ノ如シ、

$$T_n = a + (n-1) d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} d_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} d_3 + \cdots \text{(甲)}$$

第三百九十四章　微分ヲ以テ、級數若干率ノ總計ヲ求ムルノ法アリ、即チ左ノ如シ、

假令ハ級數左ノ如シ、

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ \cdots\cdots \text{(壹)}$$

此級數n率ノ總計ヲSト為シ、a d_1 d_2 d_3 d_4等ヲ以テSノ數價ヲ求メンカ為ニ茲ニ補助級數ヲ設ク、

$$0,\ a,\ a+b,\ a+b+c,\ a+b+c+d,\ \cdots \text{(貳)}$$

此級數ノ第$n+1$率ハ問題ノ級數壹ノn率總計ニ同シキハ論ヲ俟タス、故ニ之ヲSト為シ、d'_1 d'_2 d'_3 d'_4等ヲ以テ補助級數貳ノ各次微分ノ

始率ト為セハ、子式ニ由テ次式ヲ得

$$S=0+nd'_1+\frac{n(n-1)}{2}d'_2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}d'_3+\cdots\quad(丑)$$

然リ而シテ、補助級數貳ノ一次二次三次等ノ微分級數ヲ作レハ、則チ左ノ如シ、

$$d'_1=a$$

$$d'_2=b-a=d_1$$

$$d'_3=c-2b+a=d_2$$

之ヲ丑式ニ代用シテ下式ヲ得、

$$S=na+\frac{n(n-1)}{2}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}d_2+\cdots\quad(乙)$$

第三百九十五章　甲乙兩法式ノ用法ハ、左ノ例ニ於テ之ヲ說明ス可シ

第一　1　5　15　35　70　126　等ノ如キ級數ノ第十二率ヲ求ム、

是ニ於テ、各次ノ微分級數ヲ作ルコト下ノ如シ、

1					
5	4				
15	10	6			
35	20	10	4		
70	35	15	5	1	
126	56	21	6	1	0

今 n ハ十二ニシテ各次ノ始率左ノ如シ、

$$a=1 \qquad d_1=4 \qquad d_2=6$$

$$d_3=4 \qquad d_4=1 \qquad d_5=0$$

甲式ニ此數價ヲ代用シ、各率ヲ約シテ次式ヲ得、

$$T_{12}=1+44+330+660+330=1365$$ 答

此問題ノ級數ハ、五次微分級數ニ至テ零トナルカ故ニ、第五率ニ至テ止ム者ト知ル可シ、

第二　1　3　6　10　15　21　等ノ如キ級數第n率ニ至ルマテノ總計ヲ求ム、

前例ノ如ク、各次ノ微分級數ヲ作テ左式ヲ得、

$$a=1,\quad d_1=2,\quad d_2=1,\quad d_3=0.$$

乙式ニ由テ次式ヲ得、

$$S=n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}$$

第四率以下ハ各率皆零トナルヲ以テ、此式ニ顯ハレタル諸術ヲ施シ、其所得ヲ合シ、因子ヲ分割シテ下式ヲ得、

$$S=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$ 答

設問

第一　1　4　8　13　19　等ノ如キ級數ノ第九率ヲ求ム、

第二　1　4　10　20　35　等ノ如キ級數ノ第十五率ヲ求ム、

第三　1　6　21　56　126　251　456　等ノ如キ級數ノ第八率及ヒ第九率ヲ問フ、

第四　1　8　27　64　125　等ノ如キ級數ノ第二十率ヲ求ム、

第五　1　3　6　15　21　等ノ如キ級數ノ第n率ヲ求ム、

第六　1　4　10　20　35　等ノ如キ級數ノ第n率ヲ問フ、

第七　1　5　15　35　70　126　等ノ如キ級數ノ第n率ヲ求ム

第八　1　3　6　10　15　21　等ノ如キ級數第二十率ニ至ルマテノ總計ヲ求ム、

第九　1　5　14　30　55　91　等ノ如キ級數第十二率ニ至ルマテノ總計ヲ求ム、

第十　1　4　13　37　85　166　等ノ如キ級數第十率ニ至

ルマテノ總計ヲ求ム、

第十一　$1\cdot2$　$2\cdot3$　$3\cdot4$　$4\cdot5$　$5\cdot6$　等ノ如ト級數、第n率ニ至ルマテノ總計ヲ問フ、

第十二　$1\cdot2\cdot3$　$2\cdot3\cdot4$　$3\cdot4\cdot5$　$4\cdot5\cdot6$　等ノ如キ級數第n率ニ至ルマテノ總計ヲ求ム、

第十三　1^2　2^2　3^2　4^2　5^2　等ノ如キ級數、第n率ニ至ルマテノ總計ヲ求ム、

第十四　1^3　2^3　3^3　4^3　5^3　等ノ如キ級數、第n率ニ至ルマテノ總計ヲ求ム、

第十五　1^4　2^4　3^4　4^4　5^4　等ノ如キ級數第n率ニ至ルマテノ總計ヲ求ム、

第十六　$(m+1)$　$2(m+2)$　$3(m+3)$　$4(m+4)$　等ノ如キ級數第n率ニ至ルマテノ總計ヲ求ム、

挿入法

第三百九十六章　挿入法トハ、其級數ノ法則ニ倣ヒ、其二率ノ中間ニ一率、或ハ數率ヲ挿入スルノ法ナリ、此法タルヤ數學ノ諸表ヲ製シ、或ハ星

學ノ算測ニ於テ一大要用ト為ス者ナリ、

第三百九十七章　級數二率ノ中間ニ新率ヲ挿入スルニ微分法ヲ以テス、凡ソ級數ハ第n率ノ次率ヲ算當スルニ、上ニ揭クル所ノ式(第三百九十三章子)ヲ用フ可シ、

$$T_{1+n}=a+nd_1+\frac{n(n-1)}{2}d_2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot3}d_3+\cdots$$

若シ此式ニ於テnヲ分數ト為セハ、則チ其所得ハ挿入中率ノ數價ニシテ、問題ニ率ノ中間ニ位シ、級數ノ法則ニ從テ、他ノ諸率ト相ヒ關渉スル者ナリ、

n若シ一箇ヨリモ小ナレハ、則チ中率ハ問題ノ二率ノ第一率ト第二率トノ中間ニ入ル可ク、若シ一箇ヨリモ大ニシテ二箇ヨリモ小ナレハ、則チ第二率ト第三率トノ中間ニ入ル可シ、其他皆之ニ準ス、

設如ハ左ノ級數アリ、

$$\sqrt[3]{21}=2.758924$$
$$\sqrt[3]{22}=2.802039$$
$$\sqrt[3]{23}=2.843867$$
$$\sqrt[3]{24}=2.884499$$
$$\sqrt[3]{25}=2.924218、$$

挿入法ヲ以テ、中數ノ立方根ヲ求ムルヿ左ノ如シ、

第一　21.75ノ立方根ヲ求ム、

微分級數表ヲ作ル左ノ如シ、

數	立方根	d_1	d_2	d_3	d_4
21	2.758924				
22	2.802039	+.043115			
23	2.843867	+.041828	−.001287		
24	2.884499	+.040632	−.001196	+.000091	
25	2.924018	+.039519	−.001113	+.000083	−.000008

