石川彝譯

代數學

六

代數學巻之六

東京　石川彝譯

第十綱　方程式性質

通性

第四百十九章　設如ハ左ノ方程式アリ、

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}\cdots+Tx+U=0\cdots(\text{壹})$$

式中ノ自乗標mニ變數ノ違差アリト雖氏、mハ整數ニシテ正數ナリ、若シ此式ノ如クナラサル者ハ、諸率ヲ前項ニ移シ、未知數ノ遞減自乗標ニ從テ位次ヲ立テ、始率ノ倍數ニ以テ

悉皆各率ヲ除シ、以テ本式ノ形ヲ成サシム可シ、式中ABC等ハ何ノ數タルヲ論セス、或ハ正數タリ負數タリ、或ハ整數タリ分數タリ、或ハ適合數タリ不合數タリ、或ハ眞數タリ想像數タルモ可シ、

終率Uハ即チx^0ノ倍數ト見做ス可シ、而シテ式中ノ自由率ナリ、

第四百二十章　方程式中xノ自乘標、若シm乘ヨリ以下零乘ニ至ルマテ、毎次全備スル者ハ之ヲ完全式ト曰ヒ、中間闕漏アル者ハ之ヲ未完式ト曰フ、若シ未完式ヲ以テ完全式ト為サント欲セハxノ自乘標闕漏スル所ニ於テ一率ヲ設ケ、± 0ヲ以テ其倍數ト為セハ、則チ闕ヲ補ヒ以テ完全ノ形狀ヲ成サシム可シ、

第四百二十一章　凡ソ一元二次方程式ハ、之ヲ解テ初乘ノ双率兩因子ト為ス可キハ、既ニ上（巻之四第三百〇五章）ニ之ヲ示シタリ、而シテ其未知數ヲ以テ之ヲ視レハ、兩因子ノ前率ハ即チ未知數ナリ、又後率ハ必ス該式平方根ノ一ニシテ、正負ノ標記相反シ兩因子ハ到底零トナル可キ

者ナリ、故ニ吾輩斷シテ曰ハントス、凡ソ二次方程式ハ、一次ノ雙率兩因子相乘ノ積ト見做スコヲ得ヘシト

又一次ノ雙率三因子ノ積ハ、未知數ニ於テ之ヲ視レハ則チ以テ三次方程式ト為ス可キ者ナリ、而シテ雙率因子ノ後率變化スレハ、其積モ亦隨テ變化セサルヲ得ス、比如ハ左式ノ如シ、

$$(x-2)(x+3)(x-5)=x^3-4x^2-11x+30$$

$$(x-2+\sqrt{-3})(x-2-\sqrt{-3})\left(x+\frac{7}{4}\right)=x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{49}{4}$$

$$(x+1-\sqrt{-3})(x+1+\sqrt{-3})(x-2)=x^3-8$$

此等ノ例ヲ推シテ類ヲ擴メシニ、隨テ揭クレハ隨テ增ス可シト雖𪜈、xヲ以テ之ヲ視レハ皆三次方程式ニ屬シ、一次ノ三率ヲ相乘シテ成ル者ナリ、是レ當ニ三次式ノ三ナラス凡ソ未知數ノm乘方程式ニ於テハ、一次ノ未知數因子ノ數mヲ相乘シテ成ル者ナリ、

第四百二十二章　未知數xヲ有ツ所ノ複率ヲ以テ零ニ同フシテ方程式ヲ作レハ、必ス前項ニ雙率因子$x-a$ヲ見ル可シ、而シテ其aナル者ハ、式ノ方根タルヤ明ケシ、蓋シ之ヲ以テxニ代用スレハ則チ前項零トナルカ故ナリ、

若シ方程式ノ前項ニ於テ、初乗ノ雙率因子ヲ求メ得レハ、式ノ方根ハ即チ此因子中ニ在ル所ノxノ數價ニシテ、每因子皆零トナル可シ、

此ノ如ク方程式ノ前項ヲ解テ、初乗ノ雙率因子ト為スノ術ハ悉ク煩難ニシテ、且ツ式ノ次數ト共ニ愈煩雜ヲ增ス者ナリ、而シテ四次以上ノ式ニ至テハ、代數學士未タ解式ノ定法ヲ發明セス、然リト雖𪜈眞數式ニ於テ、方根若シ同率ナル者ハ、之ヲ精算スルヿヲ得ヘク、若シ不同率ナル者ハ、最近數ヲ取テ殆ト眞價ニ迫ルヿヲ得シ、

第四百二十三章　$x+a$　$x+b$　$x+c$ノ如ク始率相同シク、次率異リタル雙率因子數多相乗ノ積ニ通スル所ノ法則ヲ定メンカ為ニ、先ツ此等數多ノ諸因子ヲ實ニ相乗シタル積ヲ求ムレハ、則チ左式ノ如シ、

$$\begin{array}{l}
x+a \\
x+b \\
\hline
\begin{array}{l|l}
x^2+a & x+ab \\
+b &
\end{array}
\end{array}\Bigg\} = (x+a)(x+b)$$

$$\begin{array}{l}
x+c \\
\begin{array}{l|l|l}
x^3+a & x^2+ab & x+abc \\
+b & +ac & \\
+c & +bc &
\end{array}
\end{array}\Bigg\} = (x+a)(x+b)(x+c)$$

$$\begin{array}{l}
x+d \\
\begin{array}{l|l|l|l}
x^4+a & x^3+ab & x^2+abc & x+abcd \\
+b & +ac & +abd & \\
+c & +bc & +acd & \\
+d & +ad & +bcd & \\
 & +bd & & \\
 & +cd & &
\end{array}
\end{array}\Bigg\} = (x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$$

此等ノ諸積ヲ玩味シテ左ノ二條ヲ決定ス、

第一條　總積中ノ主字xノ自乘標ハ、始率ニ於テ雙率因子ノ數ノ如ク、第二率以下右方ニ移ルニ從テ每率一箇ヲ減シ、終率ニ至ルニ及テ遂ニ零ト為ル、

第二條　始率ノ倍數ハ一箇ニシテ、第二率ノ倍數ハ雙率因子後率ノ和ニ同シク、第三率ノ倍數ハ雙率因子後率ヲ兩々相乘シタル各異諸積ノ和ニ同シク、第四率ノ倍數ハ雙率因子後率ヲ三々相乘シタル各異諸積ノ和ニ同シク、終率ハ即

チ自由率ニシテ、雙率因子ノ後率ヲ陸續相乘シタル積ナリ、

右第二條ニ示ス所ニ由レハ相乘スル所ノ雙率因子ハ、其數許多アリト雖氏、第n率ノ次ナル一率ノ倍數ハ每ニ雙率因子ノ後率ヲnツヽ相乘シテ、成ル所ノ各異諸積ノ和ニ同シキ者タルヲ知ル可シ、

上ニ說ク所ノ法則ハ、雙率因子ノ數mニ至ルモ、猶ホ此ノ如シト考定ス可ク、而シテ若シ後タ新因子ヲ增シテ之ヲ乘スル氏、其積モ亦此法則ニ

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\cdots Mx^{m-n+1}+Nx^{m-n}+\cdots Tx+U$$

從フ可クンハ、則チ其通則ヲ定ムルヿヲ得ヘシ、仍テ茲ニ$x+a$ $x+b$以下$x+p$ニ至ルマテノ雙率因子ノ數ヲmト為シ、以テ其積ヲ設クルヿ上ノ如シ、

今此積ノ成法ハ、猶ホ實ニ諸因子ヲ相乘シタルカ如ク一般ニシテ、更ニ前ノ法則ヲ變革スルヿ無キ者トス、

復タ之ニ新因子$x+q$ヲ乘スレハ、則チ其積左ノ如シ、

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots Mx^{m-n+1} + Nx^{m-n} + \cdots Tx + U$$
$$x + q$$
$$x^{m+1}\left.\begin{matrix}+A\\+q\end{matrix}\right|x^{m}\left.\begin{matrix}+B\\+Aq\end{matrix}\right|x^{m-1}+\cdots\left.\begin{matrix}N\\+Mq\end{matrix}\right|x^{m-n+1}+\cdots\left.\begin{matrix}+U\\+Tq\end{matrix}\right|x\;+Uq$$

此積ニ於テ之ヲ視レハ、自乘標ハ更ニ上ノ法則ヲ變スルコ無シ、又倍數ハ始率ニ於テ一箇ナリ、第二率ニ於テハ$A+q$ナリ而シテAハ従前所設ノ積ニ於テ、雙率因子mノ後率ノ和ナルカ故ニ、$A+q$ハ則チ雙率因子$m+1$ノ後率ノ和ナリ、第三率ノ倍數ハ$B+Aq$ナリ、前ノ積ニ由レハ、Bハm雙率因子ノ後率ヲ両々一緒ニ相乘シタル各異諸積ノ和ニシテ、Aqハ新因子$x+q$ヲ乘シタルニ由テ、更ニ増ス所ノ新積ナルカ故ニ、$B+Aq$ハ$m+1$雙率因子ノ後率ヲ両々相乘シタル各異諸積ノ和ナリ、又其以下總テ第n率ノ次ナル一率ノ倍數ハ$N+Mq$ナリ、蓋シNハ若干ノ雙率因子ノ後率ヲnツヽ相乘シタル各異諸積ノ和ニシテ、Mハ雙率因子ノ後率ヲ$n-1$ツヽ相乘シタル各異諸積ノ和ナルカ故ニ、Mqハ新因子$x+q$ヲ乘シタルニ由テ、更ニ一因子ヲ増シ其後率ヲnツヽ相乘シタル各異諸積ノ和ナリ、斯ノ如ク實際ノ乘術ヲ以テ、雙率因子mヲ相乘

シタル積ノ法則ヲ試ルニ、既ニ四因子ニ至テ更ニ變革ナシ、然レハ則チ五因子ニ至ルモ亦變革ナカル可ク、六七因子モ亦斯ノ如クナルヲ知ル可シ、是ヲ以テ此法則ハ即チ以テ通則ト為ス可シ、

第四百二十四章　方程式ノ方根各率ノ倍數ハ其成法左ノ如シ、

比如ハ m ヲ以テ雙率因子若干ノ數ト為シ、$x-a$ $x-b$ $x-c$ 中畧 $x-p$ $x-q$ ヲ以テ雙率因子ト為シ而後率 a b c 等ハ何ノ數タルヲ論セス、前章ニ示ス所ノ如ク、此等ノ諸因子ノ積ヲ以テ、陸續 x ノ遞減自乘標ニ從ヒ位次ヲ立ツレハ、則チ左ノ形狀ヲ為ス可シ、

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\cdots\cdots+Sx^2+Tx+U$$

積中ABC等ノ數價ハ、則チ左式ノ如シ、

$$\left.\begin{array}{l}(x-a)(x-b)(x-c)\cdots\\(x-p)(x-q)\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\cdots\\+Sx^2+Tx+U\end{array}\right\}\text{(壹)}$$

此式ノ後項ヲ零トスレハ、則チ次式ノ如シ、

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\cdots Sx^2+Tx+U=0\cdots\text{(貳)}$$

式中$a\ b\ c$中畧$p\ q$ハ方根ナルヲ以テ、壹式ノ前項各因子ノxニ代用スレハ、則チ、前項ヲ消滅ス可ク、仍テ又後項ヲ消減セシム可シ、是故ニA B C等ノ倍數及ヒ貳式ノ方根ノ間ニ存スル所ノ關涉左ノ如シ、

$$A=-a-b-c\cdots\cdots-p-q$$

$$B=+ab+ac+bc+\cdots\cdots+ap+aq$$

$$C=-abc-bcd-acd\cdots\cdots-abp-abq$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S=\pm abcd\cdots pq_{m-2}\pm bcde\cdots pq_{m-2}\pm\cdots$$

$$T=\mp abcde\cdots pq_{m-1}\mp bcdef\cdots pq_{m-1}\mp\cdots$$

$$U=\pm abcd\cdots pq_m$$

式中諸率ノ下ニ附記スル所ノ$m-2$ $m-1$ mハ、其各率ニ採ル可キ字因ノ數ヲ示ス者ナリ、是ニ由テ次ノ一致式ヲ得、

第一則　第二率ハ倍數ハ小字諸方根ノ和ニ同シクシテ標記相反スル者ナリ、

第二則　第三率ハ倍數ハ小字方根ヲ兩〻相乘シテ成ル所ノ各異諸積ノ和ニ同シ、

第三則　第四率ノ倍數ハ小字方根ヲ三〻相乘シテ成ル所ノ各異諸積ノ和ニ同シクシテ標記相反スル者ナリ、

第四則　凡ソ第n率ノ次率倍數ハ小字方根ヲnツヽ相乘シテ成ル所ノ各異諸積ノ和ニ同シクシテn若シ奇數ナル時ハ標記相反スル者ナリ、

第五則　自由率ハ陸續各方根ヲ相乘シタル者ナリ而シテ若シ方程式ノ次數奇數ナル時ハ其標記ヲ反ス、

以上五則ハ已知方根ヲ以テ方程式ヲ作ル可ク、又壹式ノ成立ニ由テ貳式ハ豫定ノ方根ノミヲ以テ成リ他率ヲ交ユ可カラサルヲ知ル可シ何トナレハxノ數價タルヤ壹式ノ前項ヲ消失セシムル所ノ方根ニ異ナルヿ無キヲ以テナリ、是ニ由テ之ヲ觀レハ未知之數ノ方程式ハ其次

數ノ自乘標中ニ含有スル所ノ一箇ト同數ノ方根ヲ含有シ、決シテ其餘ヲ含有スルヿ能ハサル者ナリ、

第四百二十五章　未知一數ノ方程式ハ、眞數或ハ想像數トモ、必ス方根ヲ有ツ者ト為ス時ハ、第m次方程式ノ後項零ナレハ、其前項ハ未知數ヲ以テ之ヲ視レハ、一次ノm雙率因子ヲ陸續相乘シタルノ積ト見做スヿヲ得ヘシ、仍テ茲ニ先ツ左式ヲ設ケ式中ニ一方根アル時ハ、其前項ハ$x-a$ヲ以テ之ヲ整除ス可キヲ證ス可シ、

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots Tx + U = 0 \cdots\cdots(壹)$$

此式ニ除術ヲ施セハ、其剩餘ハ終ニx字ナキニ至ル可ク、且ツ各商必ス一率ヲ得ルカ故ニ、新實ハ必ス舊實ヨリモ一次ヲ減ス可シ、

若シ其商ヲ以テQト為シ、剩餘ヲ以テRト為セハ則チ次ノ一致式ヲ得、

第四百二十六章　上章ニ説ク所ノ者ヲ反覆シテ、左式ノ前項若シ x a ヲ以テ整除ス可キ時ハ a ハ、必ス式中ノ一方根タル可シ、

$$x^m+Ax^{m-1}Bx^{m-2}+\cdots Tx+U=0$$

此ニ除術ヲ施シ、所得ノ商ヲ以テQト為セハ則チ次ノ一致式ヲ得ヘシ、

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\cdots Tx+U=Q(x-a)$$

此式ニ於テ $x=a$ ナルヲ以テ、此式ノ後項ヲ消滅スルカ故ニ、前項ヲ消滅ス可ク、仍テ式ニ合ス可シ、

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\cdots Tx+U=Q(x-a)+R\cdots(貳)$$

式中ノ x ニ代フルニ a ヲ以テスレハ、此式ノ前項及ヒ後項ノ第一率ヲ消滅ス可ク、又 $R=0$ ニシテR中ニハ x ヲ含有セサルノ豫定ナルカ故ニ假令ヒ x ニ何ノ數價ヲ附スルモ、此式必ス皆零ナル可ク且ツ之ヲ整除スルヿヲ得ヘシ、

$$x^{m}+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\cdots Tx+U=0$$

第二百四十七章　凡ソ未知一數ノ方程式ニ於テ方根ノ數ハ自乘標ニ顯ハル、所ノ次數ニ同シク、決シテ其餘ヲ有ツ可カラサル者トス、

比如ハ上式ニ於テ一方根ヲaト為セハ、$x-a$ハ則チ其前項ノ一因子タル可ク(第四百二十五章)、$x-a$ヲ以テ衆率$x^{m}+Ax^{m-1}+\cdots Tx+U$ヲ除シテ得ル所ノ商ハ、則チ左ノ如シ、

$$x^{m-1}+A'x^{m-2}+\cdots\cdots T'x+U'$$

是ニ由テ、次ノ一致式ヲ得、

$$\left.\begin{array}{l}x^{m}+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}\\ \quad+\cdots\cdots Tx+U\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}(x-a)(x^{m-1}+A'x^{m-2}+\cdots\cdots\\ \quad T'x+U')\end{array}\right.$$

此式ノ後項ハxノ數價ニ拘ラス、其一因子零ナルカ故ニ消失ス可シ、是ニ於テ又次ノ式ヲ作ル、

$$x^{m-1}+A'x^{m-2}+\cdots T'x+U=0$$

此式ノ方根ヲ以テbトスレハ則チ左式ヲ得ヘシ、

$$\left.\begin{matrix} x^{m-1}+A'x^{m-2}+\cdots \\ T'x+U' \end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}(x-b)(x^{m-2}+A''x^{m-3}+\cdots \\ T''x+U'')\end{matrix}\right.$$

斯ノ如ク第一第二ノ一致式ヲ作リ、又同法ヲ以テ第三式ヲ作リ、漸次ニ第四第五式等ヲ作リテ、終ニ第$(m-1)$ノ一致式ニ至ラハ、其後項ノ第二因子ハxヲ以テ之ヲ視レハ一次ト為ル可シ、

此式ノ前項ニ代フルニ第一式ノ後項ヲ以テシ、漸次斯ノ如クシテ其始ニ復ルニ至ラハ、其所得ハ則チ左ノ一致式ノ如クナル可シ、

$$\left.\begin{matrix} x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2} \\ +\cdots Tx+U \end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}(x-a)(x-b)(x-c)\cdots \\ (x-p)(x-q)\end{matrix}\right.$$

此後項ハ其諸因子ノ數價m中ノ各價ニ對シテ必ス消滅ス可シ、盖シm數價ハ則チ左ノ如キカ故ナリ

$x=a$

$x=b$

$x=c$

$\cdots\cdots$

$x=p$

$x=q$

此等ノ諸價ハ則チ各左式ノ方根ナル可シ、

$$x^m + Ax^{m-1} + B^{m-2} + \cdots Tx + U = 0$$

此ニ於テ若シxノ數價、右ノ諸價ト異ナル時ハ、決シテ式ニ合スルコト能ハス、蓋シ其他ノ數價ニ在テハ一致式ノ後項ニ於テ一因子ヲ零ト為スコト能ハサルヤ固ヨリナリ、是故ニ式中只m方根アリ、絶テ剰餘ナシト云フ、