法式ニ由テ、21.75ノ立方根ヲ求メント欲セハ、則チ先ツ左式ヲ作ル可シ、

$a=2.758924$

$n=.75$

$d_1=+.043115$

$d_2=-.001287$

$d_3=+.000091$

$d_4=-.000008$

此數價ヲ法式ニ適用シテ左式ヲ得、

第一率	+2.758924
第二率	+.032336
第三率	+.000121
第四率	+.000008
總計	=2.791385

答、

若シ二十二ト二十三トノ中間ナル數ノ立方根ヲ求メント欲セハ、則チnヲ以テ二十一ニ過クル所ノ數ト為シ、d_1 d_2 d_3等ニハ同上ノ數價ヲ用テ之ヲ得ヘシ、然リト雖モ若シ細密ノ精算ヲ要スル時ハ、二十二ヲ以テ級數ノ始率ト為シ、相當ノ微分ヲ作リ、nヲ以テ求ムル所ノ分數ト為ス可シ、

設問

左ノ諸數ノ立方根ヲ問フ、

第一	21.325
第二	21.875
第三	21.4568
第四	22.25
第五	22.684
第六	22.75

第三百九十八章　三日間、地球ヨリ日月ヲ視ルニ、月ヨリ日ニ至ルノ角距離左ノ如クナリシト云フ、

初日正午	66° 6′ 38″
初日子正	72° 24′ 5″
次日正午	78° 34′ 48″
次日子正	84° 39′ 4″
第三日正午	90° 37′ 18″
第三日子正	96° 29′ 57″

右ニ記スル所ノ時日ハ、毎ニ十二時間ナルヲ以テ、其中間ノ時刻ニ在テハ月ヨリ日ニ至ルノ距離ヲ求メント欲セハ、nハ常ニ十二分數ナラサルヲ得ス、是故ニ初日ノ午後三時ニ於テ、距離ヲ求メント欲セハ、n及ヒaハ左ノ如シ、

$$n=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

$$a=66^\circ\quad 6'\quad 38''$$

次日ノ午前六時ハ次ノ如シ、

$$n=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$a=72^\circ\quad 24'\quad 5''$$

次日ノ午後三時ハ下ノ如シ、

$$n=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

$$a=78^\circ\quad 34'\quad 48''$$

設問

挿入法ヲ以テ、月ヨリ日ニ至ルノ距離ヲ求ムルヿ左ノ如シ、

第一　初日午後三時ニ於テ幾變ナルヤ、

第二　初日午後六時、　第三　初日午後九時、

第四　次日午前三時、　第五　次日午前六時、

第六　次日午前九時、　第七　次日午後三時、

第八　次日午後六時、　第九　次日午後九時、

對數

第三百九十九章　凡ソ數ノ對數ト稱スル者ハ、本數ヲ生スルカ為ニ、基數ト名ツクル所ノ他ノ數ヲ幾次乗方ト為ス可キ自乗標ナリ、

假令ハ $a^x=b$ ノ式ニ於テ、自乗標 x ハ b ノ對數ニシテ、基數 a ニ附スル者ナリ、凡ソ此ノ如キ形狀ヲ成ス所ノ方程式ヲ自乗式ト曰フ、

自乗式ニ於テ若シ a ヲ一定ノ數ト為シ、b ヲ漸次變易ノ數ト為ストキハ、x ノ相當數ハ即チ對數ノ編成ヲ為ス可シ、

第四百章　對數ノ編成トハ、一定ノ基數ニ從テ、所有ル正數ノ對數ヲ蒐輯スル者ナリ、

一箇ヲ除クノ外、所有ル正數ヲ以テ、對數編成ノ基數ト為ス可シ、蓋シ自乗式 $a^x=b$ ニ於テ、a ハ一箇ニ非サル正數ニシテ、x ニハ適宜ノ數價ヲ附スレハ、b ハ則チ所有ル正數ト為シテ、皆式ニ合ス可シ、是故ニ、對數編成ノ數ハ無究ナリ、

第四百〇一章　自乗標 $a^x=b$ ニ於テ、若シ b ハ a ノ適合自乗數ナレハ、則チ x ハ整數ナル可ク、若シ b ハ a ノ自乗數ニ非サレハ、則チ x ハ分數ナル

可シ、是故ニ對數ハ整數分數ノ兩部ヨリ成ル者トス、

第四百○二章　對數ノ標目。トハ、對數ノ正數部ヲ謂フナリ、

第四百○三章　滿質差（マンタッサ）。トハ、對數ノ分數部ヲ謂フナリ、之ヲ說明センカ為ニ五ヲ以テ編成ノ基數ト為セハ、則チ左式ノ如シ、

$$5^{2.25}=5^{\frac{9}{4}}$$
$$=\sqrt[4]{5^9}$$
$$=37.384$$

即チ 37.384 ノ對數ニシテ基數五ニ附ス可キ者ハ 2.25 ナリ、此對數ノ標目ハ二ナリ、滿質差ハ .25 ナリ、

第四百○四章　對數性質

對數ハ編成ノ異同ヲ論セス、各種普通ノ性質アリ、今之ヲ論辨センカ為ニ、a ヲ以テ基數ト為シ、數ノ對數ハ洋語 (logarithm) ヲ畧シテ、其數ノ前ニ log. ト記ス可シ、

對數普通ノ性質ハ則チ左ノ如シ、

第一　凡ソ一箇ノ對數ハ編成ノ異同ヲ論セス、皆零ナリ、

何トナレハ $a^x=1$ ナル時ハ、$x=\log.1$ ナリ、然リ而シテ第八十八章ニ由レハ、$a^x=1$ ナル時ハ $x=0$ 即チ $\log.1=0$ ナリ、

第二　凡ソ基數ノ對數ハ編成ノ異同ヲ論セス、皆一箇ナリ、

何トナレハ $a^x=a$ ナル時ハ、$x=\log.a$ ナリ、然リ而シテ第八十八章ニ由レハ $a^x=a$ ナル時ハ $x=1$ 即チ $\log.a=1$ ナリ、

第三　凡ソ二數相乘ノ積ノ對數ハ二數ノ對數ノ和ニ同シ、

何トナレハ

$$m=a^x$$
$$n=a^z$$

ナル時ハ

$$x=\log.m$$
$$z=\log.n$$

ナリ、二數ヲ相乘スル時ハ

$$mn=a^{x+z}$$

ナルカ故ニ

$$\log.mn=x+z=\log.m+\log.n$$

ナリ、

第四　凡ソ商ノ對數ハ實ノ對數ヨリ法ノ對數ヲ減スル者ニ同シ、

何トナレハ $m=a^x$ $n=a^z$ ナル時ハ $x=\log.m$ $z=\log.n$ ナリ、nヲ以テmヲ除スル時ハ

$$\frac{m}{n}=a^{x-z}$$

ナルカ故ニ

$$\log.\left(\frac{m}{n}\right)=x-z=\log.m-\log.n$$

ナリ、

第五 凡ソ數ノ乘方ノ對數ハ本數ノ對數ニ乘方ノ自乘標ヲ乘スル者ニ同シ、

何トナレハ $m=a^x$ ナル時ハ $x=\log.m$ ナリ、mヲr乘方ト為ス時ハ

$$m^r=a^{rx}$$

ナルカ故ニ

$$\log.(m^r)=rx=r\log.m$$

ナリ、

第六 凡ソ數ノ方根ノ對數ハ開方目ヲ以テ本數ノ對數ヲ除スル者ニ同シ、

何トナレハ $m=a^x$ ナル時ハ $x=\log.m$ ナリ、mノr乘方根ヲ開ク時ハ

$$\sqrt[r]{m}=a^{\frac{x}{r}}$$

ナルカ故ニ

$$\log.\sqrt[r]{m}=\frac{x}{r}=\frac{\log.m}{r}$$

ナリ、

第四百○五章 夫レ對數ノ要用タルヤ、專ラ筭數ヲ便利ナラシムルニ在リ、上章ニ揭クル所ノ後ノ四性ハ則チ以テ乘除及ヒ乘方開方ノ術ニ代ヘ尋常施術ノ煩勞ヲ省キ、實際加減ノ兩術ヲ以テ、煩難ノ諸術ニ代フルコヲ得ヘシ、

此目的ヲ達セシカ為ニハ、所謂ル對數表ヲ必用ト為ス、其編成タルヤ、豫メ數ノ際限ヲ定メ、限內諸數ノ對數ヲ索メ、或ハ對數ニ相當ノ數ヲ索メテ最近ノ數ヲ得ルニ便スル者ナリ、通常ノ對數表ハ、一箇ヨリ一萬ニ至ルマテノ諸數ノ對數ヲ揭ケ、小數六位ニ至ルマテ正確ナル者ナリ、

此類ノ表ヲ以テ諸數ヲ筭出スルノ法則左ノ如シ、

筭出法

第一 乘法 相乘スヘキ二數ノ對數ヲ索メ之ヲ加ヘテ其和ニ相當スル所ノ數ヲ索ム可シ、是レ即チ求ムル所ノ積ナリ(第四百○四章第三性)

第二 除法 二數ノ對數ヲ索メ法ノ對數ヲ實ノ對數ヨリ減シテ其差ニ相當スル所ノ數ヲ索ム可シ是レ即チ求ムル所ノ商ナリ(第四百○四

章第四性）、

第三　乘方法　本數ノ對數ヲ索メ之ニ本數ノ自乘標ヲ乘シテ其積ニ相當スル所ノ數ヲ索ム可シ是レ即チ求ムル所ノ乘方數ナリ（第四百。四章第五性）、

第四　開方法　本數ノ對數ヲ索メ開方標目ヲ以テ之ヲ除シ其商ニ相當スル所ノ數ヲ索ム可シ是レ即チ求ムル所ノ方根ナリ（第四百。四章第六性）、

原註ニ曰ク、第四百章ニ由レハ、負數ニハ對數ナキカ如シト雖𪜈、若シ負因子ノ算數ニ遇ハヽ、其積或ハ商ノ真價ヲ得ルニ至ルマテ、正負ノ標記ニ拘泥セサレハ則チ對數ヲ以テ負數ヲ算出スルヿヲ得ヘシ、

常法

第四百。六章　一箇ヨリ大ナル正數ハ總テ對數編成ノ基數ト為ス可シト雖𪜈、實用ノ算數ニ於テハ、一十ヲ以テ基數ト為シ、此基數ニ相當スル所ノ數ノ對數ヲ名ツケテ對數編成ノ常法ト

曰フ、

原註ニ曰ク、常法ノ外ニ拿比里（ナピール）編成法ト稱スル者アリ、即チ對數ノ發明人バロン、ナピールノ創テ編成スル所ニ係ル、實用ニ適セスト雖モ、論理上ニ在テハ頗ル緊要ノ者トス、而シテ其他ノ編成法ニ關涉スル所多キハ、之ヲ後章ニ論ス可シ、

第四百〇七章　對數編成ノ常法ヲ以テ、特ニ便益ト為ス所ノ者ハ、之ヲ次ニ示ス可シ、

此編成ノ基數ハ一十ナルカ故ニ對數左ノ如シ、

$$\log 1 = \log.10^0 = 0.$$

$$\log.10 = \log.10^1 = 1.$$

$$\log.100 = \log.10^2 = 2.$$

$$\log.1000 = \log.10^3 = 3.$$

$$\log.10000 = \log.10^4 = 4.$$

凡ソ整數混數ヲ論セス、一箇ヨリ大ニシテ一十ヨリ小ナル諸數ノ對數ハ、總テ小數ノミナリ、若シ一十ヨリ大ニシテ一百ヨリ小ナル諸數ノ對數ハ一箇ニ小數ヲ加フル者ナリ若シ一百ヨリ

大ニシテ一千ヨリ小ナル諸數ノ對數ハ二箇ニ小數ヲ加フル者ナリ、其他皆之ニ準ス、是ニ由テ左則ヲ得、

第一　整數及ヒ混數ノ尋常對數ハ標目正數ニシテ本數整位ノ數ヨリ一箇ヲ減スル者ニ同シ、又一十ノ對數ハ一箇ナルカ故ニ漸次ニ一十ヲ以テ其數ヲ除スレハ其對數ハ毎次一箇ヲ減シ、小數ハ常ニ相同シカル可シ、

比如ハ 5468 ヲ以テ本數ト為シ、mヲ以テ滿質差即チ小數部ト為ス時ハ則チ左ノ如シ、

(壹)

$$\log.5468. = 3 + m$$
$$\log.546.8 = 2 + m$$
$$\log.54.68 = 1 + m$$
$$\log.5.468 = 0 + m$$

(貳)

$$\log..5468 = -1 + m$$
$$\log..05468 = -2 + m$$
$$\log..005468 = -3 + m$$
$$\log..0005468 = -4 + m$$

式中 3 2 1 0 ハ壹式諸對數ノ標目ナリ、−1 −2 −3 −4 ハ貳式諸對數ノ標目ナリ、mハ總テ小數ナリ、

是ニ由テ次則ヲ得、

第二　二數同字ヲ以テ成リ但大小數分界點ノ

位置同シカラサル者ハ常法ノ對數ニ於テ、小數部相同シク標目互ニ異ナル可シ、

第三　小數ノ尋常對數ノ標目ハ負數ナリ而シテ若シ十分一位ニ於テ實數字アル者ハ其對數標目－1ナリ若シ分界點以下實數ニ至ルノ中間ニ零字アル者ハ其對數標目ノ數ハ中間零字ノ數ニ一箇ヲ加フル者ニ同シ、

第四百。八章　小數ノ對數ヲ記スルノ法ニ於テ標目ノ前ニ負標ヲ附シ、次ニ正數ノ小數部ヲ記シテ其中間ニ標記ヲ附セス、是故ニ對數表中ニ若シ左ノ如キ對數ヲ得ル時ハ、負標ハ唯標目2ニノミ屬シテ小數部ニ關セサル者ト知ル可シ、

$$\log .0546 = -2.737193$$

此對數ハ猶ホ下ノ如ク記スル者ノコトシ、

$$-2.+.737193$$

對數算出法

第四百〇九章　對數ヲ以テ算數ヲ為サント欲セハ、必ス對數表ヲ要用トスルカ故ニ、豫メ諸數ノ對數ヲ算出セサル可カラス、實際此算法ヲ行フニハ、各率ノ諸對數ヲ示ス所ノ收縮級數ヲ用フ、比如ハ次式ヲ以テ元式ト為ス、

$$a^x = b \cdots (壹)$$

式中xハbノ對數ナリ、而シテ令此a bニ代フルニ$1+c$ $1+p$ヲ以テス

$$a = 1 + c$$

$$b = 1 + p$$

$$(1+c)^x = 1+p \cdots (貳)$$

貳式中x、即チ$1+p$ノ對數ニシテ基數aニ相當スル者ナリ又貳式ノ兩項ヲn乘方ト為セハ則チ次式ヲ得、

$$(1+c)^{nx} = (1+p)^n$$

雙率式ニ由テ此兩項ヲ開散シテ次式ヲ得、

$$1 + nxc + \frac{nx(nx-1)}{2}c^2 + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{2 \cdot 3}c^3 + \frac{nx(nx-1)(nx-2)(nx-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}c^4 + \cdots = 1 + np + \frac{n(n-1)}{2}p^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}p^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}p^4 + \cdots$$