第四百二十八章　以上說ク所ノ理ニ由テ、左ノ諸件ヲ決定ス、

第一條　方程式ノ第二率、即チ未知數ノ最高自乘擦ニ次ク者ヲ含有セル一率ヲ失スル者ニ於テ其方根ノ代數和ハ零ナリ、

第二條　方程式中一モ自由率ナキ者ハ、其一率必ス零ナリ、

第三條　自由率ハ式中諸方根ノ積ナルカ故ニ、各方根ヲ以テ之ヲ整除ス可シ、

第四條　豫メ方根ヲ定メテ之ヲ含有スル所ノ方程式ヲ作ルコトヲ得ヘシ、

第五條　方程式ノ次數ハ一方根ヲ知ル毎ニ一次ヲ減シテ之ヲ約スルコトヲ得ヘシ、

設問

第一　$+2$　-3ヲ以テ方根ト為ス所ノ方程式ヲ求ム、

第二　$+1$　-2　-4ヲ以テ方根ト為ス所ノ方程式ヲ求ム、

第三　$+3$　-2　-1　$+5$ヲ以テ方根ト為ス所ノ方程式ヲ求ム、

第四　方程式ノ方根　$1+\sqrt{-5}$　$1-\sqrt{-5}$　$+\sqrt{-5}$　$-\sqrt{-5}$　ナル者ヲ問フ、

第五　方程式ノ方根　-1　-2　$+3$　$2+\sqrt{-3}$　$2-\sqrt{-3}$　ナル者ヲ問フ、

第六　方程式　$x^3-5x^2+13x-21=0$　ノ一方根ハ$+3$ナリト云フ、其約式ヲ求ム、

第七　方程式

$$x^4+2x^3-34x^2+12x+35=0$$

ノ一方根−7ナリ、其約式ヲ求ム、

第八　方程式

$$x^4-3x^3-4x^2+30x-36=0$$

ノ二方根+2 −3ナリ、其約式及ヒ他ノ方根ヲ問フ、

第四百二十九章　方程式中ニ分數ノ倍數アル者ハ、其形狀ヲ變化シテ諸倍數ヲ整數ト為シ第一倍數ヲ一箇ト為スヿヲ得ヘシ、

方程式第一率ノ倍數一箇ニ非サル者ハ、其倍數ヲ以テ全式ヲ除シテ以テ一箇ト為ス可シ、然レハ則チ其式ノ形狀次ノ如シ、

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\cdots Tx+U=0$$

式中ABC等ノ倍數ハ分數ト為ルヿアル可シ、

是故ニ $x=\frac{y}{a}$ ト為シ、a ハ全ク隨意ノ數ニシテ式中ノ x ニ代用シタル者トスレハ、則チ上式變シテ左ノ如シ、

$$\frac{y^m}{a^m}+A\frac{y^{m-1}}{a^{m-1}}+B\frac{y^{m-2}}{a^{m-2}}+\cdots T\frac{y}{a}+U=0$$

此ニ a^m ヲ乘シテ次式ヲ得、

$$y^m+Aay^{m-1}+Ba^2y^{m-2}+\cdots Ta^{m-1}y+Ua^m=0$$

令 a ハ隨意ノ數ナルカ故ニ其數價及ヒ其自乘標ニ於テ原式固有分數ノ分母ヲ有ツ者ト為スコヲ得ヘシ、之ヲ辨明セシカ為ニ左ニ數例ヲ掲ク、

第一　左ノ方程式ヲ變化シテ分數ノ倍數ヲ省キ第一率ノ倍數ヲ一箇ト為ス可シ、

$$x^3+\frac{ax^2}{m}+\frac{bx}{n}+\frac{c}{p}=0$$

是ニ於テ $x=\frac{y}{mnp}$ ト為シ、x ノ此數價ヲ式ニ代用シテ次式ヲ得、

$$\frac{y^3}{m^3n^3p^3}+\frac{ay^2}{m^3n^2p^2}+\frac{by}{mn^2p}+\frac{c}{p}=0$$

$m^3n^3p^3$ ヲ以テ此各率ニ乘ス、

$$y^3+anpy^2+bm^2np^2y+cm^3n^3p^2=0$$

若シ原式倍數ノ分母ニ通因子アル者ハ、諸分母ノ最小公除數ヲ以ク

テyヲ除スル者ヲ以テxニ同シト為スヿヲ得ヘシ、

第二　左ノ方程式ヲ變シテ分數ノ倍數ヲ省キ第一率ノ倍數ヲ一箇ト為ス可シ、

$$x^3+\frac{ax^2}{pm}+\frac{bx}{m}+\frac{c}{p}=0$$

此式ノ如キハ只$x=\frac{y}{pm}$ト為スヲ以テ足レリトス、然リ而シテxノ此數價ヲ代用シテ次式ヲ得、

$$\frac{y^3}{p^3m^3}+\frac{ay^2}{p^3m^3}+\frac{by}{pm^2}+\frac{c}{p}=0$$

p^3m^3ヲ以テ各率ニ乘シテ、變式ヲ得ルヿ下ノ如シ、

$$y^3+ay^2+bp^2my+cp^2m^3=0$$

第三　左ノ方程式ヲ變シテ分數ノ倍數ヲ省ク可シ、

$$x^4+\frac{5x^3}{6}+\frac{3x^2}{4}+\frac{7x}{24}+\frac{1}{12}=0$$

答

$$y^4+20y^3+18\cdot24y^2+7(24)^2y+2(24)^3=0$$

凡ソ分數方程式ヲ變シ、他ノ未知數ニ於テ整數式ト為サントス欲セハ、必ス最小ノ約式ヲ、以テスルヲ要トス、蓋シ分母ノ最小公除數ハ必シモaノ最小數價タルヲ得サルカ故ニ、直ニ之ヲ以テ答ト為ス可カラス、毎ニ分母ヲ解テ各〻其原初因子ト為セ

ハ、則チaノ因子ト為ス可キ諸因子ノ乗方ヲ判斷スル亦難キニアラサル可シ、

是等ノ辨解ハ次例ノ説明ヲ参考スレハ、則チ自カラ明亮ナル可シ、

第四　左ノ方程式ヲ變シ、最小整數ノ倍數ト為ス可シ、

$$x^3-\frac{3}{35}x^2+\frac{13}{2450}x-\frac{17}{68600}=0$$

xニ代フルニyヲ以テシ、第二第三第四ノ各率ニa a^2 a^3ノ各一ヲ乗シテ次式ヲ得、

$$y^3-\frac{3}{35}ay^2+\frac{13}{2450}a^2y-\frac{17}{68600}a^3=0$$

此分母ノ原動因子ヲ解ケハ、則チ左ノ如シ、

$7\cdot5$

$7^2\cdot5^2\cdot2$

$7^3\cdot5^2\cdot2^3$

令$a=7\cdot5\cdot2$トスレハ

上式變シテ次ノ如シ、

$$y^3-\frac{3\cdot7\cdot5\cdot2}{7\cdot5}y^2+\frac{13\cdot7^2\cdot5^2\cdot2^2}{7^2\cdot5^2\cdot2}y-\frac{17\cdot7^3\cdot5^3\cdot2^3}{7^3\cdot5^2\cdot2^3}=0$$

之ヲ約シテ次式ヲ得、

$$y^3-6y^2+26y-85=0$$

右ノ例ニ於テ分母ノ最小公除數 $7^3.5^2.2^3$ ナリ、若シ
之ヲ a ト為シテ $7.5.2$ ヲ取ラサレハ則チ變式ノ倍
數ハ上ニ出ル所ヨリモ較、大ナル可シ、
若シ變式ノ一方根ヲ知レハ、則チ之ニ適應スル
所ノ原式ノ方根ハ左ノ如クナル可シ、

$$x=\frac{y}{a}$$

同率方根

第四百三十章　凡ソ數ノ一箇整數或ハ一箇分數ノ以テ成ル者ハ之ヲ同率數ト為シ、否ラサル者ハ之ヲ不同率ト為ス

第四百三十一章　方程式第一率ノ倍數一箇ニシテ、自餘ノ倍數悉ク整數ナル者ハ、其同率方根皆整數ナル可シ、

方程式ノ此性タルヤ、論理上最モ緊要ノ者ナルヲ以テ速ニ此言ノ意ヲ解セサル可カラス、若シ方程式ノ方根悉ク整數ニ非スシテ他ノ方根ヲ

交ユル者ト雖氏、$\frac{2}{3}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{11}{4}$等ノ如キ定限アリテ約スカラサルノ分數トナラス、所謂ル他ノ方根ナル者ハ必ス$\sqrt{2}$ $(3)^{\frac{1}{3}}$等ノ如キ不同率數、即チ不開數、若シクハ不定小數、或ハ想像數ナリトス、

比如ハ$\frac{a}{b}$ヲ以テ同率ニシテ約ス可カラサルノ分數ト為シ之ヲ式ノ方根ト為シテ以テ上文ノ確實ナルヲ證ス可シ、即チ左ノ如シ

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}\cdots Tx+U=0$$

式中AB等ハ整數ナリ、此式ニxノ數價ヲ代用シテ次式ヲ得、

$$\frac{a^m}{b^m}+A\frac{a^{m-1}}{b^{m-1}}+B\frac{a^{m-2}}{b^{m-2}}\cdots T\frac{a}{b}+U=0$$

第一率ノ外諸率ヲ移シb^{m-1}ヲ以テ之ニ乘シテ次式ヲ得、

$$\frac{a^m}{b}=-(Aa^{m-1}+Ba^{m-2}b\cdots Tab^{m-2}+Ub^{m-1})$$

a bハ相互ニ原初因子ナルヲ以テ、bハaヲ除スルヿ能ハス、又

aノ乗方ヲ除スルコト能ハサルハ固ヨリナリ、蓋シ $\frac{a}{b}$ ハ既ニ約ス可カラサル者ナレハ $\frac{a}{b}\times a$ モ亦約ス可カラサル者ナリ是レ他ナシ a ト b 同率數ニ非サルカ為ナリ、是故ニ $\frac{a^2}{b}$ ハ整數ヲ以テ之ヲ記スルコト能ハスト云フ、此理ニ $\frac{a^m}{b}$ モ亦整數ヲ以テ之ヲ記スルコト能ハスト雖モ式ノ他項ニ在ル各率ハ整數ヲ以テ之ヲ記スルコトヲ得ヘシ、

是ニ由テ之ヲ觀レハ、約ス可カラサルノ分數、即チ $\frac{a}{b}$ ヲ以テ式ノ方根ト假定シタルハ全ク隨意ニ出ツルヲ以テ一列ノ整數反テ約ス可カラサルノ分數ト為ルヲ知ル可シ、是故ニ此類ノ方程式ハ、其方根中ニ定限アル同率分數ヲ有ツコト能ハスト為ス、

第四百三十二章　分數ノ倍數アル方程式ニシテ第一率ノ倍數一箇ナル者ハ、其倍數ヲ整數ト為シ、同形ノ他式ニ變化ス可キハ、既ニ之ヲ第四百二十九章ニ論シタリ、所謂ル整數トハ代數學語ノ意味ニ由テ稱スル所ニシテ、即チ只代數ノ形狀ニ於テ整數ナルノミ、其實或ハ不合數ト為

代數學卷之六

リ、或ハ想像數ト為ル可シ、若シ此倍數整數ナル時ハ、式中ノ同率方根モ亦悉ク整數ナルハ上章ニ説ク所ノ如シ、且ツ此等ノ諸方根ハ必ス自由率ノ分子中ニ在ル者トス(第四百二十八章)、若シ自由率ノ分子一二數ニシテ明白ナル者ハ、着眼ヲ以テ代用法ヲ用ヒ、方根ニ應ス可キ者ヲ得ヘシト雖氏、多クハ左ニ示ス所ノ法則ヲ以テ其術ノ煩勞ヲ避ク可シ、

比如ハaヲ以テ次ノ方程式ノ同率方根ト為ス、

$$x^m + Ax^{m-1} + \cdots + Rx^3 + Sx^2 + Tx + U = 0$$

今aヲ以テxニ代ヘ、後率ノ外諸率ヲ悉ク後項ニ移シaヲ以テ式ヲ除スレハ、則チ次式ヲ得、

$$\frac{U}{a} = -a^{m-1} - Aa^{m-2} - \cdots - Ra^2 - Sa - T$$

是ニ於テaハ方程式ノ方根ナルヲ以テ$\frac{U}{a}$ハ整數ナリ、今$-T$ヲ前項ニ移シテ$\frac{U}{a} + T = N_1$トシ、aヲ以テ所得ノ兩項ヲ除スレハ下ノ如シ、

$$\frac{N_1}{a} = -a^{m-2} - Aa^{m-3} - \cdots - Ra - S$$

此式ノ後項ハ整數ナルカ故ニ、前項モ亦整數ナリ、若シ－Sヲ前項ニ移シ $\frac{N_1}{a}+S$ トナルヲ N_2 ト為シ、復タ a ヲ以テ式ヲ除スレハ、則チ次式ヲ得ヘシ、

$$\frac{N_2}{a} = -a^{m-3} - Aa^{m-4} - \cdots\cdots - R$$

此式ノ後項モ整數ナルカ故ニ前項モ亦整數ナリ、

右ノ如ク漸次ニ後項ノ終率ヲ前項ニ移シ、毎ニ a ヲ以テ式ヲ除スレハ、結句左式ヲ得ルニ至ル可シ、

$$\frac{N_{m-2}}{a} = -a - A$$

$$\frac{N_{m-1}}{a} = -1$$

$$\frac{N_{m-1}}{a} + 1 = 0$$

凡ソ整數ニシテ本章ノ初ニ設クル所ノ方程式ノ一方根タル者ハ、當初ヨリ逐一各欵ノ要件ニ合シ最後ノ式 $\frac{N_{m-1}}{a} = -1$ ニ至テ則チ其方根ヲ知ル可シ、

凡ソ斯ノ如キ形狀ヲ為ス所ノ方程式ノ同率方

根ハ左ノ法則ヲ以テ之ヲ求メ得ヘシ

第一則　自由率ノ諸整數分子ヲ一列ニ書シ其下ニ各自ノ商ヲ書ス可シ

第二則　此等ハ各商ニ終率ノ次ナル率ノ倍數ヲ加ヘ各自固有ノ標記ヲ附ス可シ

第三則　此等ノ諸和ニ就テ整商ヲ得ヘキ者ハ應當ノ分子ヲ以テ之ヲ除シ整商ヲ得ヘカラサル者ハ之ヲ閣ク

第四則　右諸商ニ終率ヨリ第三ナル一率ノ倍數ヲ加ヘ各自固有ノ標記ヲ附ス可シ此以下再三前ノ如ク除加ノ兩術ヲ施シ結局第二率ノ倍數ヲ前ノ商ニ加ヘ各自應當ノ分子ヲ以テ最後ノ和ヲ除シ其諸分子最後ノ商即チ負數一箇ニ應當スル時ハ則チ式ノ方根ヲ得ヘシ

原註ニ曰ク未知數ノ乘方ニ闕漏アル者ハ±0ヲ以テ倍數ト為ス所ノ一率ヲ設ケテ之ヲ補充ス可シ

設問

第一　左ノ式ニ於テ若シ同率方根アラハ之ヲ求ム可シ

$$x^4+4x^3-3x^2+8x-10=0$$

術

分子	10,	5,	2,	1,	−1,	−2,	−5,	−10.
	−10							
商	−1,	−2,	−5,	−10,	10,	5,	2,	1.
加)	8							
	7,	6,	3,	−2,	18,	13,	10,	9
第二商				−2,	18,		−2.	
加)				−3				
				−5,	21,		−5.	
第三商				−5,	21,		1.	
加)				4				
				−1,	25,		5	
第四商				−1,	−25,		−1	

是ニ由テ之ヲ觀レハ、此問題ノ式ニハ-1ニ同シキ二ノ終商アリ、其應當ノ分十ハ1及ヒ-5ナルカ故ニ、式中ニ1 -5兩同率方根アリトス、

若シ本式ヲ除スルニ$(x-1)(x+5)$即チx^2+4x-5ヲ以テナスレハ、則チ其商x^2-2トナルヘキカ故ニ左式ヲ得ヘシ、

$$x^2-2=0$$

$$x=\pm\sqrt{2}$$

此四方根ハ即チ1 -5 $+\sqrt{2}$ $-\sqrt{2}$ナリ、

左ノ方程式ノ同率方根ヲ求ム、

第二

$$x^2-6x^2+11x-6=0$$

第三

$$x^4+4x^3-x^2-16x-12=0$$

第四

$$x^4-6x-16x+21=0$$

第五

$$x^4-6x+5x+2x-10=0$$

原註ニ曰ク、第四問ハ一率闕漏アルヲ以テ次ノ如ク式ヲ作テ之ヲ補ヒ、施術ノ間之ヲ處スル丁、加フル所ノ0ノ形ノ如クス可シ、

$$x^4\pm0x^3-6x^2-16x+21=0$$

假複率

第四百三十三章　單ニ未知一數ヲ有テル方程式ノ前項ニ式ハ諸率ヲ移セハ、其前項ハ通常之ヲ複率ト謂ヒ、施術ニ方テハ以テ一箇ノ代數ト為シ、其式ノ如何ヲ問ハス、且ツ所謂ル複率ハ未知數價ニ由リ約シテ零ト為シ以テ式ニ合ス可シト雖氏更ニ之ニ關スル無シ爰ニ複率アリ左ノ如シ、

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\cdots+Sx^2+Tx+U$$

此諸率ニ乘スルニ各其xノ自乘標ヲ以テスレハ、則チ各率其自乘標ノ一箇ヲ減ス可ク、其所得ノ代數和ハ即チ次ノ如シ、

$$mAx^{m-1}+(m-1)Bx^{m-2}+(m-2)Cx^{m-3}+\cdots+2Sx+T$$

初ノ複率ニ由テ此複率ヲ作ルカ如ク、同法ヲ以テ複タ第三ノ複率ヲ作レハ則チ次ノ如シ、

$$m(m-1)Ax^{m-2}+(m-1)(m-2)Bx^{m-3}+(m-2)(m-3)Cx^{m-4}$$
$$+\cdots+2S.$$

復ク第三複率ニ由テ同法ニ從ヒ第四複率ヲ作ルコヲ得ヘク、斯ノ如ク漸次ニ第五第六等ノ複率ヲ作ラハ終ニxニ關セサル者ト為ル可シ、何トナレハ此ノ如ク作為スル所ノ複率ニ於テハ、xノ乘方毎次一箇ヲ減スルカ故ナリ、

今最初ノ複數ヲ以テXト為シ、第二ノ複率ヲX_1ト為シ、第三ヲX_2ト為サハ毎次ノ複率左ノ如シ、

Xノ第一假複率$=X_1$

X_1ノ第一假複率$=X_2$

X_2ノ第一假複率$=X_3$

此他之ニ倣ヘ、

右X_1 X_2 X_3等ハ皆Xノ毎次假複率ニシテ、第一第二第三ノ假複率ト名ツク、

以上說ク所ノ記法ニ從ヒ、毎次假複率ノ法則ヲ得ルヿ左ノ如シ、

則 X_1ヲ作ルニハ、Xノ各率ニ各其xノ自乘標ヲ乘シ其自乘標ハ一箇ヲ減シテ所得ノ代數和ヲ取ル可シ、X_2ハ其基ヲX_1ヨリ假テ以テ之ヲ作ルヿ猶ホXニ由テX_1ヲ作ルカゴトク、其餘皆之ニ準ス可シ、