此兩項ヨリ一箇ヲ去リnヲ以テ之ヲ除シテ次式ヲ得、

$$x\left(c+\frac{(nx-1)}{2}c^2+\frac{(nx-1)(nx-2)}{2\cdot3}c^3+\frac{(nx-1)(nx-2)(nx-3)}{2\cdot3\cdot4}c^4+\cdots\right)=p+\frac{(n-1)}{2}p^2+\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot3}p^3+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot3\cdot4}p^4+\cdots$$

此式ニ於テ、nニ所有ル數價ヲ附與シテ、皆式ニ合スルカ故ニ、$n=0$ト為スモ、亦式ニ合ス可シ、然レハ則チ此式變シテ下ノ如シ、

$$x\left(c-\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{3}-\frac{c^4}{4}+\frac{c^5}{5}-\cdots\right)=p-\frac{p^2}{2}+\frac{p^3}{3}-\frac{p^4}{4}+\frac{p^5}{5}-\cdots\cdots(参)$$

貳式ニ由テ次式ヲ得、

$$x=\log.(1+p)$$

是ニ由テ次式ヲ作ル、

$$M=\frac{1}{c-\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{3}c^3-\frac{1}{4}c^4+\frac{1}{5}c^5-\cdots}\cdots\cdots(肆)$$

参式變シテ下ノ如シ、

$$\log.(1+p)=M\left(p-\frac{p^2}{2}+\frac{p^3}{3}-\frac{p^4}{4}+\frac{p^5}{5}-\cdots\right)\cdots(甲)$$

此式ニ於テ、$1+p$即チbノ對數ヲ得タリ、而シテ其對數タルヤ、兩因子ヲ以テ成リ、其一ハ即チ括弧内ニ在ル所

ノ數ニシテ本數ニ關シ、其二ハ即チMニシテ編成ノ基數ニ關スル者ナリ、

第四百十章　上章ノMニ一定ノ數價ヲ附與スレハ則チ編成ノ基數ヲ算定ス可シ、バロン、ナピールハ左式ノ如ク之ヲ豫定シタリ、

$$M=1$$

此豫定ニ從テ編成ノ基數ヲ算定セレカ為ニ、上章ノ肆式ニ於テMニ代フルニ一箇ヲ以テシ、之ヲ約シテ次式ヲ得、

$$1=c-\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{3}-\frac{c^4}{4}+\frac{c^5}{5}-\cdots\cdots$$

$s=1$トシテ次式ヲ得、

$$s=c-\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{3}-\frac{c^4}{4}+\frac{c^5}{5}-\cdots\cdots$$

級數ヲ轉ス、

$$c=s+\frac{s^2}{1\cdot2}+\frac{s^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{s^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{s^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\cdots$$

sノ數價ヲ復ス、

$$c=1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\cdots$$

此級數十二率ヲ取テcノ最近數價ヲ求ムレハ、

則チ 1.7182818 ヲ得ヘシ、然リト雖トモ、爰ニ 1+C ヲ以テ基數ト為スカ故ニ、此所得ニ一箇ヲ加フ、其和ハ拿比里ノ基數ニ於テ、常ニ e ヲ以テ標記ト為スカ故ニ、左式ヲ得、

$$e=2.7182818$$

是レ即チ拿比里編成法ノ基數ナリ、

第四百十一章 第四百〇九章ノ通法式甲ニ於テ、Mハ基數ニ關スル數量ニシテ、是ヲ編成ノ常因數ト名ツク、拿比里編成法ノ常因數ハ即チ一箇ナリ、

今茲ニ拿比里對數ヲ記スルニ、nap. log. ノ字ヲ以テシ、其他ノ對數ハ單ニ log. ト記スル時ハ其式左ノ如シ、

$$\log.(1+p) = M\left(p - \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4} + \frac{p^5}{5} - \ldots\right) \ldots (壹)$$

$$nap.\log.(1+p) = \left(p - \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4} + \frac{p^5}{5} - \ldots\right) \ldots (貳)$$

貳ヲ以テ壹ヲ除シテ次式ヲ得、

$$M = \frac{\log.(1+p)}{nap.\log.(1+p)} \ldots\ldots (参)$$

$$\{nap.\log.(1+p)\} \times M = \log.(1+p) \ldots (肆)$$

式中Mハ常因數ニシテ、後項ノ對數ヲ編成ス可キ者ナリ、

是故ニ常因數ハ拿比里編成法ヲ變シテ他ノ編成ノ對數ト為ス可キ者ナリ、

第四百十二章　法式甲ノ對數算出法ニ適用セラル可キ者ハ只p數ノ一箇ヨリ少キ時ニ在ルノミ、何トナレハp數若シ一箇ヨリ大ナル時ハ、級數收縮セサルカ故ナリ、然リト雖モ斯ノ如キ級數ハ之ヲ變シテ常ニ收縮ス可キ者ト為スコヲ得ヘシ、

比如ハ對數級數アリ、左式ノ如シ、

$$\log.(1+p) = \mathrm{M}\left(p - \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4} + \frac{p^5}{5} - \cdots\right) \cdots (壹)$$

式中pニ代フルニ-pヲ以テスレハ、則チ次式ヲ得ヘシ、

$$\log.(1-p) = \mathrm{M}\left(-p - \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4} - \frac{p^5}{5} - \cdots\right) \cdots (貳)$$

壹ヨリ貳ヲ減スルニ次式ニ注目シテ参式ヲ得、

$$\log.(1+p) - \log.(1-p) = \log.\left(\frac{1+p}{1-p}\right)$$

$$\log.\left(\frac{1+p}{1-p}\right) = 2\mathrm{M}\left(p + \frac{p^3}{3} + \frac{p^5}{5} + \frac{p^7}{7} + \cdots\right) \cdots (参)$$

若シ $p = \frac{1}{2z+1}$ トスル時ハ、左ノ如シ、

$$\frac{1+p}{1-p} = \frac{z+1}{z}$$

此數價ヲ参式ニ代用シテ次式ヲ得、

$$\log.\frac{z+1}{z} = 2\mathrm{M}\left(\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3(2z+1)^3} + \frac{1}{5(2z+1)^5} + \frac{1}{7(2z+1)^7} + \cdots\right) \cdots (肆)$$

此式ノ前項ハ $\log.(z+1) - \log z$ ニ同シキカ故ニ下式ヲ得、

$$\log(z+1) - \log.z = 2\mathrm{M}\left(\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3(2z+1)^3} + \frac{1}{5(2z+1)^5} + \frac{1}{7(2z+1)^7} + \cdots\right) \cdots (乙)$$

乙法式ノ級數ハ速ニ收縮スルヲ以テ、拿比里、及ヒ常法ノ對數ヲ筭スルニ用ヒテ、頗ル便利ナリ、製表ノ創ニ方テ先ツ $z=1$ ト為シ、次ニ $\log. z=0$ ト為セハ、則チ此法式ニ由テ $\log.(z+1)$ 即チ $\log. 2$ ノ數價ヲ得ヘク、又 $z=2$ ト為セハ、則チ此法式ニ由テ $\log.(z+1)$ 即チ $\log. 3$ ノ數價ヲ得ヘシ、

編成法ノ異同ヲ論セス、直ニ單數原初因子ノ對數ヲ筭出スルヲ以テ第一要務トス複數ニ至テハ第四百。四章第三性ニ従ヒ其因子ノ對數ヲ加ヘテ之ヲ得ヘシ、

第四百十三章 爰ニ乙法式ノ用法ヲ説明センカ為ニ、二、四、五、及ヒ一十ノ拿比里對數ヲ筭出ス可シ、

今 $z=1$ トスレハ拿比里對數ハ則チ次ノ如シ、

$$nap. \log. z=0$$

$$nap. \log.(z+1)=nap. \log. 2$$

而シテ $M=1$ ナルカ故ニ其式下ノ如シ

$$nap. \log. 2=$$

$$2\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\cdots\right)$$

是ニ於テ $\frac{2}{3}$ ヲ以テ成ル所ノ數、及ヒ 3^2 即チ9ヲ以テ漸次ニ $\frac{2}{3}$ ヲ除スル所ノ商ヲ一行ニ記シ、初率ハ一ヲ以テ之ヲ除シ、第二率ハ三ヲ以テシ、第三率ハ五ヲ以テシ、漸次ニ此ノ如ク每率ヲ除シテ、級數ノ各率ヲ得ルコ左ノ如シ、

$$
\begin{array}{rr}
 & .66666666 \\
= & .02469136 \\
= & .00164609 \\
= & .00013064 \\
= & .00001129 \\
= & .00000103 \\
= & .00000010 \\
= & .00000001 \\
\hline
 & .69314718 = nap.\log.2 \\
 & 2 \\
\hline
 & 1.38629436 = nap.\log.4
\end{array}
$$

第四百四章第五性ニ由ル、

3	2	
9	0.66666666	÷1
9	7407407	÷3
9	823045	÷5
9	91449	÷7
9	10161	÷9
9	1129	÷11
9	125	÷13
	14	÷15

復タ $z=4$ ト為セハ $z+1=5$ $2z+1=9$ ナルヲ以テ左式ノ如シ、

$$nap.\,log.\,5=2\left(\frac{1}{1\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 9^{3}}+\frac{1}{5\cdot 9^{5}}+\frac{1}{7\cdot 9^{7}}+\cdots\right)+nap.\,log.\,4$$

$$\begin{array}{r|rr}
9 & 2 & \\
9^{2}=81 & 0.22222222\div 1= & .22222222 \\
81 & 274348\div 3= & 91449 \\
81 & 3387\div 5= & 677 \\
 & 42\div 7= & 6 \\
\hline
 & & .22314354 \ \text{和ノ數級} \\
 & +\,nap.\,log.\,4= & 1.38629436 \\
\hline
 & & 1.60943790=nap.\,log.\,5 \\
 & +\,nap.\,log.\,2= & .69314718 \\
\hline
 & & 2.30258508=nap.\,log.\,10
\end{array}$$

第四百〇四章第三性ニ由ル、

第四百十四章　尋常ノ對數ヲ算出セント欲セハ、先ツ常法ノ常因數ヲ算定セサル可カラス、第四百十一章第三式ニ由テ次式ヲ得、

$$M=\frac{log.(1+p)}{nap.\,log.(1+p)}=.43429448\ (壹)$$

即チ求ムル所ノ常因數價ナリ此數價ヲ以テ、乙式ニ代用スレハ、則チ左式ヲ得ヘシ、

$$\log.(z+1)-\log.z=.86858896\left(\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{3(2z+1)^3}+\frac{1}{5(2z+1)^5}+\frac{1}{7(2z+1)^7}+\cdots\right)\quad\cdots\quad(丙)$$

此法式ヲ適用スルニ$z=10$ト為セハ、則チ左ノ如シ、

$$\log.z=1$$

$$2z+1=21$$

$$\begin{array}{r|l}
21 & .86858896 \\
21^2=441 & 04136138\div1=.04136138 \\
441 & 9379\div3=\quad 3126 \\
 & 21\div5=\qquad\quad 4 \\
\hline
 & .04139268 \quad 和ノ數級 \\
 & \log.z=1.0 \\
\hline
 & \log.(z+1)=1.04139268=\log.11
\end{array}$$

若シ$z=99$ト為ス時ハ$z+1=100$、$2z+1=199$ナリ、是ニ於テ此法式ハ以テ99ノ對數ヲ得ヘシ、蓋シ其理ハ次式ニ由ルナリ、

$$\log.(z+1)-\log.z=\log.100-\log.99=2-\log.99$$

$$\begin{array}{r|l}
199 & .86858896 \\
199^2=39601 & 436477\div1=.00436477 \\
 & 11\div3=\qquad\quad 4 \\
\hline
2-\log.99= & .00436481 \quad 和ノ數級 \\
 & 1.99563519=\log.99 \\
 & \log.11=1.04139268 \\
\hline
 & .95424251=\log.9 \\
\frac{1}{2}\log.9= & .47712126=\log.3
\end{array}$$

足故ニ對數ノ算出ハ只單數ノミニ法式ヲ適用シテ、大ニ便益ヲ得ヘシ、

用表法

第四百十五章　次ノ縮小表ハ以テ對數ノ性質ヲ示シ、巨大ナル表ノ用法ヲ知ラシムルニ足ル可シ、其對數ハ則チ常法ノ編成ニ由ル者ナリ、

第一表

一箇ヨリ一百ニ至ル諸數ノ對數

N 數	log. 對數	N 數	log. 對數	N 數	log. 對數
1	0 000000	16	1 204120	31	1 491362
2	0 301030	17	1 230449	32	1 505150
3	0 477121	18	1 255273	33	1 518514
4	0 602060	19	1 278754	34	1 531479
5	0 698970	20	1 301030	35	1 544068
6	0 778151	21	1 322219	36	1 556303
7	0 845098	22	1 342423	37	1 568202
8	0 903090	23	1 361728	38	1 579784
9	0 954243	24	1 380211	39	1 591065
10	1 000000	25	1 397940	40	1 602060
11	1 041393	26	1 414973	41	1 612784
12	1 079181	27	1 431364	42	1 623249
13	1 113943	28	1 447158	43	1 633468
14	1 146128	29	1 462398	44	1 643453
15	1 176091	30	1 477121	45	1 653213

N	log.		N	log.		N	log.	
46	1	662758	61	1	785330	76	1	880814
47	1	672098	62	1	792392	77	1	886491
48	1	681241	63	1	799341	78	1	892095
49	1	690196	64	1	806181	79	1	897627
50	1	698970	65	1	812913	80	1	903990
51	1	707570	66	1	819544	81	1	908485
52	1	716003	67	1	826075	82	1	913814
53	1	724276	68	1	832509	83	1	919078
54	1	732394	69	1	838849	84	1	924279
55	1	740363	70	1	845098	85	1	929419
56	1	748188	71	1	851258	86	1	934498
57	1	755875	72	1	857333	87	1	939519
58	1	763428	73	1	863323	88	1	944483
59	1	770852	74	1	869232	89	1	949390
60	1	778151	75	1	875061	90	1	954243