設問 左ノ複率アリ毎次ノ假複率如何、

$$3x^5+5x^4-9x^3+7x^2-8x+5$$

答

	假複率成分
第一	$5\cdot3x^4+4\cdot5x^3-3\cdot9x^2+2\cdot7x-8$
第二	$4\cdot5\cdot3x^3+3\cdot4\cdot5x^2-2\cdot3\cdot9x+2\cdot7$
第三	$3\cdot4\cdot5\cdot3x^2+2\cdot3\cdot4\cdot5x-2\cdot3\cdot9$
第四	$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot3x+2\cdot3\cdot4\cdot5$
第五	$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot3$

第四百三十四章 設如ハ左式ノ如キ複率アリ、

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + Tx + U = X$$

此式ノx初乗ノ雙率因子ヲ以テ次ノ如キ者トス、

$$x-a,\quad x-b,\quad x-c,\quad \cdots\ x-m,\quad x-n.$$

是ニ由テ一致式ヲ得ルヿ次ノ如シ、

$$x^m + Ax^{m-1} + \cdots + Tx + U = (x-a)(x-b)\cdots(x-m)(x-n)$$

式中兩項ノxニ何等ノ數ヲ代用スルトキ毎ニ式ニ合ス可シ、仍テ$y+x$ヲ以テxニ代フレハ、則チ左ノ如シ、

$$(y+x)^m + A(y+x)^{m-1} + \cdots = (y+\overline{x-a})(y+\overline{x-b})\cdots(y+\overline{x-n})$$

式中$\overline{x-a}$ $\overline{x-b}$ハ單率ト見做ス可キカ故ニ、後項ノ各因子モ亦雙率ト見做スヿヲ得ヘシ、今此式ノ前項ヲ解テyノ遞加自乗標ニ從テ位次ヲ立ツレハ、則チ次式ノ如シ、

$$X + X_1 y + \frac{X_2}{2} y^2 + \cdots + \frac{X_{m-1}}{1\cdot 2\cdots(m-1)} y^{m-1} + y^m$$

又上式ノ後項ヲ解キ同法ヲ以テ位次ヲ立ツレハ第四百二十四章第五則ニ從ヒy^0ノ倍數次ノ如シ、

$$(x-a)(x-b)\cdots(x-m)(x-n)$$

y ノ倍數ハ $x-a$ $x-b$ 等ノ諸因子ヲ $m-1$ ツ、一緒ニ相乘シタル積ノ代數和ナル可シ、

y^2 ノ倍數ハ同諸因子ヲ $m-2$ ツ、一緒ニ相乘ジタル積ノ代數和ナル可シ

暫時ニシテ此等ノ諸倍數ハ若干ノ雙率因子ノ積ニ關スル所ノ法則ニ從テ悉ク之ヲ作ルコヲ得ヘシ、

然リ而シテ此兩項ノ解式ニ於テ、y ノ同乘方ノ倍數ハ必ス相同シカラサルヲ得ス（第三百六十八章第三條）故ニ左式ヲ得ヘシ。

$$X=(x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-m)(x-n)$$

m 因子ノ中ニ就テ $m-1$ ツ、一緒ニ相乘シタル積ノ和ハ、各因子ヲ以テ諸因子相乘ノ積ヲ除シタル諸商ノ和ニ同シキカ故ニ次式ヲ得、

$$X_1=\frac{X}{x-a}+\frac{X}{x-b}+\cdots\cdots+\frac{X}{x-m}+\frac{X}{x-n}$$

雙率因子ヲ $m-2$ ツ、一緒ニ相乘シタル積ノ和ハ、雙率因子ヲ兩々相乘シタル各異ノ積ヲ以テ、諸因子相乘ノ積ヲ除シタル諸商ノ和ニ同シキヲ以テ、左式ヲ得ヘシ、

第四百三十五章　設如ハ a b c …… m n ヲ以テ左式ノ方根ト為ス、

$$X=x^{m}+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\cdots+Tx+U=0$$

此式ハ亦次ノ如ク之ヲ記ス可キハ、既ニ之ヲ上（第四百二十七章）ニ示シタリ、

$$X=(x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots(x-m)(x-n)=0$$

今此方根ノ數同シク p ハ a ニ同シク、q ハ b ニ同シク、r ハ c ニ同シキ時ハ、此式變シテ下ノ如シ、

$$X=(x-a)^{p}(x-b)^{q}(x-c)^{r}\cdots\cdots(x-m)(x-n)=0$$

$$\frac{X_2}{2}=\frac{X}{(x-a)(x-b)}+\frac{X}{(x-a)(x-c)}+\cdots\cdots+\frac{X}{(x-a)(x-n)}$$

又同一理ヲ以テ次式ヲ得ヘシ、

$$\frac{X_3}{2\cdot 3}=\frac{X}{(x-a)(x-b)(x-c)}+\cdots\cdots+\frac{X}{(x-a)(x-m)(x-n)}$$

以下各次ノ倍數皆之ニ準ス、

同方根

右式ノX中ニハ $x-a$ ニ同シキ因子ｐト、$x-b$ ニ同シキ因子ｑト、$x-c$ ニ同シキ因子ｒトヲ含メルカ故ニ、其第一假複率ハ $\frac{X}{x-a}$ 率ｐ倍、$\frac{X}{x-b}$ 率ｑ倍、$\frac{X}{x-c}$ 率ｒ倍ヲ有チ、兼テ $\frac{X}{x-m}$、$\frac{X}{x-n}$ 等ノ諸率ヲ有ツ可ク、而シテ單率方根ニ符合ス可シ（上章）即チ次式ノ如シ、

$$X_1=\frac{pX}{x-a}+\frac{qX}{x-b}+\frac{rX}{x-c}+\cdots\cdots\frac{X}{x-m}+\frac{X}{x-n}$$

此式 X_1 ノ數價ヲ顯ス所ノ各率ハ、第一率ヲ除クノ外、$(x-a)^p$ 因子ヲ有タザル者ナシ、但シ第一率ハ除術ニ由テ、$x-a$ ト同因子ノ數ｐ中ノ一ヲ省キタル者トス故ニ X_1 各率ノ通因子タル $x-a$ ノ最高乘方ハ $(x-a)^{p-1}$ ナリ、又同一理ニ由テ $(x-b)^{q-1}$ $(x-c)^{r-1}$ ハ X_1 ノ各率ニ通シタル $x-b$ $x-c$ ノ最高乘方ナリ、

是故ニ $(x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}(x-c)^{r-1}$ ハ本式ノ前項ト其第一假複率トノ間

ニ在ル所ハ、最大公倍數ナリ、初メ本式ニ於テ若干ノ同方根アリト假定シタルヲ以テ、此最大公倍數アルハ當然ノ理ナリ、又之ヲ反覆スレハ、X及ヒX_1ノ間ニ公倍數アル時ハ、必ス本式所屬ノ方根若干アラサルヲ得ス、蓋シ$(x-a)^t$ヲ以テ最大公倍數ノ一因子ト爲セハ、則チX_1ノ成分ニ由テ$(x-a)^{t+1}$ハXノ一因子タルヲ知ル可ク、又aハ$X=0$式ノ一方根タル1 $t+1$回ト知ル可シ、是ニ由テ左ノ二條ヲ決定ス、

第一條　未知數ノ唯一ニシテ、其後項零ナル方程式ハ、其前項Xト、第一假複率X_1トノ間ニxヲ有ツ所ノ公倍數アル時ハ、必ス同方根アル可キ事、

第二條　X及ヒX_1ノ最大公倍數Dハ、Xノ雙率因子ノ積タル可キ事、但シ其雙率因子ハ、同方根ニ相應スル所ノxヲ以テ之ヲ視レハ、初乘ノ者タル可ク、方根ハ某乘方ニシテ、其自乘標ハX中ニ在ル所ノ者ヨリモ一箇少キ者タル可シ、

或式中ニ同方根アルヤ、否ヤヲ了解シ、若シ之ア

ルヲ知テ之ヲ求ムルヿヲ得ヘクンハ則チ之ヲ求ムルノ法則左ノ如シ、

第一則　問題ノ方程式ニ於テ其前項ト其第一假複率トノ間ニ在ル最大公倍數ヲ求ム可シ、若シ之ヲ求メテ得サレハ則チ同方根ナキ者トス、若シ一モ公倍數ヲ得レハ則チ同方根アル可シ、然レハ則チ次則ニ從フ可シ、

第二則　最大公倍數Dヲ置テ零ニ同シト為シ、以テ式ヲ作レハ則テ何ノ數ヲ論セス$D=0$ノ一方根ト為ル者ハ$X=0$ノ方根ト為ルヿ二、四ナル可ク、

二、四$D=0$ノ方根ト為ル者ハ$X=0$ノ方根タルヿ三、四ナル可シ、餘皆之ニ準ス、

最大公倍數D中ニ$(x-a)^t$ノ如キ形狀ノ因子ヲ含ミ、其tハ一箇ヨリ大ナル整數ニシテ、Dト其第一假複率トノ間ニ在ル最大公倍數ヲD'ト為セハ則チD'中ニハ$(x-a)^{t-1}$ノ如キ因子ヲ含ム可ク、復タD_1ヲ以テD'ノ第一假複率ト為シ、D''ヲ以テ其最大公倍數ト為セハ、則チD''中ニ$(x-a)^{t-2}$ノ如キ因子アル

可シ之ヲ反復スレハ$(x-a)$ノ自乘標ハ毎次一箇ヲ減シ、且ツ最大公倍數ノ度數モ亦随テ一次ヲ減ス可シ、若シ$D=0$式ノ乘方高尚ニシテ之ヲ解クヿ能ハサレハ、同方根ヲ決定シテ漸次ニ乘方ノ次數ヲ減シ、結句解ク可キ者ト為シ、解式ノ法ニ従テ終ニ之ヲ得ヘキ者アリ、設如ハ左式アリ、

$$X=0$$

此最大公倍數次ノ如シ、

$$D=(x-a)^n(x-b)^n(x-c)$$

然レハ則チD' D''ハ次ノ如シ、

$$D'=(x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1}$$

$$D''=(x-a)^{n-2}(x-b)^{n-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D^{(n-1)}=(x-a)(x-b)$$

仍テ左式ヲ作ル、

$$D^{(n-1)}=(x-a)(x-b)=0$$

此式ニシテ$x=a$ $x=b$ノ方根ヲ知ル時ハ、則チ之ヲ解クヿヲ得ヘシ、而シテ$(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}(x-c)^2$ハXノ因子ニシテ$a$ bハ各$X=0$式ノ方根タルヿ$n+1$回ナリ、cハ方根タルヿ二回ナリ、若シ$(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}(x-c)^2$ノ積ヲ以テ問題ノ式ヲ除スレハ、則チ乘

方ノ次數ヲ減スルヿ$2n+4$ニ至ル可シ、

第一　設問

左式ハ同方根ヲ含ムヤ否ヤ、若シ之ヲ含マハ、則チ如何、

$$x^4-2x^3-7x^2+2x-12=0$$

此前項ノ第一假複率ハ次ノ如シ、

$$4x^3-6x^2-14x+20$$

本式ノ前項ト此假複率トノ間ニ在ル最大公倍數ハ$x-2$ナルカ故ニ、2ハ其方根ト為ルヿ二回、而シテ本式ノ前項ハ$x-2$ヲ以テ再ヒ之ヲ除スルヿヲ得ヘク或ハ直ニ$(x-2)^2$即チx^2-4x+4ヲ以テ一タヒ之ヲ除スルヿヲ得ヘシ、仍テ之ヲ除シテ其商ヲ見レハ、$x^2+2x=3$ナルカ故ニ、本式ハ則チ次ノ如ク之ヲ記スルヿヲ得ヘシ、

$$(x^2-4x+4)(x^2+2x-3)=0$$

此式前項ノ兩因子ハ、各零ニ同シトシテ得ル所ノxノ數價ヲ以テ式ニ合スル可シ、其第一因子ヨリ得ル所ノ者ハ$x=2$、$x=2$ナリ、其第二ヨリ得ル所ノ者ハ$x=1$　$x=-3$ナリ、是ニ

由テ之ヲ觀レハ、問題ノ方程式ノ四方根ハ1 2 2 −3ナリ、

左式ノ同方根ヲ問フ、

第二

$$x^5+2x^4-11x^3-8x^2+20x+16=0$$

第三

$$x^5-2x^4+3x^3-7x^2+8x-3=0$$

第四 次式ノ方根ヲ問フ、

$$x^4-2x^3-11x^2+12x-36=0$$

第五 左式ノ方根ヲ問フ、

$$X=x^7-5x^6-2x^5+39x^4-31x^3-61x^2+96x-36=0$$

此假複率次ノ如シ、

$$X_1=7x^6-30x^5-10x^4+152x^3-93x^2-122x+96$$

$$D=x^4-3x^3-3x^2+11x-6$$

$$D_1=4x^3-9x^2-6x+11$$

$$D'=x-1$$

是ニ由テ之ヲ觀レハ、1ハD=0ノ式ノ方根タル二回ニシテ、問題式ノ方根タル三回ナリ、

今$D'^{2}=x^{2}-2x+1$ヲ以テ$D=x^{4}-3x^{3}-3x^{2}+11x-6$ヲ除シテ、商$x^{2}-x-6=(x-3)(x+2)$ヲ得ルカ故ニ左式$D=(x-3)(x+2)(x-1)^{2}$ヲ得、

$$X=(x-3)^{2}(x+2)^{2}(x-1)^{3}$$

是故ニ問題式ノ方根ヲ得ルコト下ノ如シ、

$3,\ 3,$

$-2,\ -2,$

$+1,\ +1,\ +1.$

第四百三十六章　未知數單一ノ方程式アリ、今之ヲ變シテ本式ノ方根ト變式ノ方根トヲ比スレハ、必ス一定ノ差ヲ成ス者ト為スコトヲ得ヘシ、

比如ハ次式アリ、

$$x^{m}+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\cdots+Tx+U=0$$

今yヲ以テ新未知數ト為シ、隨意ニx'ヲ設テ、以テx y兩數價ノ間ニ生ス可キ一定ノ差ト為セハ、則チ左式ノ如シ、

$$x=y+x'$$

xノ此數價ヲ以テ本式ニ代用スレハ、則チ左ノ如シ、

$$(y+x')^m+A(y+x')^{m-1}+B(y+x')^{m-2}+C(y+x')^{m-3}+\cdots+T(y+x')+U=0.$$

雙率式ニ由テ各率ヲ解散シ、yノ遞加自乗ノ標ニ従テ所得ノ和ノ位次ヲ立ツレハ、則チ下式ノ如シ、

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}x'^m\\+Ax'^{m-1}\\+Bx'^{m-2}\\+Cx'^{m-3}\\\cdots\\+Tx'\\+U\end{array}\right|y^0+\left.\begin{array}{l}mx'^{m-1}\\+A(m-1)x'^{m-2}\\+B(m-2)x'^{m-3}\\+C(m-3)x'^{m-4}\\\cdots\cdots\end{array}\right|y+\left.\begin{array}{l}m\frac{m-2}{2}x'^{m-2}\\+A(m-1)\frac{m-2}{2}x'^{m-3}\\+B(m-2)\frac{m-3}{2}x'^{m-4}\\\cdots\cdots\end{array}\right|y\\+\cdots+\left.\begin{array}{l}m\frac{m-1}{2}x'^2\\+A(m-1)x'\\+B\end{array}\right|y^{m-2}+\left.\begin{array}{l}mx'\\+A\end{array}\right|y^{m-1}+y^m\end{array}\right\}=0\cdots(壹)$$

此解散式ノ前項ヲ玩味シテ左ノ條件ヲ決定ス、

第一條　變式ノ自由率、即チ y^0 ノ倍數ハ、x ヲ以テ x' ニ代フレハ、則チ本式ノ前項ト為ル者ナリ、

第一條　未知數ノ初乗 y ノ倍數ハ、x ヲ以テ x' ニ代フレハ、則チ本式前項ノ第一假複率ト為ル者ナリ、

第三條　y^2 ノ倍數ハ 2 ヲ以テ之ヲ除シ、x ヲ以テ x' ニ代フレハ、則チ本式前項ノ第一假複率ト為ル者ナリ、

第四條　總テ y^n ノ倍數ハ、一箇ヨリ n ニ至ルマテノ天然數相乗ノ積ヲ以テ之ヲ除シ、x ヲ以テ x' ニ代フレハ、則チ本式前項ノ第 n 假複率ト為ル者ナリ、

本式ノ前項及ヒ其各次ノ假複率ノ x ヲ x ニ改メ X' X'_1 X'_2 X'_3 等ヲ以テ之ニ代用スレハ前ノ變式ハ次ノ如ク之ヲ記スルコヲ得ヘシ、

$$X'+X'_1y+\frac{X'_2}{1\cdot2}y^2+\cdots\cdots+\frac{X'_{m-2}}{1\cdot2\cdots(m-2)}y^{m-2}+\frac{X'_{m-1}}{1\cdot2\cdots(m-1)}y^{m-1}+y^m=0.$$

即チ各率ノ位次ヲ反シテ下式ヲ得、

$$y^m+\frac{X'_{m-1}}{1\cdot2\cdots(m-1)}y^{m-1}+\frac{X'_{m-2}}{1\cdot2\cdots(m-2)}y^{m-2}+\cdots\cdots+X'_1y+X'=0\cdots\cdots(戊)$$

以テ未知數ト為シ、以テ式ヲ作レハ、則チ其方根ハ、上章ノ變式戈ニ於テ相當ノ一率ヲ脱ス可シ、

比如ハ $mx'+A=0$ トスレハ、$x'=\frac{A}{m}$ ナリ、今 x' ノ此數價ヲ以テ戈式ニ代用スレハ、則チ其形次ノ如クナル可シ、

$$y^m+\frac{X_{m-2}}{1\cdot2\cdots(m-2)}y^{m-2}+\cdots X_1y+X=0$$

是故ニ方程式ヲ變シテ、第二率ヲ闕ク者ト為サント欲セハ、方程式ノ次數タル自乘標ヲ以テ第二率ノ倍數ヲ除スル者ニ負標ヲ附シ以テ他ノ未知數ニ代フ可シ、

第四百三十七章　上章ノ兩式壹戈ヲ比較シテ左ノ二式ヲ得

$$\frac{X'_{m-1}}{1\cdot2\cdots(m-1)}=mx+A\cdots(\text{貳})$$

$$\frac{X'_{m-2}}{1\cdot2\cdots(m-2)}=m\frac{m-1}{2}x'^2+A(m-1)x'+B\cdot\ (\text{參})$$