N	log.	
91	1	959041
92	1	963788
93	1	968483
94	1	973128
95	1	977724
96	1	982271
97	1	986772
98	1	991226
99	1	995635
100	2	000000

右第一表ニ於テハ、數ノ行ニ接シタル行ニ於テ、對數ヲ揭ケ標目ヲ附ス、

第二表

表中對數ノ標目ヲ脫ス、

9.
003891
008174
012415
016616
020775
024896
028978
033021
037028
040998

右第二表中ニ於テ、上層ニ在ル一列ノ數字ハ、左

N	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
100	000000	000434	000868	001301	001734	002166	002598	003029	003461
101	004321	004750	005181	005609	006038	006466	006894	007321	007748
102	008600	009026	009876	009876	010300	010724	011147	011570	011993
103	012837	013259	013680	014100	014521	014940	015360	015779	016197
104	017033	017451	017868	018284	018700	019116	019532	019947	020361
105	021189	021603	022016	022428	022844	023252	023664	024075	024486
106	025306	025715	026125	026533	026042	027350	027759	028164	028571
107	029384	029789	030195	030600	031004	031408	031812	032216	032619
108	033424	033826	034227	034628	035029	035430	035830	036230	036629
109	037426	037825	038223	038620	039017	039414	039811	040207	040602

代數學卷之五

傍ノ一行ニ在ル、諸數ノ末位ニ附スヘキ者ナリ、斯ノ如クシテ成ル所ノ數ノ對數ハ、左傍ノ數ノ右ニ於テ上層ノ數ノ下ニ之ヲ求ム可シ、而シテ對數ノ論説ニ從ヒ、適當ノ標目ヲ附ス可シ、比如ハ此表ニ於テ1023ノ對數ヲ索ムルニ、先ツ左傍ノ行ニ於テ102ヲ求メ、上層ノ列ニ於テ3ヲ求メ、而シテ左傍ノ數ノ右ニ對シ、上層ノ數ノ下ニ方テ009876ヲ得、是レ即チ對數ノ小數部ナリ、故ニ其對數左ノ如シ、

$$\log 1023 = 3.009876$$

又同法ヲ以テ、下ノ對數ヲ得ヘシ、

$$\log 104.2 = 2.017868$$

$$\log .1078 = -1.032619$$

第一例

第四百十六章　表中ニ出ツル所ノ因子ヲ以テ成ル所ノ數ノ對數ヲ求ムルノ法則アリ、左ノ如シ、

則表中ニ於テ因子ノ對數ヲ求メテ之ヲ加フレハ其和ハ即チ求ムル所ノ對數ナリ

設問

第二　533.5ノ對數ヲ求ム

$$533.5 = 106.7 \times 5$$

$$\log.\ 106.7 = 2.028164$$

$$\log.\ 5 = .698970$$

$$2.727134$$

答

左ノ諸數ノ對數ヲ求ム

第二	520
第三	146
第四	1450
第五	1.59
第六	2034.
第七	76.37
第八	.0201
第九	.3822
第十	16995

第二例

第四百十七章　表中ニ出ツル所ノ數ノ中間ニ

在ル數ノ對數ヲ求ムノ法則アリ、

凡ソ表中ノ對數ハ常ニ正則ノ級數タルカ故ニ其中間ニ對數ヲ挿入セントセハ則チ左ノ如キ尋常ノ法式ヲ用フ可シ、

$$T_{1+n}=a+nd_1+\frac{n(n-1)}{2}d_2+\cdots$$

若シ求ムル所ノ數ノ對數第一表ニ在ル對數ノ中間ニ在ル時ハ、第一第二ノ兩差ヲ取ラサル可カラスト雖𪜈、亦第二表ヲ用フルヿヲ得ヘシ、第二表ニ於テハ對數ノ昇進甚タ遲緩ナルヲ以テ僅ニ法式ノ二率ヲ用テ精算ヲ得ルニ足レリトス、

表中ニ掲クル所ノ數ヲ左ヨリ算シテ第四位ニ至ル者ヲ上位ト名ツケ、其以下ヲ下位ト名ツク、法式ヲ適用スルニ方テaヲ表中ノ對數ト為シ、其數價ハ求ムル所ノ對數ヨリ小ニシテ、且ツ最近ノ者トス、nハ下位ノ數ニシテ小數ト見做ス可キ者ナリ、是ニ由テ左則ヲ得、

則　求ムル所ノ數ハ四上位ノ對數ヲ取リ此對數ト表中其次ニ出ツル所ノ較大ナル對數トノ差ヲ以テ小數ト見做ス所ノ下位ノ數ニ乘シ其積ヲ以テ初ニ得ル所ノ對數ニ加ヘテ求ムル所

ハ對數ヲ得ヘシ、

設問

第一　1.07632ノ對數ヲ求ム、

此數タルヤ1.076ト1.077トノ中間ニ在リ、

$$\log.1.076 - \log.1.077 = 404 = d_1$$

$$n = .32$$

$$a = \log.1.076 = .031812$$

$$nd_1 = 404 \times 32 = \quad 129$$

$$.031941$$

荅、

第二　3579ノ對數ヲ求ム、

第二表ヲ用フルコト左ノ如シ、

$$3579 \div 35 = 102.25714+$$

$$\log.102.3 - \log.102.2 = 425$$

$$n = .5714$$

$$\log.102.2 = 2.009451$$

$$425 \times .5714 = \quad .243$$

$$2.009694 = \log.10225714$$

$$\log.35 = 1.544068$$

$$3.553762$$

荅、

左ノ諸數ノ對數ヲ求ム、

第三	第七	第十一
10724	3244	258.7
第四	第八	第十二
10.8539	365.25638	1.296
第五	第九	第十三
1021.56	132.57	5784
第六	第十	
568.53	567521	