壹式倍數ノ度ハ x' ヲ以テ之ヲ視レハ右ヨリ左ニ進ムニ従テ各率少クモ一箇ヲ増シ自由率ニ至テハ則チ第 m 乘ナリ、x' ハ固ヨリ隨意數ナルカ故ニ、正理ニ適當スル者ヲ以テ其數價ニ充ツル一ヲ得ヘシ、仍テ其倍數ノ一ヲ以テ零ト為シ、x' ヲ

第四百三十八章　變式ノ第三率ハ、x'ヲ以テ左式ノ方根ノ一ニ同フスレハ、則チ之ヲ脫却スルヿヲ得ヘシ、

$$m\frac{m-1}{2}x'^2+A(m-1)x'+B=0$$

式中ノm A Bハ自カラ一種ノ關渉アリ、

$$x'=-\frac{A}{m}$$

ヲ以テ每ニ式ニ合ス可シ、然レハ則チ變式ノ第二率ヲ脫却シ得レハ、自カラ第三率ヲ脫却スルヿヲ得ヘシ、此關渉ノ何者タルヲ知ラント欲セハ、x'ノ此數價ヲ代用シテ左式ヲ得ヘシ、

$$m\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{A^2}{m^2}-(m-1)\frac{A^2}{m}+B=0$$

此式ヲ約シテ、結句下式ヲ得ヘシ、

$$\frac{m-1}{2}\cdot\frac{A^2}{m}-(m-1)\frac{A^2}{m}+B=0$$

$$(m-1)A^2-2(m-1)A^2+2mB=0$$

$$(m-1)A^2=2mB$$

$$A^2=\frac{2mB}{m-1}$$

若シm A Bノ數價ヲ以テ此式ニ合スレハ、則チ變式ノ第三率ハ第二率ト共ニ消失ス可シ、凡ソ變式ノ第三率ヲ脫シテ、x'ノ數價ヲ見ント欲スル者ハ、必ス二次方程式ヲ解カサル可カラス、第

四率ヲ脱セント欲スル者ハ、必ス三次方程式ヲ解カサル可カラス、凡ソ自由率ヲ消失セシメント欲スル者ハ、須ラク本式ヲ解ク可シ、

設問

第一 左式ヲ變シテ其第二率ヲ含マサル者ト為ス可シ、

$$x^2+2px-q=0$$

上章ノ如ク、

$$x=y-\frac{2p}{2}=y-p$$

ト為シ、第四百三十六章ニ由テ左式ヲ得、

$$X'=(p)^2-2p(p)-q=-q-p^2$$

$$X'_1=2(p)-2p=0$$

$$\frac{X'_2}{2}=\frac{2}{2}=1$$

故ニ求ムル所ノ式ハ次ノ如シ

$$y^2-q-p^2=0$$

是ニ由テyハ次ノ如シ、

$$y=\pm\sqrt{q+p^2}$$

即チ二次方程式ノ規則ニ由ル者ニ同シ

又$x=y-p$ナルカ故ニxノ數價ハ次ノ法式ヲ以テ之ヲ見ル可シ、

$$x=-p\pm\sqrt{q+p^2}$$

第二　左ノ方程式ヲ變シテ其第二率ヲ有タサル者ト為ス可シ、

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

$$x=y-\frac{p}{3}$$

$$X'=\left(-\frac{p}{3}\right)^3+p\left(-\frac{p}{3}\right)^2+q\left(-\frac{p}{3}\right)+r=\frac{2p^3}{27}-\frac{pq}{3}+r$$

$$X'_1=3\left(-\frac{p}{3}\right)^2+2p\left(-\frac{p}{3}\right)+q=-\frac{p^2}{3}+q$$

$$\frac{X'_2}{2}=\frac{2\cdot3\left(-\frac{p}{3}\right)}{2}+\frac{2p}{2}=0$$

$$\frac{X'_3}{2\cdot3}=\frac{2\cdot3}{2\cdot3}=0$$

故ニ求ムル所ノ式ハ則チ左ノ如シ

$$y^3-\left(\frac{p^2}{3}-q\right)y+\frac{2p^3}{27}-\frac{pq}{3}+r=0$$

或ハ

$$\frac{p^2}{3}-q=m$$

$$\frac{2p^3}{27}-\frac{pq}{3}+r=n$$

ト為セハ、則チ下式ノ如シ、

$$y^3-my+n=0$$

第三　左ノ式ヲ變シテ未知數ノ二乘方ヲ有タサル者ト為ス可シ、

第四百二十七章ニ由リ $x=y-\frac{12}{4}$ 即チ $x=3+y$ ト為セハ $x'=3$ $m=4$ ナリ、

$$x^4-12x^3+17x^2-9x+7=0$$

$$X'=(3)^4-12(3)^3+17(3)^2-9(3)+\text{—}=-110$$

$$X'_1=4(3)^3\ 36(3)^2+34(3)-9=-123$$

$$\frac{X'_2}{2}=6(3)-36(3)+17=-37$$

$$\frac{X'_3}{\quad}=4(3)^1-12=0$$

是故ニ求ムル所ノ式、下ノ如シ、

$$y^4-37y^2-123y-110=0$$

第四 左式ヲ變シテ其第二率ヲ闕ク者ト為ス可シ、

$$x^3-6x^2+13x-12=0$$

$$x=2+y$$

$$X'=(2)^3-6(2)^2+13(2)-12=-2$$

$$X'_1=3(2)^2-12(2)+13=+1$$

$$\frac{X'_2}{2}=3(2)^1-6=0$$

$$\frac{X'_3}{2\cdot3}=1=1$$

是故ニ變式下ノ如シ、

$$y^3+y-2=0$$

為ス可シ、

第五　左式ヲ變シテ其方根二箇ヲ減スル者ト為ス可シ、

$$x^4-4x^3-8x+32=0$$

$$x=2+y$$

答

$$y^4+4y^3-24y=0$$

此變式ハ一率モyニ關セサル者ナキカ故ニ、其方根ハ零ナリ、是ニ由テ之ヲ觀レハ、本式ノ方根ハ二ナリ、

第六　次式ヲ變シテ、其方根三箇ヲ增ス者ト為ス可シ、

$$x^4+16x^3+99x^2+228x+144=0$$

第七　下式ヲ變シテ、其第二率ヲ闕滿スル者ト為ス可シ、

$$x^4-8x^3+x^2+82x-60=0$$

第四百三十九章　茲ニ第四百三十六章ノ變式ヲ再出ス、

$$y^m+\frac{X'_{m-1}}{1\cdot 2\cdots(m-1)}y^{m-1}+\cdots+\frac{X'_3}{2\cdot 3}y^3+\frac{X'_2}{2}y^2+X'_1y+X'=0$$

式中yニ代フルニ、其數價$y=x-x'$ヲ以テスレハ、則チ次ノ如シ

$$\left.\begin{array}{l}(x-x')^m+\frac{X'_{m-1}}{1\cdot 2\cdots(m-1)}(x-x')^{m-1}+\cdots\\[2ex] +\frac{X'_3}{2\cdot 3}(x-x')^3+\frac{X'_2}{2}(x-x')^2+X'_1(x-x')+X'\end{array}\right\}=0$$

此式ノ前項ヲ解散シ、xノ遞減自乘標ニ從テ位次ヲ立ツレハ、本式ノ前項ニ復ス可シ、其故何トナレハ、此術ハ該章ノ壹式ヲ變シテ、式式ヲ作リタルノ術ヲ反覆スルニ外ナラサレハナリ、

是ニ由テ一致式ヲ得ル左ノ如シ、

$$\left.\begin{array}{l}x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\cdots+Sx^2+Tx+U\\[2ex] =(x-x')^m+\frac{X_{m-1}}{1\cdot 2\cdots(m-1)}(x-x')^{m-1}+\cdots\\[2ex] +\frac{X'_3}{2\cdot 3}(x-x')^3+\frac{X'_2}{2}(x-x')^2+X'_1(x-x')+X'\end{array}\right\}\cdots(壹)$$

此式ノ前項ハ何ノ數ヲ以テ之ヲ除スル氏、其商及ヒ殘數ハ、同數ヲ以テ後項ヲ除スル者ニ同シカル可シ、仍テ$x-x'$ヲ以テ後項ヲ除スレハ、其第一殘數ハX'ニシテ其商ハ下ノ如シ、

$$(x-x')^{m-1}+\frac{X'_{m-1}}{1\cdot 2\cdots(m-1)}(x-x')^{m-2}+\cdots$$
$$+\frac{X_3}{2\cdot 3}(x-x')^2+\frac{X_2}{2}(x-x')+X_1$$

再ヒ$x-x'$ヲ以テ此商ヲ除スレハ其第二殘數ハX'_1ニシテ其商ハ次ノ如シ、

$$(x-x')^{m-2}+\frac{X'_{m-1}}{1\cdot2\cdots(m-1)}(x-x')^{m-3}+\cdots+\frac{X'_3}{2\cdot3}(x-x')+\frac{X'_2}{2}$$

以下斯ノ如ク之ヲ除スレハ、毎次ノ商ハ即チ變式或ノ倍數ニシテ其第一商ハ自由率即チy^0ノ倍數ナルハ、論ヲ俟タサルカ故ニ、數次此術ヲ施スハ固ヨリ無用ノ業タル可シ、但シ變式ノ方根若シ本式ノ方根ヨリモ少キコト一定ノ差x'ノ如キ時ハ、$x-x'$ヲ以テ除術ノ法ト為ス可ク、若シ其多キコトx'ナル時ハ$x+x'$ヲ以テ法ト為ス可シ、

是ニ由テ之ヲ觀レハ、方程式ヲ變シテ其方根ヲ本式ノ方根ヨリモ多少アル者ト為サント欲セハ、則チ左ノ法則ニ從フ可シ、

第一則　本式ノ後項ヲ零トシ、xト兩式方根ノ定差トヲ加ヘタル者ヲ以テ其前項ヲ除シテ其殘數xニ關セサルニ至リ、而シテ後ニ同數ヲ以テ再ヒ其商ヲ除スルコト前ノ如ク、再三數次之ヲ反復シテm次ニ至ル可シ、

第二則　變式ヲ記スルニ毎次ノ除殘ヲ以テ未

知數各次乘方ハ倍數ト爲シ零乘方ヨリ之ヲ始ム可シ、

右法則中ニ加ヘタル者トハ即チ代數和ノ意タルヲ記心ス可ク、又第m次除術ノ商ハ即チ本式x^mノ倍數ニシテ變式未知數ノ乘方最高ナル者ノ倍數タルハ一思シテ之ヲ知ル可シ、

設問

第一　左式ヲ變シテ其方根本式ヨリモ二箇少キ者ト爲ス可シ、

$$x^4-4x^3-8x+32=0$$

此問ハ前章第五ノ例ニ同シキカ故ニ$x=2+y$即チ$y=x-2$ニシテ其術左ノ如シ

術

$$\begin{array}{l}
x-2)\,x^4-4x^3-8x+32\,(x^3-2x^2-4x-16 \\
\quad \underline{x^4-2x^3} \\
\quad\quad -2x^3-8x \\
\quad\quad \underline{-2x^3+4x^2} \\
\quad\quad\quad -4x^2-8x \\
\quad\quad\quad \underline{-4x^2+8x} \\
\quad\quad\quad\quad -16x+32 \\
\quad\quad\quad\quad \underline{-16x+32} \\
\quad\quad\quad\quad\quad 0=X'
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
x-2)\,x^3-2x^2-4x-16\,(x^2-4 \\
\quad \underline{x^3-2x^2} \\
\quad\quad -4x-16 \\
\quad\quad \underline{-4x-8} \\
\quad\quad\quad -24=X'_1
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
x-2)\,x^2-4\,(x+2 \\
\underline{\quad x^2-2x} \\
\qquad 2x-4 \\
\qquad \underline{2x-4} \\
\qquad\qquad 0=\dfrac{X'_2}{1\cdot 2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
x-2)\,x+2\,(1 \\
\quad \underline{x-2} \\
\qquad\quad 4=\dfrac{X'_3}{2\cdot 3}
\end{array}
$$

是故ニ變式左ノ如シ、

$$y^4+4y^3\pm 0y^2-24y+0=0$$

或ハ前ノ如ク、

$$y^4+4y^3-24y=0$$

第二 左式ヲ變シテ方根三箇ヲ減スル者ト為スヘシ、

$$x^4-12x^3+17x^2-9x+7=0$$

$$x=y+3 \qquad y=x-3$$

術

$$
\begin{array}{l}
x-3)\,x^4-12x^3+17x^2-9x+7\,(x^3-9x^2-10x-39 \\
\quad \underline{x^4-3x^3} \\
\qquad -9x^3+17x^2 \\
\qquad \underline{-9x^3+27x^2} \\
\qquad\qquad -10x^2-9x \\
\qquad\qquad \underline{-10x^2-30x} \\
\qquad\qquad\qquad -39x+7 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-39x+117} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 110=X' \text{ 第一殘}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
x-3\,)\,x^3-9x^2-10x-39\,(\,x^2-6x-28 \\
\quad x^3-3x^2 \\
\qquad -6x^2-10x \\
\qquad -6x^2+18x \\
\qquad\qquad -28x-39 \\
\qquad\qquad -28x+84 \\
\qquad\qquad\qquad -123=X_1
\end{array}
$$

第一殘

$$
\begin{array}{l}
x-3\,)\,x^2-6x-28\,(\,x-3 \\
\quad x^2-3x \\
\qquad -3x-28 \\
\qquad -3x-9 \\
\qquad\qquad -37=\dfrac{X_2'}{2}
\end{array}
$$

第二殘

$$
\begin{array}{l}
x-3\,)\,x-3\,(\,1 \\
\quad x-3 \\
\qquad 0=\dfrac{X_3'}{2\cdot 3}
\end{array}
$$

第三殘

是ニ由テ、求ムル所ノ變式下ノ如シ

$$y^4+0y^3-37y^2-123y-110=0$$

凡ソ四次方程式ヲ變スル時ハ四殘ヲ得ヘク、五次方程式ヲ變スル時ハ五殘ヲ得ヘシ、概シテ之ヲ言ヘハ、n次方程式ヲ變スル時ハ、n殘ヲ得ヘキナリ、

本章ニ論スル所ノ除術ヲ以テ方程式ヲ變化スルニ本則ニ從フノ時ハ、實際極メテ煩難ナリト雖モ、後ニ論スル所ノ合成除法ヲ用フレハ、大ニ簡易ナル可シ、

今此除法ヲ論スルニ方テ、先ツ分裂乗除ノ法ヲ説カサル可カラス、

分裂乘除

第四百四十章　兩複率アリ、互ニ同質ナル時ノ其積モ亦同質ナリ、而シテ積ノ次數ヲ示ス所ノ數ハ兩因子ノ次數ヲ示ス所ノ數ノ和ニ同シ、又若シ複率僅ニ二字ヲ以テ成リ、兩因子同字ニ從テ位次ヲ立ツル者ハ、其積ノ位次モ亦同字ニ從フ可シ、是ニ由テ兩因子相乘ノ術ニ於テ倍數ノ積ハ其所屬ノ字因ニ關セサルヲ以テ、此等ノ倍數ヲ分裂シ、各自ノ標記ヲ附シ、固有ノ位次ニ從テ之ヲ書シ、以テ乘除ノ術ヲ施スヿ恰モ複率相乘ノ法ノ如シ、斯ノ如ク字因數因兩部ノ積ヲ作リ、周密ニ注目シテ位次ヲ謬ルヿ無ク兩部ヲ合スレハ、則チ複率相乘ノ積ヲ得ヘシ、

設問

第一

$a^2+2ax+x^2$ ニ $a+x$ ヲ乘ス可シ、

術

$$
\begin{array}{lll}
1+2+1 & & 數倍實 \\
\underline{1+1} & & 數倍法 \\
1+2+1 & & \\
\underline{\quad 1+2+1} & & \\
1+3+3+1 & & 數倍積
\end{array}
$$

今此各率ニ各自ノ字因ヲ附スレハ、則チ下ノ積ヲ得ヘシ、

$a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$

第二

$3x^2-2x-1$ ニ $3x+2$ ヲ乗ス可シ、

術

$$\begin{array}{r} 3-2-1 \\ 3+2 \\ \hline 9-6-3 \\ +6-4-2 \\ \hline 9\pm0-7-2 \end{array}$$

是ニ由テ

$9x^3\pm0x^2-7x-2$

即チ

$9x^3-7x-2$ 答

若シ各因子ノ字因中ニ最高最低乗方ノ中間ニ一率ノ乗方ヲ闕ク時ハ、其乗方ニ倍數0ヲ附シテ之ヲ補ハサル可カラス、

第三

x^3+2x^2-1 ニ x^2+2 ヲ乗ス可シ、

此所因子ニハ闕漏アルヲ以テ、之ヲ補充スルコ左ノ如シ、

$$x^3+2x^2+0x-1$$

$$x^2+0x+2$$

術

$$\begin{array}{r} 1+2+0-1 \\ 1+0+2 \\ \hline 1+2+0-1 \\ 2+4+0-2 \\ \hline 1+2+2+3+0-2 \end{array}$$

積

$$x^5+2x^4+2x^3+3x^2+0x-2$$

即

$$x^5+2x^4+2x^3+3x^2-2$$

答

第四

$(3x^2-2x-1)$
$\times(4x+2)$

第五

$(3x^2-5x\ \ 10)$
$\times(2x-4)$

第六

(x^2+xy+y^2)
$\times(x^2-xy+y^2)$

第七

(x^3-2x^2+5x-2)
$\times(x^2+4x-3)$

第四百四十一章　倍數ヲ分裂シテ乗術ヲ施スヿヲ得レハ、又同一理ニ由テ之ヲ除術ニ用フルヿヲ得ヘシ、除術ノ法實共ニ二字ニシテ同質ナル時ハ、其商ノ次數ハ實ノ次數、法ノ次數ニ勝ルノ數ニ同シカル可シ、

設問

第一

$$a^4-3a^3x-8a^2x^2+18ax^3+16x^4\div a^2-2ax-2x^2$$

術

$$\begin{array}{l|l}
1-3-8+18+16 & 1-2-2 \\
\underline{1-2-2} & 1\ \ 1-8 \\
-1-6+18 & \\
\underline{1+2+\ 2} & \\
-8+16+16 & \\
\underline{-8+16+16} &
\end{array}$$

是ニ由テ次ノ商ヲ得、

$$a^2-ax-8x^2$$

第二

$$a^5-5a^3b^2+a^2b^3+6ab^4-2b^5 \div a^3-3ab^2+b^3$$

此例ニ於テハ實ニ$0\cdot a^4b$ヲ加ヘ法ニ$0\cdot a^2b$ヲ加ヘテ、以テ闕漏ヲ補ハサル可カラス、其術ハ則チ左ノ如シ、

術

$$\begin{array}{l|l}
1+0-5+1+6-2 & 1+0-3+1 \\
\underline{1+0-3+1} & 1+0-2 \\
\quad 0-2+0+6-2 & \\
\quad \underline{-2+0+6-2} &
\end{array}$$