自乘標式

第四百十八章 自乘標式ヲ解クニ方テ、亦對數ヲ適用スルコト左ノ如シ、

第一 $2^x=10$ 式アリ、xノ數價ヲ求ム、

假ニ此式兩項ノ對數ヲ取ル者トスレハ、第四百。四章第五性ニ由テ次式ヲ得、

$$x\log.2=\log.10$$

即チ

$$x=\frac{\log.10}{\log.2}$$

$$=\frac{1}{.301030}$$

$$=3.3219+$$

答

第二 $5^{\frac{2}{x}}=\frac{3}{7}$ 式アリ、xノ數價ヲ求ム、

此式ノ兩項ヲx乘方ト為ス時ハ左ノ如シ、

$$25=\frac{3^x}{7^x}$$

兩項ノ對數ヲ取ル、

$$\log.25=x\log.3-x\log.7$$

$$x=\frac{\log.25}{\log.3-\log.7}=\frac{1.397940}{.477121-.845098}$$

$$=-3.79899+$$

答、

第三 $ra^x=b^2c$ 式アリxノ數價ヲ求ム、

此式兩項ノ對數ヲ取レハ、第四百〇四章第三

及ヒ第五性ニ由テ次式ヲ得

$$\log.r+x\log.a=2\log.b+\log.c$$

是ニ由テ

$$x=\frac{2\log.b+\log.c-\log.r}{\log.a}$$

設問

左ノ自乗標式ニ於テ未知自乗標ノ數價ヲ求ム

第一

$7^x=8$

第二

$5^{\frac{2}{x}}=30$

第三

$a^x=b^2c^3$

第四

$\frac{ab^x-c}{d}$

第五

$ma^{\frac{1}{x}}=b$

第六

$a^x+b^y=2c$

$a^x-b^y=2d$

第七

$729^{\frac{1}{x}}=3$

第八

$316^{\frac{3}{x}}=12$

第九

$516^{\frac{3}{x}}=12$

第十

$6^x=\frac{24^6(17)^{\frac{1}{3}}}{71}$

代數學卷之五終

代數學卷之五答式

東京　石川彝　譯

級數法式應用之部

第一　一百十二、　第二　六千四百四十

第三　始率二、終率三十七、

第四　二千六百二十六、

第五　十三、十九、二十五、三十一、

第六　$d=2$　$l=121$　第七　六百四十九、　第八　二十四分一、

第九　金一千三百三十二圓二十五錢、

第十　十二日、

第十一　$S=\frac{n}{2}(1+n)$

第十二　$S=n^2$

第十三　二、

第十四　一百五十夂、

第十五　一千三百三十四、

數學級數例題之部

第一　一、六、十一、

第二　五、九、十三、十七、二十一

第三　十五、十九、二十三、二十七、

第四　一、三、五、七、

第五　三日、又、十四日、

原註ニ曰ク、此ニ價必ス其一ニ歸ス可シ、

第六　金一圓$\frac{六一}{七二五九}$

第七　四、五、六、七、

第八　三、五、七、九、

第九　二百三十四、

第十　六日、

第十一　二十三石一斗、

幾何級數應用式之部

第一　五百十一、

第二　四千三百七十四、

第三 $\frac{\text{一七四〇七五}}{\text{五九〇四九}}$，

第四 48, 96.

第五 六、十二、二十四、四十八、九十六、一百九十二、三百八十四、

第六 四、

第七 四$\frac{\text{一}}{\text{六}}$

第八 七$\frac{\text{一}}{\text{二}}$

第九 $\frac{\text{三二}}{\text{九九}}$

第十 $\frac{\text{七}}{\text{三三}}$

第十一 三分一、

第十二 六分一、

第十三 $\frac{a}{a-x}$

第十四 $\frac{a}{a^2+x^2}$

第十五 七、

第十六 六千二百五十、

第十七 三、

第十八 金一千〇二十三圓、

幾何級數例題之部

第三 三、六、十二、

第四 三十、六十、一百二十、

第五 二四、八、十六、

第六 四、二十四、一百四十四、八百六十四、

第七 二、四、八

第八 一、三、九、二十七、

第九　五、十五　四十五、

第十　二、六、十八、

第十一　一、三、九、

第十二　二、四、八、

第十三　五、一、斗

第十四　金三圓、二十一圓、三十九圓、五十七圓、

第十五　一、五、二十五、

第十六　三、六、十二、二十四、四十八、九十六、

第十七　三、六、十二、二十四、四十八、九十六、

第十八　金 $\frac{pr(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$ 圓、

應用雙率式之部

第一

$a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

第二

$1+6c+15c^2+20c^3+15c^4+6c^5+c^6$

第三

$x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6+y^7$

第四

$a^{16}-8a^{14}+28a^{12}-56a^{10}+70a^8-56a^6+28a^4-8a^2+1$

第五

$$a^9-9a^8c+36a^7c^2-84a^6c^3+126a^5c^4-126a^4c^5+84a^3c^6-36a^2c^7+9ac^8-c^9$$

第六

$$1+5ax+10a^2x^2+10a^3x^3+5a^4x^4+a^5x^5$$

第七

$$a^{12}-6a^{10}x^2+15a^8x^4-20a^6x^6+15a^4x^8-6a^2x^{10}+x^{12}$$

第八

$$x^{10}-5x^8z^4+10x^6z^8-10x^4z^{12}+5x^2z^{16}-z^{20}$$

第九

$$a^{12}x^6+6a^{10}x^5dy^2+15a^8x^4d^2y^4+20a^6x^3d^3y^6+15a^4x^2d^4y^8+6a^2xd^5y^{10}+d^6y^{12}$$

第十

$$\sqrt{a}\left(1-\frac{x}{2a}-\frac{x^2}{2\cdot4a^2}-\frac{3x^3}{2\cdot4\cdot6a^3}-\frac{3\cdot5x^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8a^4}-\cdots\right)$$

第十一

$$1-\frac{x}{3}-\frac{2x^2}{3\cdot6}-\frac{2\cdot5x^3}{3\cdot6\cdot9}-\frac{2\cdot5\cdot8x^4}{3\cdot6\cdot9\cdot12}-\frac{2\cdot5\cdot8\cdot11x^5}{3\cdot6\cdot9\cdot12\cdot15}-\cdots$$

第十二

$$a^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{4a}-\frac{3}{4\cdot8a^2}+\frac{3\cdot7}{4\cdot8\cdot12a^3}-\frac{3\cdot7\cdot11}{4\cdot8\cdot12\cdot16a^4}+\cdots\right)$$

第十三

$$a^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{b}{3a}-\frac{2b^2}{3\cdot6a^2}+\frac{2\cdot5b^3}{3\cdot6\cdot9a^3}-\frac{2\cdot5\cdot8b^4}{3\cdot6\cdot9\cdot12a^4}+\cdots\right)$$

第十四

$$\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}+\cdots$$

第十五

$$a\left(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+\cdots\right)$$

第十六

$$a+\frac{b^2}{2a}-\frac{b^4}{2\cdot4a^3}+\frac{3b^6}{2\cdot4\cdot6a^5}-\frac{3\cdot5b^8}{2\cdot4\cdot6\cdot8a^7}+\cdots$$

第十七

$$a^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{2c^2}{3a}-\frac{2c^4}{3\cdot6a^2}-\frac{2\cdot4c^6}{3\cdot6\cdot9a^3}-\frac{2\cdot4\cdot7c^8}{3\cdot6\cdot9\cdot12a^4}-\cdots\right)$$

第十八

$$\frac{d}{c}\left(1-\frac{x^2}{2c^2}+\frac{3x^4}{2\cdot4c^4}-\frac{3\cdot5x^6}{2\cdot4\cdot6c^6}+\frac{3\cdot5\cdot7x^8}{2\cdot4\cdot6\cdot8c^8}-\cdots\right)$$

第十九

$$1+3a+6a^2+10a^3+15a^4+21a^5+28a^6+36a^7+\cdots$$

第二十

$$\sqrt{a}\left(a-\frac{3x^2}{4a}-\frac{3x^4}{4\cdot8a^3}-\frac{3\cdot5x^6}{4\cdot8\cdot12a^5}-\frac{3\cdot5\cdot9x^8}{4\cdot8\cdot12\cdot16a^7}-\cdots\right)$$

代用法之部

第一

$$a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$$

第二

$$16a^4+96a^3x+216a^2x^2+216ax^3+81x^4$$

第三

$$1-2a+\frac{3}{2}a^2-\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{16}a^4$$

第四

$$a^8-4a^7x+10a^6x^2-16a^5x^3+19a^4x^4-16a^3x^5+10a^2x^6-4ax^7+x^8$$

第五

$$\sqrt{2a}\left(1-\frac{3x}{16a^2}-\frac{27x^2}{512a^4}-\frac{567x^3}{24576a^6}-\cdots\right)$$

第廿一

$$\frac{1}{a^4}-\frac{4y}{a^5}+\frac{10y^2}{a^6}-\frac{20y^3}{a^7}+\frac{35y^4}{a^8}-\frac{56y^5}{a^9}+\cdots$$