故ニ此商下ノ如シ、

$$a^2+0ab-2b^2$$

即チ

$$a^2-2b^2$$

第三

$$x^5-4x^4-17x^3-13x^2-11x-10 \div x^2-3x-2$$

術

$$\begin{array}{l|l}
1-4-17-13-11-10 & 1+3+2 \\
\underline{1+3+\cdot 2} & 1-7+2-5 \\
\quad -7-19-13 & \\
\quad \underline{-7-21-14} & \\
\qquad +2+1-11 & \\
\qquad \underline{+2+6+4} & \\
\qquad\quad -5-15-10 & \\
\qquad\quad \underline{-5-15-10} &
\end{array}$$

仍テ下ノ商ヲ得、

$$x^3-7x^2+2x-5$$

若シ法實共ニ單一字ニシテ中間ニ闕率アル時ハ、0ヲ以テ補率ノ倍數ト為シ以テ之ニ挿入ス可シ、

上ノ例ニ於テハ只管ニ分裂倍數ノ除法ヲ説明スルヲ以テ目的ト為スカ故ニ毎例倍數ヲ整數ト為シ、法ノ第一率ノ倍數ヲ一箇ト為スト雖氏、此等ノ諸倍數ハ固ヨリ何ノ數タルヲ論セス、術ニ於テ更ニ異ナル所ナシ、但シ法ノ第一率ノ倍數若シ一箇ニアラサル時ハ、其數ヲ以テ法ト實トヲ除シテ以テ一箇ト為ス可シ、然レハ則チ商ノ第一率ハ實ノ第一率ト倍數符合スル亅前ノ諸例ニ於ケルカ如シ、

合成除法

第四百四十二章　合成除法ヲ説明シ、且ツ其施術ノ法則ヲ立テンカ為ニ、茲ニ復タ前章ノ第一問ヲ用ヒ、若シ法ノ第二及ヒ第三率ノ標記ヲ換フル時ハ、各殘數ハ此二率ニ商率ヲ乘シタル積ニ、實ノ相當率ヲ加ヘテ以テ之ヲ見ル可シ、蓋シ法ノ第一率ヲ商ノ第一率ニ乘スレハ、其積ハ實

ノ第一率ト相等シキハ此術ノ本性ナルカ故ナリ、且ツ夫レ法ノ第一率ハ一箇ナルカ故ニ商率ハ其所屬ノ部實ノ第一率ニ同シ、今其術ヲ示スヿ左ノ如シ、

$$\begin{array}{rrrrr|rr} 1 & -3 & 8 & +18 & 16 & 1+2 & 2 \\ & 2 & -2 & -16 & & & \\ & & 2 & -2 & -16 & & \\ \hline 1 & -1 & -8 & 0 & 0 & & \end{array}$$

仍テ本商

$$a^2-ax-8x^2$$

ナルヿ前ノ如シ、

是ニ於テ法ノ標記ヲ變シテ後ニ法實ヲ記スル

ヿ常法ノ如ク、而シテ實ノ下ニ二列ヲ隔テ、横線ヲ引キ實ノ第一率ヲ線下ニ下シテ以テ商ノ第一率ト為シ、次ニ商ノ第一率ヲ以テ法ノ第二第三率ニ乗シタル第一積ヲ實ノ第二率ノ下ナル第一列ニ記シ、第二積ヲ第三率ノ下ナル第二列ニ記シ、第二率ノ一行ヲ合シテ其和ヲ商ノ第二率ト為シ、次ニ法ノ第二第三率ニ商ノ第二率ヲ乗シ、其第一積ヲ實ノ第三率ノ下ニ第一列ニ記シ、第二積ヲ實ノ第四率ノ下ニ第二列ニ記シ、第三率ノ一行ヲ合シテ其和ヲ商ノ第三率ト為

ス可シ、其以下第四第五行ハ共ニ零ト為ル可シ、

又前章第三例ノ術ハ則チ左ノ如シ、

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
1 & -4 & -17 & -13 & -11 & -10 & 1-3-2 \\
 & -3 & +21 & -6 & +15 & & \\
 & & -2 & +14 & -4 & +10 & \\
\hline
1 & -7 & +2 & -5 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

仍テ其商下ノ如シ、

$$x^3-7x^2-2x-5$$

今此ニ例ヲ推シテ次ノ總則ヲ解得スルハ、亦難キニ非サル可シ、

第一則　法ノ位次ヲ正シテ其第一率ノ倍數若シ一箇ニ非ル時ハ其倍數ヲ以テ法ト實トヲ除シ以テ之ヲ一箇ト為ス可シ、

第二則　法實兩數ノ倍數ヲ分裂シテ常ノ如ク之ヲ記ス可シ但シ法ノ第一率ヲ除クノ外以下諸率ノ標記ヲ變更ス可シ次ニ數列ヲ隔テ横線ヲ引ク可シ此間隔ノ列數ハ法ノ率數ヨリモ一箇少キヲ以テ適度ト為ス次ニ實ノ第一率ヲ其直下ニ下シテ横線ノ下ニ書シ之ヲ第一行ト見做シテ以テ商ノ第一率ト為ス可シ、

第三則　法ハ第二第三率等ニ商ノ第一率ナ乗シテ其積ヲ實ノ第二第三率等ノ下ニ於テ第一第二列等ニ書ス可シ次ニ第二行ノ和ヲ線下ニ記シテ以テ商ノ第二率ト為ス可シ

第四則　前ノ如ク法ノ第一率ヲ除クノ外諸率ニ商ノ第二率ヲ乗シ其諸積ヲ實ノ第三率ノ下ヨリ始メテ各列ニ記シ第三行ノ和ヲ線下ニ下シテ以テ商ノ第三率ト為ス可シ

第五則　上ノ如ク術ヲ反復シテ一行ノ和ノ零ト為ルニ至ル可シ而シテ本實若シ整除ス可キ者ナレハ則チ其以下諸行ノ和ハ皆零トナル可シ若シ否サレハ尚ホ術ヲ反復シテ要用ナル小數ヲ得テ眞數ニ接近スルニ至テ止ミ所得ノ商ナル倍數ニ適當ノ字因ヲ附ス可シ

合成除法ヲ實用スルニ方テ法ノ第一率ハ一箇ニシテ術中無用ニ屬スルカ故ニ強チ之ヲ記スルヲ要セス

設問

第一　$1+x$ ヲ以テ $1-x$ ヲ除スレハ如何

第二　$1+x$ ヲ以テ 1 ヲ除スレハ如何

第三

$$a^5-5a^4x+10a^3x^2-10a^2x^3+5ax^4-x^5 \div a^2-2ax+x^2$$

第四

$$x^6-5x^5+15x^4-24x^3+27x^2-13x+5 : x^4-2x^3+4x^2-2x+1$$

第五

$$x^7-y^7 \div x-y$$

第四百四十三章

方程式ヲ變シテ、方根ノ增減定數アル所ノ別式ト為サントスル時ハ、亦合成除法ヲ用テ大ニ便宜ヲ得ヘシ、其例左ノ如シ、

第一

$$x^4-4x^3-8x+32=0$$

此式ヲ變シテ、方根二箇ヲ減スル所ノ別式ト為ス可シ、

本式中xノ二乘方ヲ見サルカ故ニ、茲ニ之ヲ設ケ、±0ヲ以テ其倍數ト為サヽル可カラス、

第一術

$$\begin{array}{l} 1-4\pm0-8+32 \,\lfloor 2 \\ \quad\;\; 2-4-8-32 \\ \hline 1-2-4-16,\quad 0=X' \end{array}$$

第二術

$$\begin{array}{l} 1-2-4-16 \,\lfloor 2 \\ \quad\;\; 2\pm0-8 \\ \hline 1\pm0-4-24=X'_1 \end{array}$$

第三術

$$\begin{array}{l} 1\pm0-4 \,\lfloor 2 \\ \quad\;\; 2+4 \\ \hline 1+2,\quad 0=\frac{X'_2}{2} \end{array}$$

第四術

$$\begin{array}{l} 1+2 \,\underline{|2} \\ \underline{\quad 2} \\ 1,+4=\dfrac{X'_3}{2\cdot 3} \end{array}$$

仍テ變式下ノ如シ、

$$y^4+4y^3-24y=0$$

又上ノ數術ヲ合一ゾテ左ノ如ク之ヲ行フヿヲ得ヘシ、

術

$$\begin{array}{l} 1-4\pm0-8+32 \,\underline{|2} \\ \underline{\quad 2-4-8-32} \\ -2\quad 4-16,\quad 0=X' \\ \underline{\quad 2\quad 0-8} \\ 0-4,-24=X'_1 \\ \underline{\quad 2+4} \\ 2,\quad 0=\dfrac{X'_2}{2} \\ \underline{\quad 2} \\ 4=\dfrac{X'_3}{2\cdot 3} \end{array}$$

此畧術ノ理ヲ解セント欲セハ、宜シク左ノ二件ヲ記憶ス可シ、曰ク毎術ノ法、總テ同一ノ事、曰ク毎術實ノ第一率1ハ之ヲ書スルモ、左傍ノ一行ニ落ツルヲ以テ之ヲ省ク事、

第二

$$x^4-12x^3+17x^2-9x+7=0$$

此式ヲ變シテ、方根三箇ヲ減スル者ト為ス可シ、

第三術

$$x^3-12x-28=0 \qquad \begin{array}{l} 1-12+17-9+7 \,\underline{|3} \\ \underline{+3-27-30-117} \\ -9-10-39,-110=X' \\ \underline{+3-18-84} \\ -6-28,-123=X'_1 \\ \underline{+3-9} \\ -3,-37=\dfrac{X'_2}{2} \\ \underline{+3} \\ 0=\dfrac{X'_3}{2\cdot 3} \end{array}$$

此式ヲ變シテ方根四箇ヲ減スル者ト為ス可シ、

此ニ於テ $x=y+4$ ト為ス可シ、

仍テ變式下ノ如シ、

$$y^4+0y^3-37y^2-123y-110=0$$

第四術

$$x^3-10x^2+3x-6946=0. \qquad \begin{array}{llll} 1 & 0 & -12 & -28 \,\underline{|4} \\ & \underline{4} & \underline{+16} & \underline{+16} \\ & 4 & 4 & 12=X' \\ & \underline{4} & \underline{32} & \\ & 8 & 36=X'_1 & \\ & \underline{4} & & \\ & 12=\dfrac{X'_2}{2} & & \end{array}$$

此式ヲ變シテ、方根二十箇ヲ減スル者ト為ス可シ、

此ニ於テ $x=20+y$ ト為ス可シ、

仍テ變式下ノ如シ、

$$y^3+12y^2+36y-12=0$$

術

1	−10	3	−6946	20
	20	200	4060	
	10	203	−2886	
	20	600		
	30	803		
	20			
	50			

茲ニ複線ヲ附スル者ハ、即チ三次ノ殘數ナリ、仍テ下ノ變式ヲ得、

$$y^3+5y^2+803y-2886=0$$

第五　右所得ノ變式ヲ復タ變シテ、更ニ方根二箇ヲ減スル者ト為ス可シ、

此ニ於テ $y=3+z$ ト為ス可シ、

仍テ變式下ノ如シ、

$$z^3+59z^2+1130z=0$$

術

1	50	803	−2886	3
	3	159	+2886	
	53	962	0	
	3	168		
	56	1130		
	3			
	59			

此式ニ於テ $z=0$ ト為シ

以テ次式ヲ得ヘシ、

$$y=3$$

$$x=20+3=23$$

第四百四十四章　單ニ未知一數ノ方程式ヲ取

リ、交〻偶率ノ標記ヲ變更スル時ハ、方根ノ標記悉ク變化ス可シ、

比如ハ次ノ通式アリ、

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\cdots+Tx+U=0\cdots(壹)$$

各率標記ノ順序ニ拘ラス、茲ニ先ツ第二率ヨリ始メテ偶率ノ標記ヲ變更ス、

$$x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-\cdots\pm Tx\mp U=0\cdots(貳)$$

若シ第一率ヨリ始ムル時ハ下ノ如シ、

$$x^m+Ax^{m-1}-Bx^{m-2}+\cdots\mp Tx\pm U=0\cdots(参)$$

今若シ壹式ノ方根ヲaト爲シ、之ヲxニ代用スレハ則チ前項零ト爲ル可シ、詳ニ之ヲ解スレハ、正數ノ和ハ負數ノ和ト相同シキナリ、然リト雖モ若シ$-a$ヲ以テ貳參兩式ノxニ代用スレハ、兩式各率ノ數價ハ壹式ノ同率ニ同シカル可シ、而シテm若シ偶數ナル時ハ、貳式各率ノ標記ハ壹式同率ノ標記ト相同シク、參式ハ之ニ反ス可シ、又m若シ奇數ナル時ハ、標記ノ變更全ク前ニ反ス可シ、然リ而シテ壹式ノ方根aナル時ハ貳參兩式ノ方根ハ共ニ$-a$ト爲ルナリ、

斯ノ如ク隅率交代ノ標記ヲ變更スル時ハ、方根ノ標記相反ス、是ニ由テ之ヲ觀レハ悉ク諸率ノ標記ヲ變更スル時ハ更ニ標記ヲ變スルヿ無キヲ知ル可シ、

設問

第一 $x^3-7x^2+13x-3=0$ ノ方根 3 $2+\sqrt{3}$ $2-\sqrt{3}$ ナレハ $x^3+7x^2+17x+3=0$ ノ方根幾許、

第二 $x^4-3x^3+3x^2+17x-18=0$ ノ方根 1 -2 $2+\sqrt{-5}$ $2-\sqrt{-5}$ ナレハ $x^4+3x^3+3x^2-17x-18=0$ ノ方根幾許、

第四百四十五章 方程式ノ倍數悉ク適合數ナル時ハ、不開方根之ニ交ルヿ必ス一對ナル可シ、方程式ノ倍數悉ク眞數ナル時ハ想像方根之ニ交ルヿ必ス一對ナル可シ、

比如ハ左式ノ倍數A B……Uヲ以テ眞數適合數

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + Tx + U = 0 \quad \ldots (壹)$$

ト為ス、

此式ノ一方根ヲ以テ $a \pm \sqrt{\pm b}$ ト為シ、x ヲ以此數價ニ代用シテ次式ヲ得、

$$\left.\begin{array}{l}(a \pm \sqrt{\pm b})^m + A(a \pm \sqrt{\pm b})^{m-1} + B(a \pm \sqrt{\pm b})^{m-2} \\ \quad + \cdots + T(a \pm \sqrt{\pm b}) + U\end{array}\right\} \ldots (貳)$$

雙率法式ヲ以テ此式ノ各式ヲ解散シテ左式ヲ得、

$$a^m \pm m a^{m-1} \cdot \sqrt{\pm b} + m \frac{m-1}{2} a^{m-2} \cdot (\sqrt{\pm b})^2$$

$$\pm \cdots \pm (\sqrt{\pm b})^m,$$

$$Aa^{m-1} \pm A(m-1) a^{m-2} \cdot \sqrt{\pm b} + A(m-1) \frac{m-2}{2} a^{m-3} \cdot ($$

$$Aa^{m-1} \pm A(m-1) a^{m-2} \cdot \sqrt{\pm b} + A(m-1) \frac{m-2}{2} a^{m-3} (\sqrt{\pm b})^2$$

$$\pm \cdots \pm (\sqrt{\pm b})^{m-1}$$

$$Ba^{m-2} \pm B(m-2) a^{m-3} \cdot \sqrt{\pm b} + B(m-2) \quad)^2,$$

$$\pm \cdots \pm (\sqrt{\pm b})^{m-2},$$

$$Ta \pm T\sqrt{\pm b},$$

$$U.$$

各次ノ終率 $\pm(\sqrt{\pm b})^m$ $\pm(\sqrt{\pm b})^{m-1}$, 等ニ於テ±標ハ只其自乗標奇數ナル者ニ之ヲ附ス可ク、若シ偶數ナル者ハ則チ加標ト知ル可シ、

若シ壹式ノ方根ヲ以テ $a+\sqrt{b}$ ト為ス時ハ、解散式ノ諸率ハ則チ必ス適合數及ヒ不開數ノ兩部ヨリ成ル者タル可ク、其適合部ハ即チ $\sqrt{b}$ ノ偶數乘方及ヒ零乘方ヲ以テ因子ト為ス所ノ各率ノ代數和ナル可シ、今此部ヲ名ツケテMト為ス、其不合部ハ $\sqrt{b}$ ノ奇數乘方ヲ以テ因子ト為ス所ノ各率ノ代數和タル可シ、然リ而シテ $(\sqrt{b})^3=b\sqrt{b}$ $(\sqrt{b})^5=b^2\sqrt{b}$ ナルカ故ニ、此部諸率ノ和ハ、以テ $N\sqrt{b}$ ノ單率ト為ス可ク、而シテNハ $\sqrt{b}$ ノ倍數ノ代數和ナリ、且ツ夫レ壹式ノ方根ハ $a+\sqrt{b}$ ト假定スルカ故ニ、貳式ヲ約シテ左ノ如クナル可シ、

$$M+N\sqrt{b}=0 \cdots (参)$$

此式タルヤ $M=0$ $N=0$ ナルニ非サレハ則チ適合ス可カラサル者トス(第二百七十二章第四性)

貳式ヲ變シテ參式ヲ作ルニ方テ貳式解散諸率ノ上標ヲ用フ、若シ式中及ヒ其諸率解散ニ於テ

下標ヲ用ノレハ、則チ壹式ノ方根ヲ $a-\sqrt{b}$ ト假定シタル＝異ナラス、然レハ則チ次式ヲ得ヘシ、

$$M-N\sqrt{b}=c\cdots(\text{肆})$$

式中MNハ固ヨリ參式ニ同シ、故ニ壹式中ニ $a+\sqrt{b}$ ノ方根アレハ、亦必ス $a-\sqrt{b}$ ノ方根アル可シ、

今又壹式ノ方根ヲ以テ $a+\sqrt{-b}$ ト假定スル時ハ、$\sqrt{b}$ ノ偶數乘方ハ眞數ニシテ、奇數乘方ハ想像數ナルカ故ニ、貳式ノ前項ノ解散スル時ハ、眞數及ヒ想像數ノ兩部ヲ以テ成ル者タル可シ、今其眞數部ヲ以テM'ト為ス、

其想像部ハ $\sqrt{-b}$ ノ奇數乘方ヲ以テ因子ト為ス所ノ各率ノ代數和ナリト雖𪜈、

$$(\sqrt{-b})^3=\sqrt{b^3(-b)}$$
$$=b\sqrt{-b}$$
$$(\sqrt{-b})^5=\sqrt{b^4(-b)}$$
$$=b^2\sqrt{-b}$$