第廿二

$$r+\frac{r^2}{5}+\frac{6r^3}{2\cdot5^2}+\frac{6\cdot11r^4}{2\cdot3\cdot5^3}+\frac{6\cdot11\cdot16r^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5^4}+\cdots$$

第廿三

$$1-\frac{x^4}{15}-\frac{14x^8}{2\cdot15^2}-\frac{14\cdot29x^{12}}{2\cdot3\cdot15^3}-\frac{14\cdot29\cdot44x^{16}}{2\cdot3\cdot4\cdot15^4}-\cdots$$

其二

第一

$$16x^4+160x^3y+600x^2y^2+1000xy^3+625y^4.$$

第二

$$32a^5-240a^4x+720a^3x^2-1080a^2x^3+810ax^4-243x^5.$$

第三

$$729+5832x^2+19440x^4+34560x^6+34560x^8+18432x^{10}+4096x^{12}.$$

第四

$$\frac{81}{256}a^4+\frac{27}{20}a^3r+\frac{54}{25}a^2r^2+\frac{192}{125}ar^3+\frac{256}{625}r^4.$$

第五

$$\frac{64}{725}t^6+\frac{32}{27}t^5r+\frac{20}{3}t^4r^2+20t^3r^3+\frac{135}{4}t^2r^4+\frac{243}{8}tr^5+\frac{729}{64}r^6.$$

第六

$$\frac{m^5}{1024}-\frac{m^4}{256}+\frac{m^3}{160}-\frac{m^2}{200}+\frac{m}{500}-\frac{1}{3125}.$$

第七

$$\frac{m^8}{258}-\frac{m^6}{32}+\frac{7m^4}{64}-\frac{7m^2}{32}+\frac{35}{128}-\frac{7}{32m^2}+\frac{7}{64m^4}-\frac{1}{32m^6}+\frac{1}{256m^8}.$$

不開方根化級數之部

第一

2.080084

第二

3.141381

第三

4.641589

第四

4.791420

第五

3.122851

第六

1.978602

第七

1.319508

第八

5.047104

第九

1.993235

分數化級數之部

第一

$$1-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^4}{a^4}-\cdots\cdots$$

第二

$$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^4}{a^4}+\cdots\cdots$$

第三

$$1+2x+2x^2+2x^3+2x^4+\cdots\cdots$$

第四

$$\frac{1}{a}-\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^4}{a^5}-\frac{x^6}{a^7}+\frac{x^8}{a^9}-\cdots\cdots$$

無究倍數法之部

第一

$$1+x+x^2+9x^3+27x^4+81x^5+\cdots\cdots$$

第二

$$1+3x+4x^2+7x^3+11x^4+18x^5+\cdots\cdots$$

第三

$$1+2x+8x^2+28x^3+100x^4+356x^5+\cdots\cdots$$

第四

$$x+9x^2+32x^3+92x^4+240x^5+\cdots\cdots$$

第五

$$1+a-a^3-a^4+a^6+a^7-a^9-a^{10}+\cdots\cdots$$

第六

$$1+x+5x^2+13x^3+41x^4+\cdots\cdots$$

第七

$$1+3x+4x^2+7x^3+11x^4+18x^5+\cdots\cdots$$

第五

$$\frac{2}{3x}+\frac{4}{9}+\frac{8x}{27}+\frac{16x^2}{81}+\frac{32x^3}{243}+\cdots\cdots$$

第六

$$1-2x^2+x^4+4x^6-11x^8+10x^{10}+13x^{12}+\cdots\cdots$$

第七

$$1+(1-2a)x-(2a-3a^2)x^2+(3a^2-4a^3)x^3-\cdots\cdots$$

第八

$$1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2\cdot4}-\frac{3x^3}{2\cdot4\cdot6}-\frac{3\cdot5x^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8}-\cdots\cdots$$

第九

$$1+\frac{3x}{2}+\frac{11x^2}{8}+\frac{23x^3}{16}+\frac{179x^4}{128}+\cdots\cdots$$

第十

$$1-3x^2+5x^4-7x^6+9x^8-11x^{10}+\cdots\cdots$$

級數轉倒之部

第一

$$x=y-y^2+y^3-y^4+y^5-\cdots\cdots$$

第二

$$x=y-3y^2+13y^3-67y^4+381y^5-\cdots\cdots$$

第三

$$y=x+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots$$

第四

$$x=y+y^3+2y^5+5y^7+14y^9+\cdots\cdots$$

第五

$$x=\frac{y}{2}-\frac{3y^3}{16}+\frac{19y^5}{128}-\frac{152y^7}{1024}+\cdots\cdots$$

第六

$$y=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{8}-\frac{7x^4}{8}+\frac{21x^5}{16}-\cdots\cdots$$

又

第一

$x=.117647$

第二

$x=.454620$

第三

$x=.201369$

第四

$x=.274655$

反覆級數之部

第一 $\dfrac{1+2x}{1-x-x^2}$

第二 $\dfrac{1+5x}{1-x-6x^2}$

第三 $\dfrac{1+6x}{1+4x-3x^2}$

第四 $\dfrac{1+3x+x^2}{1-x+2x^2-3x^3}$

第五 $\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$

第六 $\dfrac{1-x}{1-2x-3x^2}$

第七 $\dfrac{(1+x)^2-2x^2}{(1-x)^2-2x^3}$

第八 $\dfrac{x}{2-4x^2-6x^4}$

微分法之部

第一 53

第二 680

第三 771 1231

第四 8000

第五 $\dfrac{n(n+1)}{2}$

第六 $\dfrac{n(n+1)(n-2)}{6}$

第七 $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$

第八 1540

第九 2366

第十 2755

第十一 $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

第十二 $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

第十三 $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

第十四 $\dfrac{(n^2+n)^2}{4}$

第十五

$$\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$

第十六

$$\frac{n(n+1)(1+2n+3m)}{6}$$

挿入法之部

第一	2.773083
第二	2.796722
第三	2.778785
第四	2.812613
第五	2.830783

第六

2.833525

又

第一	67° 41′ 39″
第二	69° 16′ 13″
第三	70° 50′ 22″
第四	73° 57′ 23″
第五	75 30′ 16″

第六

77° 2′ 44″

第七

80° 6′ 27″

第八

81° 37′ 43″

第九

83° 8 35

用表法第一例之部

第二

2.716003

第三

2.164353

第四

3.161368

第五

201397

第六

3.308351

第七

1.882923

第八

−2.303196

第九

−1.582290

第十

4.230321

用表法第二例之部

第三

4.030357

第四

1.035586

第五

3.009264

第六

2.754753

第七

3.511081

第八
2.562598

第九
2.122445

第十
5 753982

第十一
2.412790

第十二
112605

第十三
3.762228

自乘標式之部

第一
$x = 1.06862$

第二
$x = .94640$

第三
$$x = \frac{2\log.b + 3\log.c}{\log.a}$$

第四
$$x = \frac{\log.(md+c) - \log.a}{\log.b}$$

第五
$$x = \frac{\log.a}{\log.b - \log.m}$$

第六
$$x = \frac{\log.(c+d)}{\log.a}$$
$$y = \frac{\log.(c-d)}{\log.b}$$

第七
$x = 6$

第八
$$x = \frac{9\log.6}{\log.12}$$

第九

$$x = \frac{3 \log 43}{\log 12} + 3$$

第十

$$x = \frac{18 \log . 24 + \log . 17 - 3 \log . 71}{3 \log . 6}$$

代數學卷之五答式終