ナルヲ以テ此部各率ノ和ハ $N'\sqrt{-b}$ ノ一率ヲ以テ之ニ代、

フルヿヲ得ヘシ、故ニ壹式ノ方根ヲ $a+\sqrt{-b}$ ト假定スレハ貳式變シテ左ノ如シ、

$$M'+N'\sqrt{-b}=0\cdots(伍)$$

式中 $M'=0$ $N'=0$ ナラサル可カラス（第二百七十七章）、

又貳式ノ各率及ヒ其解散諸率ノ下標ヲ用フル時ハ、即チ壹式ノ方根ヲ $a+\sqrt{-b}$ トスルニ同シク、共約式左ノ如クナル可シ、

$$M'-N\sqrt{-b}=0\cdots(陸)$$

伍陸兩式ノ M' N' 互ニ相同シキハ、貳式ノ解散ヲ以テ容易ニ之ヲ知ル可シ、

是ニ由テ之ヲ觀レハ、壹式ノ方根ニ $a+\sqrt{-b}$ アル時ハ、亦必ス $a-\sqrt{-b}$ アル可キハ當然ナリ

特斯加爾徳士（デスカルトス）規則

第四百四十六章　方程式$X=0$ノ眞數正數ノ方根ハ其數各率異標承繼ノ數ニ過クヘカラス而シテ若シ此方程式完全ナル時ハ眞數負數ノ方根ハ其數各率同標承繼ノ數ニ過クヘカラス

原註ニ曰ク凡ツ連續ノ數量ニ於テ同標兩々相續クノ者ヲ同標承繼ト謂ヒ異標兩々相續ク者ヲ異標承繼ト謂フ比如ハ上ノ連續數ニ於テハ同標承繼異標承繼各四對アリトス

$$x^8-3x^7-4x^6+7x^5+3x^4+2x^3-x^2-x+1$$

設如ハ左ノ方程式ノ方根ヲ a b c 等ト為ス

$$X=0\cdots(\text{壹})$$

此式ノ眞數正數ノ方根ニ從ヒ $x-a$ $x-b$ $x-c$ 等ノ諸因子ノ積ヲ以テ壹式ヲ除シ所得ノ方程式ヲ以テ左ノ如シト為ス可シ

$$X_1=0\cdots(\text{貳})$$

此式ニ於テハ絶テ眞數正數ノ方根ナシトス

是ニ於テ眞數正數ノ方根ニ從ヒ一因子 $x-a$ ヲ以テ貳式ニ乘スレハ則チ其所得ノ式ニ於テハ異標承繼ノ數必ス貳式ヨリモ一對ヲ増ス可シ今

之ヲ左ニ示サン、

第一　貳式ヲ以テ完全式ト為シ、其標記ヲ左ノ如シト為ス可シ、

貳式乘實標記	+	+	−	−	+	
因子乘法標記	+	−				
	+	+	−	−	+	
		−	−	+	+	−
積標記	+	±	−	∓	+	−

此ニ複標ヲ置ク者ハ積ノ各率ニ於テ標記ノ未タ確定セサル者ナリ

令未定ノ標記ヲ學者ノ隨意ニ任ス時ハ、此積中異標承繼ノ數ハ必ス乘實ヨリモ增ス可シ、或ハ未定標ヲ省クモ亦上ニ同シ、

第二　貳式未全ナル時ハ、闕率ニ零ノ倍數ヲ附シ、之ヲ補充シテ以テ完全式ト為シ、而シテ其所得ノ式ニ於テ、異標承繼ノ數ハ、貳式ヨリモ減スルヿ無カル可シ、若シ $x-a$ ヲ以テ完全式ニ乘スレハ、上ニ說ク所ノ如ク異標承繼ノ數ハ乘實ヨリモ增ス可シ、然リト雖氏茲ニ得ル所ノ積ニ於テハ、恰モ X_1 ニ $x-a$ ヲ乘シタル者ニ同シ、是ニ由テ之ヲ觀レハ、X_1 ト $x-a$ トノ積ニ於テ異標承繼ノ數ハ X ヨリモ大ナリ、是ニ由テ $x-a$ ノ因子ヲ貳式ニ乘スレハ則チ所得

ノ積ニ於テ、異標承繼ノ數ハ貳式ヨリモ一對ヲ增ス可ク、復タ同法ヲ以テ、此所得ノ方程式ニ $x-b$ ヲ乗スレハ、則チ異標承繼ノ數又一對ヲ增ス可シ、

是故ニ曰ク、方程式 $X=0$ ノ真數正數ノ方根ハ其數、各率異標承繼ノ數ニ過ク可カラスト、

又本章冒頭ノ第二節ハ、則チ左ノ如ク之ヲ證ス可シ、

比如ハ壹式ヲ完全式ト為シ、其隅率ノ標記ヲ變更スレハ、則チ方根ノ標記ヲ變シ(第四百四十四章)、同標承繼ハ異標承繼ト為ル可ク、異標承繼ハ同標承繼ト為ル可シ、然リ而シテ所得ノ方程式ニ於テ真數正數ノ方根ハ其數各率異標承繼ノ數ニ過ク可カラス、是故ニ本式ノ真數負數ノ方根ハ其數、各率同標承繼ノ數ニ過ク可カラスト曰フ、

第四百四十七章　正數方根ヲ增ス時ハ、必ス異標承繼ノ數ヲ增ス可シト雖圧、方程式諸率ノ異標承繼ハ、必シモ真數正數ノ方根ヲ含有ス可シト謂フニ非ス、故ニ左ノ方程式ニ於テ異標承繼

二對同標承繼一對アリ、而シテ其方根中一モ正數ニシテ真數ナル者ナシ、

$$x^3-x^2-7x+15=0$$

方根

$2+\sqrt{-1}$

$2-\sqrt{-1}$

-3

然リト雖凡諸方根皆真數ナル時ハ正數方根ノ數ハ必ス異標承繼ノ數ニ同シク負數方根ノ數ハ必ス同標承繼ノ數ニ同シ、

第四百四十八章　凡ソ方程式ハ之ヲ變シテ其第二率ヲ闕ク者ト為ス可キハ既ニ上(第四百三十七章)ニ之ヲ論シタリ、仍テ三次方程式ハ之ヲ約シテ左ノ形狀ヲ為サシム可シ、

加爾煖三次方程式

此式ヲ解カント欲セハ固ヨリ常法ノ如ク、立方根ヲ開カサル可カラス、而シテ茲ニxノ倍數ヲ$3p$ト為シ、自由率ヲ$2q$ト為ス者ハ、左ノ術中ニ於テ分數ヲ避クルカ為ナリ、

$$x^3+3px=2q\cdots(壹)$$

比如ハ $x=v+y$ トスレハ、壹式變シテ左ノ如シ、

$$(v+y)^3+3p(v+y)=2q \quad \cdots\cdots (貳)$$

解散約式

$$v^3+y^3+3(vy+p)(v+y)=2q \quad \cdots\cdots (参)$$

x ヲ分テ二部ト為シタルハ、固ヨリ隨意ニ出ツルヲ以テ、次式ヲ設クルモ敢テ妨ナシ、

$$vy+p=0 \quad \cdots\cdots (肆)$$

参式ニ由リ

$$v^3+y^3=2q \quad \cdots\cdots (伍)$$

肆式ニ由リ y ノ數價ヲ得テ以テ伍式ニ代用シ、且ツ之ヲ約シテ次式ヲ得ヘシ、

$$v^6-2qv^3=p^3 \quad \cdots\cdots (陸)$$

此ニ由リ

$$v^3=q\pm\sqrt{q^2+p^3} \quad \cdots\cdots (柒)$$

v^3 ノ此數價ヲ以テ、伍式ニ代用ス、

$$y^3=q\mp\sqrt{q^2+p^3} \quad \cdots\cdots (捌)$$

初メ $x=v+y$ ト假定シタル者ナルカ故ニ、柒捌兩式ノ立方根ノ和ヲ取テ次式ヲ得ヘシ、

$$x=\left(q+\sqrt{q^2+p^3}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(q-\sqrt{q^2+p^3}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \cdots\cdots (甲)$$

是ヲ三次方程式ノ加爾燧法式ト為ス、

第四百四十九章　上章加爾燧法式ノp若シ負數ナル時ハ、其立方根ハ數ニ於テq^2ヨリモ大ニシテ$\sqrt{q^2+p^3}$ハ想像數トナル可シ、此例ヲ名ツケテ約ス可カラサル者トス、然リ而シテ此例ニ於テモ亦方程式ノ方根ハ必スシモ想像數ナリト決斷ス可カラス、何トナレハ假令ヒ$\sqrt{q^2+p^3}$ハ想像數ナルモ$a\sqrt{-1}$ヲ以テ之ニ代フルヿヲ得ルカ故ニ、甲式xノ數價ハ左式ノ如クナル可シ、

$$x=(q+a\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}+(q-a\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\ \cdots\ (壹)$$

又

$$x=q^{\frac{1}{3}}(1+a\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}+q^{\frac{1}{3}}(1-a\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\cdots(貳)$$

又

$$\frac{x}{q^{\frac{1}{3}}}=(1+a\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}-(1-a\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\ \cdots\ (參)$$

今參式後項ノ兩率ヲ開散シテ、其所得ヲ加フレハ、$\sqrt{-1}$ヲ含有スル所ノ諸率ハ消失シテ結句真數ト為ル可シ、既ニ約ス可カラサルノ例ニ於テハ方程式ノ方根悉皆真數ト為ルカ故ニ、甲法式ノ實用ニ適ス可キハ、只其二方根想像數ナル時

ニ限レリ、此時ニ方テ眞數方根ハ直ニ法式ニ由テ之ヲ得ヘク、次ニ三次方程式ヲ除シテ二次方程式ト為シ、以テ想像數ノ二方根ヲ得ヘシ、

設問

第一　左ノ方程式アリ其諸方根ヲ求ム、

$$x^3-7x^2+14x-20=0$$

第四百三十七章ニ從ヒ此式ヲ變シテ、其第二率ヲ闕ク者ト為シ、$x=y+\frac{7}{3}$ト為セハ、則チ次ノ變式ヲ得ヘシ、

$$y^3-\frac{7}{3}y=\frac{344}{27}$$

此式ニ法式ヲ適用シテ左式ヲ得、

$$2q=\frac{344}{27}\qquad 3p=-\frac{7}{3}$$

$$q=\frac{172}{27}\qquad p=-\frac{7}{9}$$

$$\sqrt{q^2+p^3}=\sqrt{\left(\frac{172}{27}\right)^2-\left(\frac{7}{9}\right)^3}=\pm\frac{171}{27}$$

$$y=\left(\frac{172}{27}\pm\frac{171}{27}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{172}{27}\mp\frac{171}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{7}{3}+\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$$

$$x=\frac{8}{3}+\frac{7}{3}=5\ \text{眞方根}$$

$x-5$ヲ以テ問題ノ式ヲ除シテ約式ヲ得レハ左ノ如シ、

$$x^2-2x+4=0$$

$$x=1\pm\sqrt{-3}$$

是ニ由テ三方根左ノ如シ、

$$5$$

$$1+\sqrt{-3}$$

$$1-\sqrt{-3}$$

第二 方程式 $x^3+6x=88$ アリ其 x ヲ問フ、

法式ヲ適用センカ為ニ、先ツ左式ヲ作ル可シ、

$$3p=6 \qquad 2q=88$$

$$p=2 \qquad q=44$$

$$\sqrt{q^2+p^3}=\sqrt{1936+8}=44.090815+$$

$$x=(44+44.090815)^{\frac{1}{3}}+(44-44.090815)^{\frac{1}{3}}$$

即チ

$$x=4.4495-.4495=4 \text{ 真方根}$$

是ニ由テ左ノ約式ヲ得ヘシ、

$$x^2-4x-22=0$$

$$x=-2\pm3\sqrt{-2}$$

仍テ所得ノ三方根ハ即チ次ノ如シ、

$$4$$

$$-2+3\sqrt{-3}$$

$$-2-3\sqrt{-3}$$

第三 $x^3-6x=5.6$ ニ於テ x ノ數價ヲ求ム、

此例ハ即チ約ス可カラサル者ナルカ故ニ、級數法ヲ以テ之ヲ解クヿ次ノ如シ、

$$q=2.8 \qquad p=-2$$

$$x=\left(2.8+\sqrt{7.84-8}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(2.8-\sqrt{7.84-8}\right)^{\frac{1}{3}}$$

又

$$x=\left(2.8+.4\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(2.8-.4\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

又

$$\frac{x}{\sqrt[3]{2.8}}=\left(1+\frac{1}{7}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(1-\frac{1}{7}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

今 $b=\frac{1}{7}\sqrt{-1}$ トスル時ハ

$$\left(1+\frac{1}{7}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}=(1+b)^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(1-\frac{1}{7}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}=(1-b)^{\frac{1}{3}}$$

$$b^2=-\frac{1}{49}$$

$$b^4=-\frac{1}{49}\times-\frac{1}{49}$$

雙率式ニ從ヒ、

$$(1+b)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}b-\frac{2}{3\cdot6}b^2+\frac{2\cdot5}{3\cdot6\cdot9}b^3-\frac{2\cdot5\cdot8}{3\cdot6\cdot9\cdot12}b^4+\cdots\cdots$$

$$(1-b)^{\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3}b-\frac{2}{3\cdot6}b^2-\frac{2\cdot5}{3\cdot6\cdot9}b^3-\frac{2\cdot5\cdot8}{3\cdot6\cdot9\cdot12}b^4-\cdots\cdots$$

和 $=2-2\left(\frac{2}{3\cdot6}b^2\right)-2\left(\frac{2\cdot5\cdot8}{3\cdot6\cdot9\cdot12}b^4\right)-\cdots\cdots$

$=2+.004535-.000034=2.004569$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{2.8}}=2.004569$$

仍テ

$$x=(2.004569)\sqrt[3]{2.8}=2.84734$$

答

左ノ諸式アリ、各其xノ數價ヲ求ム、

第四

$$x^3-6x-6=0$$

第五

$$x^3+9x-6=0$$

第六

$$x^3+6x^2-13x+24=0$$

第十一綱　多次方程式

眞數方根際限

第四百五十章　凡ソ方程式ノ正數方根ハ0及ヒ$+\infty$ノ間ニ限ラレ、負數方根ハ0及ヒ$-\infty$ノ間ニ止マル可シ、然リ而シテ多次方程式ノ數價ヲ解カント欲スル時ハ、愈狹隘ナル際限ヲ為スヲ以テ須要ト為ス、今之ヲ論スルニ先テ、若シ未知數ニ代フルニ其諸方根ヨリモ多少ノ差アル諸數、及ヒ諸方根ヲ其中間ニ含ム所ノ諸數ヲ以テスル時ハ、方程式ニ於テ生スル所ノ影響如何ヲ説ク可シ、

第四百五十一章　方程式若シ普通ノ形ニシテ、其成立ハ方根ノ標記ヲ又シテxニ附シタル、雙率ヲ相乘スル所ノ積ナリトスル時ハ、其積ノ標記ハ未タ嘗テ想像方根ノ影響スル所ニ非サルヲ知ル可シ、何トナレハ第四百四十五章ニ從ヘハ、方程式ノ一方根$a+\sqrt{-b}$ノ形ヲ成ス時ハ、必ス又他ニ$a-\sqrt{-b}$ノ形ヲ成ス者アル可シ、然リ而シテ此兩方

根ヲ相乘スレハ則チ左式ノ如シ、

$$(x-a-\sqrt{-b})(x-a+\sqrt{-b})$$
$$=(x-a)^2+b$$

此式タルヤ必ス常ニ正數ナル者ナリ、

第四百五十二章

比如ハa b c d等ヲ以テ方程式ノ眞方根ト為シ、代數價格ノ順序ニ從テ位次ヲ立ツレハ、則チ左ノ如ク方程式ヲ記スルヿヲ得ヘシ、

第一則

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\cdots\cdots=0$$

令xニ代フルニhヲ以テスレハ、此前項次ノ如シ、

$$(h-a)(h-b)(h-c)(h-d)\cdots\cdots$$

此h若シ最小方根aヨリモ小ナレハ、則チ各因子負數タルヘク、其積ハ則チ因子ノ數ノ奇偶ニ由テ正數或ハ負數タル可シ、然リ而シテ因子ノ數ハ必ス方程式ノ次數ニ同シ（第四百二十七章）、是ニ由テ左則ヲ得、

第一則、最小方根ヨリモ小ナル數ヲ以テ方程式中ノxニ代ヘ、而シテ方程式偶數ナレハ則チ

其所得正數ナル可ク若シ奇數ナレハ則チ其所得負數ナル可シ

又 h 若シ最大方根ヨリモ大ナル時ハ各因子正數ナル可ク因テ其積モ亦正數ナル可シ是ニ由テ左則ヲ得

第二則　最大方根ヨリモ大ナル數ヲ以テ方程式中ノ x ニ代フレハ則チ其所得ハ毎ニ正數ナル可シ

又 h ヲ以テ前ニハ a ヨリモ小ト為シ後ニハ a ヨリモ大ニシテ b ヨリモ小ト為ス可シ前後 h ノ價格ノ變スレハ則チ因子 $(h-a)$ ノ標記ノ變ス可ク因テ亦其積ノ標記ヲ變ス可シ又次ニ h ヲ以テ b ヨリモ大ニシテ c ヨリモ小ト為ス時ハ同上ノ理ニ由テ積ノ標記ヲ變更ス可シ故ニ凡ソ不定數 h ハ方程式眞方根ノ數價ニ過クレハ輙チ必ス標記ヲ變ス可ク否ラサレハ決シテ標記ヲ變スルヿナシトス是ニ由テ左則ヲ得

第三則　二數ヲ以テ順次ニ方程式中ノ x ニ代フレハ其所得ハ標記ヲ反對シ二數ノ間ニ少クモ必ス眞數ノ一方根ヲ含有ス可シ

又若シ代用ノ間ニ、方根ノ數一三五等ノ奇數ヲ含有スル時ハ、其所得ハ標記ノ變化ヲ級、可ク方根ノ數偶數ナル時ハ、未タ嘗テ標記ヲ變更セス、

第四百五十三章　方程式中最大ナル負數倍數ノ數價ヲ以テPト為シ、第一負數倍數ノ前ニ在ル率數ヲnト為ス時ハ$\sqrt[n]{P}+1$ヲ以テ此方程式正數方根ノ最上際限ト為ス可シ、

設如ハ左式ナリ、

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\cdots+Tx+U=0\cdot(壹)$$

x^mヨリ第一負數倍數ニ至ルノ間ニ正數率アラハ、之ヲ脱却シ$-P$ヲ以テx^mノ後ヨリ以下各率ノ倍數ニ代フレハ、則チ壹式ノ前項次ノ如クナル可シ、

$$x^m-(Px^{m-n}+Px^{m-n-1}+\cdots+Px+P)\cdots(貳)$$

xニ代用スル所ノ數價ハ其何タルヲ論セス、貳式ノ所得ヲ正數ト為ス者ハ亦必ス壹式ノ所得ヲ正數ト為ス可シ何トナレハ壹式ノ諸負率ノ和ハ固ヨリ貳式ノ負數

部ヨリ大ナルコ能ハス、且ツ壹式ニ於テ一二ノ正數率アリ、貳式ニ於テハ之ヲ脱却シタルヲ以テナリ、

x^mヲ以テ貳式ノ各率ヲ除シテ次式ヲ得ヘシ、

$$1-\left(\frac{P}{x^n}+\frac{P}{x^{n+1}}+\frac{P}{x^{n+2}}+\cdots+\frac{P}{x^{m-1}}+\frac{P}{x^m}\right)\cdots(参)$$

今 $x=\sqrt[n]{P}+1=r+1$ トスレハrヲ以テ$\sqrt[n]{P}$ニ代用シ以テ術ヲ簡易ナラシムヲ可シ、而シテ$P=r^n$ナルヲ知ラハ、則チ次式ヲ得ヘシ、

$$1-\left(\frac{r^n}{(r+1)^n}+\frac{r^n}{(r+1)^{n+1}}+\cdots+\frac{r^n}{(r+1)^{m-1}}+\frac{r^n}{(r+1)^m}\right)$$

第三百六十章乙式ニ從ヒ括弧内ニ顯ハル、所ノ幾何級數ヲ加フレハ、則チ次式ノ如クナル可シ、

$$1+\frac{r^{n-1}}{(r+1)^m}-\left(\frac{r}{r+1}\right)^{n-1}\cdots(肆)$$

今$\frac{r}{r+1}$ハ真ノ分數ニシテ一箇ヨリモ小ナルカ故ニ、肆式ノ數價ハ必ス正數ナリ、又負率$\left(\frac{r}{r+1}\right)^{n-1}$ハ常ニ一箇ヨリモ小ナルヲ以テ、$r$ノ數價ハ何程大ナル氏、肆式負數ト為ルコ無シ、是ニ由テ之ヲ觀レハ$\sqrt[n]{P}+1$若シクハ較大ナル他ノ數ヲ

以テxニ代用スレハ、其所得ハ既ニ参式ニ於テ正數ナルカ故ニ、貳式ニ於テモ正數ナリ、壹式モ亦正數ナラサルヲ得ス、仍テ第四百五十二章第二則ニ從ヒ$\sqrt[n]{P}+1$ハ方程式正數方根ノ最上際限タルヲ證スルニ足ル可シ、

上ニ說ク所ノ條理ヲ適用セント欲スル時ハ、自由率ヲ以テx^0ノ倍數ト為サヽル可カラス、而シテ若シ方程式未全ナル時ハ、闕率ヲ以テnノ數中ニ算入セサル可カラス、

又方程式中一モ負數率ナキ者ハ、決シテ正數方根ナシ、何トナレハ、正數ヲ以テxニ代フル時ハ、皆始率ヲ正數ト為ス可キヲ以テナリ、詳ニ之ヲ解スレハ、xノ正數ハ絶テ始率ヲ零ト為スヿ能ハサルカ故ナリ、

設問

第一ノ方程式 $x^5+5x^4+2x^3-14x^2-26x+10=0$ ノ正數方根最上ノ際限ヲ問フ、

此ニ於テ $n=3$ $P=26$ ナリ
仍テ總數下ノ如シ、

$$\sqrt[n]{P}+1=\sqrt[3]{26}+1=4$$ 答

左ノ諸方程式ノ正數方根最上際限ヲ求ム、

第一

$$x^4+5x^3-25x^2-12x+68=0$$

第三

$$x^4-5x^2-9x+12=0$$

第四

$$x^3+x^2+3x-8=0$$

第四百五十四章　方程式負數方根最上ノ際限數ヲ知ラント欲セハ、則チ左則ニ從フ可シ、

則　陽率ハ、標記ヲ變更シ、若シ未全式ハ其關率、ヲ之ニ算入シ而シテ後ニ上章ノ規則ヲ適用ス、可シ、

蓋シ本則ハ第四百四十四章ニ從ヒ、新方程式ノ正數方根ハ舊本方程式ノ負數方根ト其數相同シキニ由ルナリ、

設問

左ノ方程式ニ於テ負數方根ノ最上際限ヲ問フ、

第一	第二	第三
$x^3-3x^2+5x+7=0$	$x^4-15x^2-10x+24=0$	$x^6-3x^5+2x^4+27x^3-4x^2-1=0$

方程式際限

第四百五十五章　爰ニ甲方程式アリ其諸方根ハ數價ノ順序ニ於テ直ニ他ノ乙方程式ノ諸方根ノ中間ニ在ル時ハ、甲ヲ名ツケテ乙ノ方程式際限ト曰フ、

第四百五十六章　既ニ方程式ヲ知レハ、其第一假複率ヲ零ト為シ以テ其際限式ヲ作ルコヲ得ヘシ、

比如ハ $X=0$ 式ノ諸方根ヲ a b c ⋮ k l ト為シ、其假複率 $X_1=0$ ノ諸方根ヲ a' b' c' ⋮ k' l' ト為シ、數價ノ順序ニ從テ位次ヲ立テ、又兩式ノ諸方根ヲ合シテ數價ノ順序ニ從テ位次ヲ立ツレハ、則チ其諸方根下ノ如キヲ知ル可シ、

$$a, a', b, b', c, c', \ldots k, k', l, l'$$

兩式ニ於テ $x=x'+u$ ト為シ、諸率ヲ開散シテ其所得ニ於テ、u ノ遞加自乘標ニ從テ位次ヲ立テ、而シテ X_2 ハ X_1 ノ第一假複率タルヲ以テ、此ニ注意シテ、第四百三十六章ノ記號ヲ用ヒテ次式ヲ得ヘシ、

$$X=X'+X'_1u+\frac{X'_2}{2}u^2+\frac{X'_3}{2\cdot3}u^3+\cdots\cdots=0\cdots(壹)$$

$$X_1=X'_1+X'_2u+\frac{X'_3}{2}u^3+\frac{X'_4}{2\cdot3}u^3+\cdots\cdots=0\cdots(貳)$$

此ニ於テ X' X'_1 X'_2 等ハ X X_1 X_2 等ニ代フル者ニシテ、x' ヲ以テ x ニ代用スル時ヲ示ス者ナリ、

今 $x'=r$ 即チ $x=r+u$ トスル時ハ、r ハ方程式ノ方根ナリ、然リ而シテ $X=0$ ニシテ X'_1 X'_2 X'_3 ハ各一定ノ價格ヲ得ルカ故ニ u ニ若干ノ數價ヲ附シテ、X 及ヒ X_1 ハ零ト為リ、或ハ零ト為サル者アリ、X' ヲ壹式ヨリ落シテ、其商ノ因子ヲ分割スレハ、則チ次式ヲ得ヘシ、

$$X=u\left(X'_1+\frac{X'_2}{2}u+\frac{X'_3}{2\cdot3}u^2+\cdots\right)\cdot(參)$$

$$X_1=\left(X'_1+\frac{X'_2}{2}u+\frac{X_3}{2\cdot3}u^2+\cdots\right)\cdots(肆)$$

式中 r u ノ數價ニ由リ所屬ノ諸率必ス正數ト為ル者アリ又負數ト為ル者アリ、

是ニ於テ括弧内第二率以下各率uノ價格ヲ減スレハ隨意ニ之ヲ縮小セシム可クu若シ十分ニ小ナレハ則チ各括弧内uヲ含有スル所ノ諸率ノ和ハ第一率X'_1ヨリモ小ニシテ兩括弧ノ數量ハ其標記必スX'_1ノ標記ニ關セサルヲ得サルニ至ルハ固ヨリナリ仍テu若シ最小無究ニ至レハX及ヒX_1ノ標記ハ各必ス$u(X'_1)$及ヒX'_1ニ關ス可シ是故ニu若シ負數ナレハ則チX X_1ハ其標記相同シカル可シ

第四百五十七章　上章說ク所ニ由テ之ヲ觀レハ方程式$X=0$及ヒ其第一假複率$X_1=0$ニ於テ$r-u$ヲ代用スレハ方根ハ小ナルヲ以テ其所得ハ標記ヲ反ス可ク若シ$r+u$ヲ代用スレハ方根ヨリモ大ナルヲ以テ其所得ハ相同シカル可シ

第四百五十八章　今X X_1ノ記號ニ代用スル所ノ數ヲ以テ$X=0$ノ最小方根aヨリモ稍小ナル者ト思ヒ而シテ後ニ又aヨリモ稍大ナル者ト想フ可シ若シ方根aノxヲ過クルニ至レハ則チXハ其標記ヲ反ス可シ(第四百五十二章第三則)是ニ由テ記號ノ標記左ノ如シ

$x=a-u$
$x=a$
$x=a+u$ ナル時ハ

X	X_1
+	−
0	−
−	−

否ラサル時ハ

X	X_1
−	+
0	+
+	+

又代用ノ數量$x=a+u$ヨリ増加シテ$x=b-u$ニ至リ$X=0$ノ等ニ方根bト欒ト相近カラシム可シ、然レハ則チ上章ニ説ク所ノ理ニ從ヒテX及ヒX_1ハ其標記相反ス可ク、又Xハxノ數價$a+u$ヨリ$b-u$ニ至ルノ間ニ於テ其標記ヲ變スルヿ能ハサルヲ以テ標記ノ變化ハ必スX_1ニ在ラサル可カラス、第四百五十二章第三則ニ由レハ、$X_1=0$ノ一方根ハ$a+u$及ヒ$b-u$ノ中間即チa及ヒbノ中間ニ在リトス、又同法ニ由テ$X_1=0$ノ一方根ハb及ヒcノ中間ニ在リ、又一方根ハc及ヒdノ中間ニ在リ、餘皆之ニ準ス、是ニ由テ本章冒頭ノ思想ノ眞ナルヲ證ス可シ、

西德爾摩(スドルム)法則

第四百五十九章　西德爾摩法則ノ主義タルヤ、

方程式真數方根ノ數ヲ定メ、且ッ適合數ニ於テハ其位數ヲ定メ、不開數ニ於テハ其首字ヲ定ムルニ在リ、

原註ニ曰ク、此問題ノ困難ナル、既ニ久シク數理學士ノ心勞ヲ費シテ後ニ、西德爾擘氏創メテ術ヲ得テ之ヲ解キ、西曆一千八百二十九年佛國大學校ノ嘉納スル所ト為レリ、

第四百六十章　方程式ノ同方根ヲ求メテ之ヲ省約ス可キハ既ニ上(第四百三十五章)ニ之ヲ說ケリ、仍テ今左式ヲ設ク、

$$X=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\cdots+Tx+U=0$$

此式ヲ以テ同方根ナキ者ト為シ、$X_1=0$ヲ以テ其第一假複率、或ハ際限式ト為ス可シ、

今此X、X_1ノ記號ニ最大公倍數ヲ求ムルノ法(第一百〇五章)ニ類スル者ニシテ、聊左ノ改正ヲ加ヘタル者ヲ適用ス可シ、

改正　每次、殘數、ノ標記ヲ變更シ除術ノ用意ニ於テ負數因子ヲ取捨セス、

每次ノ殘數ハ其標記ヲ變更シ、R、R_1、R_2、…、R_{n-1}、R_nヲ以テ之ニ代フレハ上ノ方程式ハ一モ同方根ナキ者ナルカ故ニX、X_1ノ間ニ公倍數ナシ、(第四

百三十五章)、仍テ除術ヲ反復シテ終ニ残數R_nヲ得ルニ至レハ、則チ其數ハ零ニ非スシテ、又xニ關セサル者ト為ル可シ、

是ニ於テ$X\ X_1$ 及ヒ $R\ R_1 \ldots\ldots R_{n-1}\ R_n$ ノ各記號ノxニ代フルニ別數ヲ以テシ、假ニ之ヲhト為シ、所得ノ標記ヲ一列ト為シ、異標承繼ノ數ヲ記ス可シ、次ニxニ代フルニhヨリモ較大ナル數h'ヲ以テシ、再ヒ異標承繼ノ數ヲ記ス可シ、此二回ノ代用ニ於テ異標承繼數ノ差ハ$h\ h'$ノ中間ニ在ル所ノ眞方根ノ數ニ同シカル可シ、是ヲ西德爾摩ノ法則ト為ス、尚左ニ之ヲ説明ス可シ、

設如ハ$Q\ Q_1\ Q_2 \ldots\ldots Q_{n-1}\ Q_n$ヲ以テ毎次除術ノ商ト為ス時ハ實ハ常ニ法ト商トノ積ニ眞ノ残數ヲ加フル者ニ同シク、若シ残數ノ標記ヲ變更スレハ之ヲ減スル者ニ同シ、是ニ由テ下式ヲ得、

$$\left.\begin{array}{ll}
(一) & X = X_1 Q - R \\
(二) & X_1 = R Q_1 - R_1 \\
(三) & R = R_1 Q_2 - R_2 \\
(四) & R_1 = R_2 Q_3 - R_3 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
(n) & R_{n-2} = R_{n-1} Q_n - R_n
\end{array}\right\} \cdots\cdots (甲)$$

右甲式ニ由テ左ノ三條ヲ得

第一條 X、X_1、R、R_1、……R_n ニ於テ x ニ代フル別數ヲ以テスレハ諸記號一時ニ零ト為ル者ハ必ス二ナラス、

若シ二アリトセハ x ニ代フル所ノ h ヲ以テ一時ニ X_1 及ヒ R ヲ零ト為ス所ノ數ト為ス可シ、然レハ則チ甲ノ第一式ハ $R_1=0$ ト為リ可ク、第三式ハ $R_2=0$ ト為ル可ク、次ヲ逐テ其終ニ至レハ $R_n=0$ ト為ル可シ、是レ固ヨリ成ル可カラサル者ナリ、

第二條 x ニ其數價ヲ代用シテ一記號零ト為ル時ハ他ノ兩記號ハ其標記相反ス可シ、

比如ハ第三式ニ於テ R_1 若シ零トナラハ則チ此式變シテ

$$R=-R_2$$

ト為ル可シ、即チ R R_2 ノ標記相反スルナリ、

右兩條ノ理ヲ確定シテ後ニ一時ニ諸記號ニ代用ス可キ數量 h ヲ以テ不定數ト為シ漸々小ヨリ大ニ至ル者ト為ス時ハ其方根ヲ過クルニ際シテ所屬ノ記號零ト為リ以テ標記ヲ變更ス可シ（第四百五十二章第三則）

比如ハ p ヲ以テ $R_2=0$ ノ一方根ヨリモ稍小ト為シ、

qヲ以テ稍大ト為シ、两數ノ中間ニハ$R_1=0$及ヒ$R_3=0$ノ方根ヲ含有セサル者ト為ス時ハ、h變シテpヨリqニ至ルノ際ニ於テ、R_2ハ零ト為リ其標記ヲ變更ス可シ、然リ而シテR_1及ヒR_3ハ其標記ヲ變更スルヿ無シト雖氏、若シ$R_2=0$タル時ハ兩記號、第二條ニ從テ相反ス可ナリ故ニ、$h=p$或ハ$h=q$タル時モ亦其標記相反ス可シ、今$h=p$トスル時ハ各自ノ標記左ノ如シ、

$R_3\ -$　　　$R_3\ +$
此複標ハ何レヲ取ル氏、

$R_2\ \pm$　或ハ　$R_2\ \pm$
異標同標ノ承繼各々一對

$R_1\ +$　　　$R_1\ -$
ナリ、

若シ$h=q$タル時ハ標記左ノ如シ、

$R_3\ -$　　　$R_3\ +$
異標同標ノ承繼共ニ前

$R_2\ \mp$　或ハ　$R_2\ \mp$
ニ同シク異標承繼ニ於

$R_1\ +$　　　$R_1\ -$
テ更ニ增減ナシ、

凡ソ中間ノ記號ニハ悉ク此理ノ適當スルハ、固ヨリナルカ故ニ又次ノ條ヲ得、

第三條　h若シX及ヒR_nノ中間ニ在ル所ノ記號ハ一方根ニ過クル時ハ異標承繼ノ數ニ於テ變易ナカル可シ、

比如ハ a b c d ⋯⋯ l ヲ以テXノ諸方根ト為シ、其數價ニ從テ位次ヲ立ツル者トス、而シテX_1ノ方根ハ先ツ a b ノ間ニ出テ、次ニ b c ノ間ニ顯ハル、逐次皆斯ノ如シ(第四百五十八章)是ニ於テX_1ノ次數ハXヨリモ少キヿ一箇ナルカ故ニ、若シXノ次數奇數ナレハ、X_1ノ次數ハ偶數ナル可ク、若シXノ次數偶ナレハX_1ノ次數ハ奇ナル可シ、今 h ヲ以テ a ヨリモ小ナリト為セハ、第四百五十二章第一則ニ從テ、X X_1ノ標記相同シカラスシテ異標承繼ヲ成ス可シ、h 若シ徐ニ增シテ a ヨリモ稍大ナルニ至レハ、Xハ標記ヲ變シテX X_1ノ間ニ在ル一對ノ異標承繼ヲ失フ可シ、h 若シ尚ホ增シテ b ヨリモ稍小ナルニ至レハ、X_1ノ第一方根ヲ過キテX X_1ノ標記再ヒ不同ト為ル可シ、然リト雖氏第三條ニ由テ、X_1ノ標記ニ於テ此變化ヲ生シタルカ為ニ、諸記號ノ標記ニ於テハ異標承繼ノ數ヲ變スルヿ無カル可シ、又 h 愈增シテ b ヨリモ稍大ナルニ至レハ、Xハ復タ標記ヲ變シテ再ヒ異標承繼一對ヲ失フ可シ、斯ノ如ク異標承繼ノ數ハ h Xノ一方根ヲ過ク

比如ハ次ノ複率アリ、

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+Dx^{m-3}+Ex^{m-4}+\cdots$$

如

$$x=\infty$$

$$A>\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+\frac{D}{x^3}+\frac{E}{x^4}+\cdots \quad (壹)$$

蓋シ此後項ハ至微實數、
或ハ零ヨリモ小ナルカ
故ナリ、又此兩項ニx^mヲ
乘スレハ則チ次ノ如シ、

$$Ax^m>Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+Dx^{m-3}+Ex^{m-4}+\cdots \quad (貳)$$

是故ニ$x=\infty$ナル時ハ此複率ノ始率ハ實ニ他ノ諸
率ノ和ヨリモ大ナリ、仍テ總數ノ標記ハ始率ノ

ル毎ニ必ス一對ヲ減シテ法則ノ信憑ス可キハ
推シテ知ル可シ、

第四百六十一章　各種記號ニ於テxニ代用ス
ルニ、毎次$h=-\infty$及ヒ$h=+\infty$ヲ以テスレハ、便チ方程式中
眞數方根ノ數ヲ知ル可シ、此代用ニ於テ記號ノ
標記ヲ知ラント欲セハ、則チヲ記左則憶ス可シ、
則　xハ遞減乘方ナル複率ニ於テ無究數ヲ以
テxニ代用スレハ總數ノ標記ハ第一率ノ標記
ニ關ス可シ、

標記ニ同シキナリ、

第四百六十二章 西德爾摩法則ヲ實用スルニ方テハ、常ニ X_1 R R_1 等ノ諸號ニ於テ數因ヲ發棄スル了ヲ得ヘシ、是レ蓋シ數因ハ所得ノ標記ニ關スル了無キヲ以テナリ、其例左ノ如シ、

第一 方程式 $x^3-3x^2-12x+24=0$ アリ、其真方根ノ數及ヒ位置ヲ問フ、

單因子ヲ省約シテ各異ノ記號左ノ如シ、

$$X = x^3-3x^2-12x+24$$
$$X_1 = x^2-2x$$
$$R = x-2$$
$$R_1 = 4$$

此諸號ニ於テ $x=-\infty$ 及ヒ $x=+\infty$ ヲ代用シテ、毎次ノ標記ヲ得ル了下ノ如シ、

	X	X_1	R	R_1	
$x=-$		$+$	$-$	$+$,	3
$x=+\infty$,	$+$	$+$	$+$	$+$,	0

答 3 真方根三

問題ノ方程式ニ於テハ、異標承繼二對同標承繼一對ナルカ故ニ、其二方根ハ正數ニシテ一方根

ハ負數ナル可シ（第四百四十六章）、又正數方根ノ位置ヲ知ラント欲セハ、則チ逐次ニ $x=0$ $x=1$ $x=2$ 等ヲ代用シ各次所得ノ異標承繼ヲ記スレハ則チ左ノ如シ、

	標記				異標承繼
$x=0$,	+	−	−	+,	2
$x=1$,	+	−	−	+,	2
$x=2$,	−	−	±	+,	1
$x=3$,	−	−	+	+,	1
$x=4$,	−	+	+	+,	1
$x=5$,	+	+	+	+,	0

$x=1$ ヨリ $x=2$ ニ至ルノ間ニ於テ異標承繼一對ヲ失ヒ、又 $x=4$ ヨリ $x=5$ ニ至ルノ間ニ於テ復タ一對ヲ失フカ

故ニ、正數ノ一方根ハ一二ノ間ニ在ル可ク、又一方根ハ四五ノ間ニ在ル可シ、

又負數方根ノ位置ヲ知ラント欲セハ、則チ $x=0$ $x=-1$ $x=-2$ 等ヲ代用シテ其標記ヲ得ルヿ左ノ如シ、

	標記				異標承繼
$x=0$,	+	−	−	+,	2
$x=-1$,	+	−	−	+,	2
$x=-2$,	+	+	−	+,	2
$x=-3$,	+	+	−	+,	2
$x=-4$,	−	+	−	+,	3

是ニ由テ負數方根ハ -3 -4 ノ間ニ在ル可ク、又三方根ノ首字ハ 1 4 及ヒ -3 ナルヲ知ル可シ、

第二　方程式 $x^4-2x^3-7x^2+10x+10=0$ ノ眞方根及ヒ其位置ヲ問フ、

此問題ノ記號及ヒ標記次ノ如シ、

$X = x^4-3x^3-7x^2+10x+10$

$X_1 = 2x^3-3x^2-7x+5$

$R = 17x^2-23x-45$

$R_1 = 152x-305$

$R_2 = 52185$

		異標承繼
$x=-\infty$,	$+\ -\ +\ -\ +$,	4
$x=+\infty$,	$+\ +\ +\ +\ +$,	0

是ニ由テ諸方根皆眞數ナリトス、

問題方程式ノ標記ノ異標承繼ニ對、同標承繼ニ對ナルカ故ニ、其二方根ハ正數ニシテ二方根ハ負數ナリ、其位置ハ則チ左ノ如シ、

	標記	異標承繼
$x=0$,	$+\ +\ -\ -\ +$,	2
$x=1$,	$+\ -\ -\ -\ +$,	2
$x=2$,	$+\ -\ -\ -\ +$,	2
$x=3$,	$+\ +\ +\ +\ +$,	0
$x=-1$,	$-\ +\ +\ -\ +$,	3
$x=-2$,	$-\ -\ +\ -\ +$,	3
$x=-3$,	$+\ -\ +\ -\ +$,	4

是ニ由テ二方根ハ二三ノ間ニ在リ、一方根ハ零及ヒ－1ノ間ニ在リ又一方根ハ－2－3ノ間ニ在リトス、

二三箇ノ中間ニ在ル所ノ兩方根ヲ分界ス可キ深根ヲ知ラント欲セハ、問題ノ方程式ヲ變シテ其方根二箇ヲ減スル者ト為シ、第四百四十三章ニ由テ術ヲ施スヘシ左ノ如シ、

$$
\begin{array}{l}
1 - 2 - 7 + 10 - 10 \;\big|\; 2 \\
\underline{\;\;2 \quad 0 - 14 - 8\;} \\
0 - 7 - 4, + 2 = X \\
\underline{2 + 4 - 6} \\
2 - 3, - 10 = X_1 \\
2 + \underline{8} \\
4, + 5 = \dfrac{X_2}{2} \\
\underline{2} \\
6 = \dfrac{X_3}{2 \cdot 3}
\end{array}
$$

是ニ由テ變式下ノ如シ、

$$V = y^4 + 6y^3 + 5y^2 - 10y + 2 = 0$$

本式ノ兩正數方根ハ二三ノ間ニ在ルヲ以テ變式ニ於テハ零一ノ間ニ在ラザル可カラス、此兩方根ノ位置ハ只Vニ由リ左ノ如ク試驗シテ以テ之ヲ求メ得ヘシ、

代用	$y = 0$	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8
Vノ標記	+	+	+	−	−	−	−	−	+

是ニ由テVノ一方根ハ.2 .3ノ間ニ在ル可ク、又一方根ハ.7 .8ノ間ニ在ル可シ、仍テ本式ノ方根首字ハ2.2及ヒ2.7ナルヲ知ル可シ、

原註ニ曰ク、Vノ兩正數方根若シ相同シキ時ハ復タVヲ變シテ以テ同上ノ試驗ヲ為ス可シ、若シ精密ニ方程式ノ方根ヲ求メント欲セハ、則チ次ノ波爾約爾接近法ニ由ル可シ、

波爾約爾接近法

第四百六十三章　西暦一千八百十九年英國數理博士波爾約爾君、各次方程式ノ方根數接近ノ妙法ヲ發行ス、其術タルヤ數四ノ變式ニシテ、毎四方程式一次ヨリ、前四ノ方根首字ヲ減シテ、

以テ之ニ得ル者ト雖モ、前章ノ如ク代用ヲ為スニ非ス、二乘三乘ノ方根ノ如ク試驗除法ヲ以テ首字ヲ得ル者ナリ、

第四百六十四章　設如ハ左ノ普通式アリ、

$$\left.\begin{aligned} X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \\ + \cdots + Tx + U = 0 \end{aligned}\right\} \cdots (壹)$$

西德爾孳法則或ハ其他ノ法方ニ由テ、得ル所ノ方程式ノ一真方根ノ一二首字ヲ以テrト為シ、次ニ其式ヲ變シテ方根rヲ減スル者ト為シ、$x=r+y$ト為シテ次式ヲ得ヘン、

$$T=y^m+A'y^{m-1}+B'y^{m-2}+\cdots+T'y+U'=0\cdots(貳)$$

此式ニ於テyハ方根ノ小數部ト為ス可シ、何トナレハrハ既ニ其整數部ノ全有スルハ必然ナレハナリ且ツyノ高乗方ナル諸率ハ較小ナルヲ以テ之ヲ脱却スレハ便チ次式ヲ得ヘシ、

$$T'y+U'=0$$

即チ

$$y=-\frac{U'}{T'}$$

此商ヲ以テsト為シ、$y=s+z$ト為シ、貳式ヲ變シテ方根sヲ減スル者トノチ次式ノ如シ、

$$V'=z^m+A''z^{m-1}+B''z^{m-2}+\cdots+T''z+U''=0$$

然ルハ但

是ニ由テ前ノ如ク次式ヲ得、

$$z=\frac{U''}{T''}=t+z'$$

是ニ於テtハ求ムル所ノ方根中ノ別字ナリ、數四此術ヲ反復スレハ則チ終ニ下式ヲ得ヘシ、

$$x=r+s+t+\cdots$$

是故ニ某次方程式ヲ解カント欲セハ先ツ西徳爾摩法則等ヲ用ヒテ真方根ノ數及ヒ各方根ハ

一二首字ヲ求メ次ニ方根ノ真數價ニ接近スルノ法則左ノ如シ

第一則　問題ノ式ヲ變シテ求ムル所ノ方根ヨリ一二首字ヲ減スル者ヲ以テ方根ト為ス者ト為ス可シ

第二則　變式ノ自由率ヲ除スルニ其前率ノ倍數ヲ以テ目的ト為シ其商ノ初位ヲ以テ求ムル所ハ方根ノ次位ト為ス可シ

第三則　上則ニ由テ得ル所ノ方程式ヲ再タヒ變シテ其方根又上則所得ノ一位ヲ減スル者ト為ス可シ斯ノ如ク術ヲ反復シテ遂ニ精密ノ方根數ヲ得ルニ至ル可シ

原註ニ曰ク方根ヲ得ルカ為ニ要用トスル所ノ變式ハ單ニ一術ニシテ悉ク之ヲ作ル可ク毎次ノ變式ニ由テ得ル所ノ倍數ハ各目標或ハ號數ヲ附シテ以テ一目瞭然タラシム可シ毎回ノ除術ニ由テ得ル所ノ目的若シX'ノ自由率及ヒX'_1ノ終ヨリ第二率ノ倍數ヲ以テ同標ト為スコアラハ此目的ハ真ニ非サルヲ以テ其標記ヲ變ス可シ

負數方根ヲ得ント欲スル時ハ、本式隅率ノ標記ヲ變シ、其所得ノ正數方根ヲ見ルヲ以テ最モ便ト為ス、而シテ其標記ヲ變スレハ即チ求ムル所ノ負數方根ナリ、

終リヨリ第二率ノ倍數T′、若シ術中ニ於テ零ト為ル時ハ、方根ノ次位ヲ求ムルニハ、T′ノ前率ノ倍數ヲ以テ自由率U′ヲ除シ、其商ノ平方根ヲ開テ以テ之ヲ得ヘシ、

T′若シ消失スレハ、則チ變式下ノ如シ、

$$S'y^2+U'=0$$

即チ

$$y=\sqrt{-\frac{U'}{S'}}$$

第一

設問

$$x^3-2x^2-20x-40=0$$

式アリxノ接近數價ヲ問フ

西徳爾摩法則ニ由テ、此式ノ真方根ハ單一ニシテ首字六ナルヲ知リ、次ニ小數二位ヲ得ルノ術左ノ如シ、

術

−2	−20	−40	6.23
6	24	24	
+4	+4	(1) −16	
6	60	13.448	
10	(1) 64	(2) −2.552	
6	3.24		
(1) 16	67.24		
0.2	3.28		
16.2	(2) 70.52		
.2			
16.4			
.2			
(3) 16.6			

答 6.23

解ニ曰ク、第四百四十三章ニ説明スル所ノ合成除法ヲ用ヒ、本式ノ變シテ其方根六箇ヲ減

スル者ト為シ、變式ノ倍數 16 64 −16 ヲ得テ術中ニ(1)ト記シ、自由率 −16 ノ標記ヲ反シ、前率ノ倍數 64 ヲ以テ之ヲ除シテ、.2 ヲ得テ以テ方根ノ次位ト為ス、

次ニ(1)ト記シタル方程式ヲ復タ變シテ、其方根 .2 ヲ減スル者ト為シ、所得ノ倍數ニ(2)ト記シ、70.52 ヲ以テ 2.552 ヲ除シテ .03 ヲ得テ以テ方根ノ第三位ト為ス、斯ノ如ク術ヲ反復スレハ、漸次精密ニシテ遂ニ要用ナル接近數ヲ得ルニ至ル可シ、

四	三	一	一
1 −1	−30	+20	−20 5.731574
5	20	−50	−150
+4	−10	−30	(1) −170.0000
5	45	175	159.7071
9	+35	(1) +145.000	(2) −10.2929
5	70	83.153	9.7727
14	(1) 105.00	228.153	(3) −.5202
5	13.79	93.149	.3304
(1) 19.0	118.79	(2) 321.302	(4) −.1898
0.7	14.28	4.455	.1653
19.7	133.07	325.757	(5) −245
.7	14.77	4.474	232
20.4	(2) 147.84	(3) 330.23	(6) −13
.7	.65	.15	13
21.1	148.49	330.38	0
.7	.65	15	
(2) 21.8	149.14	(4) 330.5	
	.65	1	
	(2) 150	330.6	
		1	
	(4) 2	(5) 331	
		(6) 33	

答

5.731574

第二

$x^4+x^3-30x^2-20x-20=0$ 式アリxノ一數價ヲ問フ、

術

西德爾摩法則ニ從ヒ、真數二方根ノ首字ハ5及ヒ−5ナルヲ知リ、本式隅率ノ標記ヲ變シテ、負數方根ノ小數ヲ得ルコト左ノ如シ、

解ニ曰ク術中ニ(2)ト記シタル諸率ヲ得ルニ至ルマテハ恰モ前例ノ如ク、321.362ノ內ヨ10.2929ヲ除シテ次ノ方根.03ヲ得ヘシ、是ニ至テ始テ立方根約法(第二百四十三章)ニ從ヒ小數ノ末位ヲ約ス、此術中ニ於テハ各約率ノ右位ニ、豫備小數一位ヲ設クルト知ル可シ、

先ッ第四行ニ於テ21.8×.03即チ.65ヲ得テ、之ヲ第三

行ニ加ヘテ148.49ト為リ次ニ148.49×.03即チ4.455ヲ得テ之ヲ第二行ニ加ヘテ325.757ト為リ、次ニ又325.757×.03即チ9.7727ヲ得テ、之ヲ第一行ニ加ヘテ−.5202ト為ル、又.65ヲ第三行ニ加ヘテ149.14ト為リ、次ニ149.14×.03即チ4.474ヲ得テ第二行ニ加ヘ一位ヲ脱シテ330.23ト為

ル、

又.65ヲ第三行ニ加ヘ、二位ヲ脱シテ150ト為ル

斯ノ如クスル者數回ニシテ術ヲ終ルニ至ル可シ、

原註ニ曰ク、各行ノ方根ヲ約スルノ總則左ノ如シ、

曰ク第一行ハ零位、第二行ハ一位、第三行ハ二位第四行ハ三位ヲ約ス可シ、以下皆之ニ準ス、

左ノ各方程式ノ真方根ヲ求ム、

第二

$x^3+2x^2-23x-70=0$

第四

$x^3-x^2+70x-300=0$

第五

$x^3+x^2-500=0$

第六

$x^3-x^2-40x+108=0$

第七

$x^3-4x^2-24x+48=0$

第八

$x^4+x^3+x^2-x-500=0$

第九

$x^4-9x^3-11x^2-20x+4=0$

第十

$x^4-12x^2+12x-3=0$

第十一

$x^5-10x^3+6x+1=0$

代數學卷之六　大尾

代數學卷之六答式

東京　石川彝　譯

方程式性質之部

第一

$$x^2+x-6=0$$

第二

$$x^3+5x^2+2x-8=0$$

第三

$$x^4-5x^3-7x^2+29x+30=0$$

第四

$$x^4-2x^3+x^2+10x-30=0$$

第五

$$x^5-4x^4+22x^2-25x-42=0$$

同率方根之部

第六

$x^2-2x+7=0$

第七

$x^3-5x^2+x+5=0$

第八

$x^2-4x+6=0$

根

$2+\sqrt{-2}$

$2-\sqrt{-2}$

同方根之部

第二

1, 2, 3.

第三

2, −1,
−2, −3.

第四

3, 1.

第五

−1, +5,
$1+\sqrt{-1}$,
$1-\sqrt{-1}$.

變式之部

第二

2, 2,
−1, −1

第三

1, 1, 1.

第四

3, 3,
−2, 2.

分裂乘法之部

第六

$y^4+7y^3+9y^2-42y=0$

第七

$y^4-23y^2+22y+60=0$

第四

$12x^3-2x^2-8x-2$

第五

$6x^3-22x^2+40$

第六

$x^4+x^2y^2+y^4$

第七

$x^5-14x^3+30x^2-23x+6$

合成除法之部

第一

$1+2x+2x^2-2x^3+\cdots\cdots$

第二

$1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots\cdots$

第三

$a^3-3a^2x+3ax^2-x^3$

第四

x^2-3x+5

第五

$x^6+x^5y+x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+xy^5+x^6$

方根標記變更之部

第一

-3

$-2-\sqrt{3}$

$-2+\sqrt{3}$

第二

-1

$+2$

$-2-\sqrt{-5}$

$-2+\sqrt{5}$

加爾煖三次方程式之部

第四

$x=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$

$=2.8473+$

第五

$x=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{-3}$

$=.63783+$

第六

$x=-8$

$=1+\sqrt{-2}$

$=1-\sqrt{-2}$

正數方根際限之部

第二 六、第三 四、第四 三、

負數方根際限之部

總數

第一 $\sqrt[3]{7}+1=3$

第二 五、第三 四

波爾納爾接近法之部

第三

5.1345787253

第四

3.7387936782

第五

7.6172797559

第六

3.3792053825

4.5875359541

6.9667413367

第七

1.7191292611

6.5461457261

−4.2652749871

第八

4.4604108201

−4.9296646474

第九

.1706840250

10.2586086356

第十

2.8580833082

.6060183069

4432769396

−3.9073785547

第十一

−3.0653157913

−.6915762805

−.1756747993

.8795087084

3.0530581627

原註ニ曰ク、凡ソ本書中諸問題ハ詳ニ載セテ代數解式ニ在リ

代數學卷之六答式終

明治十年三月九日版權免許
同　十年十月廿日出版

譯者　東京第二大區十二小區麻布鳥居坂町一番地　石川彜

出版人　同　第一大區六小區通二町目十二番地　小林新兵衛

同　同　第一大區十一小區紺屋町三十七番地　小林新造

大阪心齋橋通北久太郎町　柳原喜兵衛
仝　唐物町四丁目　森本太助
仝　南一町目　松村九兵衛
仝　備後町四丁目　梅原龜七
仝　備後町四町目　吉岡平助
尾張名護屋本町八丁目　片野東四郎
東京日本橋通一丁目　北畠茂兵衛
仝　通二町目　稲田佐兵衛
仝　通三町目　丸屋善七
仝　淺草茅町二丁目　北澤伊八
仝　芝太神宮前　牧野吉兵衛
仝　芝三島町　山中市兵衛
仝　日本橋通二町目　小林新兵衛版