

412.07
Ta 84

圖書 和圖書 遡



a 1 3 8 0 3 2 5 0 7 7 a

福岡教育大学蔵書

代數教科書

明治十五年六月印行

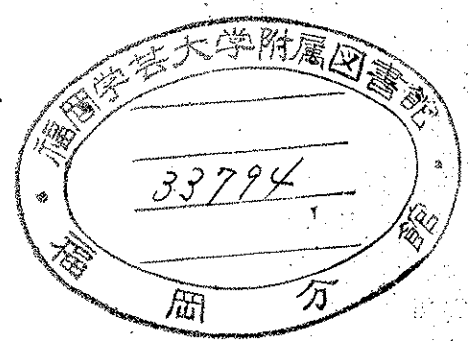
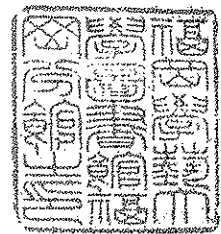
第貳

攻玉社藏版



代數教科書目錄

比例	一
變數	三十三
記數法	四十六
級數	六十三
連分數	百九十一
不定方程式	二百十一
高次方程式	二百五十六



代數教科書

志摩 近藤真琴校閱

駿河 田中矢徳 編輯
駿河 鈴木長利 校算

○比例式

比

第二百七十七條 一數ヲ以テ他ノ數ニ比較シテ此數彼數ノ幾倍ニ相當シ
或ハ幾分ニ相當スルヲ發見セバ此幾倍ト云ヒ幾分ト云ヘル數ヲ兩數ノ
比ト云フ

設令ハ六ヲ以テ三ニ比ブレバ二倍ニ相當ス故ニ六ノ三ニ於ル比ハ二ナリ
又六ヲ以テ二ニ比ブレバ三倍ニ相當ス故ニ六ノ二ニ於ル比ハ三ナリ由テ
六ノ二ニ於ル比ハ六ノ三ニ於ル比ヨリ大ナリ

第二百七十八條 一數 a ノ他ノ數 b ニ於ル比ヲ顯スノ記法 $a:b$ 此ノ如シ而
シ a ヲ前率ト云ヒ b ヲ後率ト云フ

第二百七十九條 比ノ値ヲ算スルノ法ハ前率ヲ分子トシ後率ヲ分母トセ
シ分數ノ値ヲ算スルナリ

設令バ a/b ニ於ル比ノ値ヲ知ラント欲セバ a/b ノ値ヲ算スルノ類ナリ
此ニ由テ a/b ニ於ル比ハ a/b ニ等シト云ヒ或ハ a/b ナリト云フ是故ニ

$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ ナレバ a/b ニ於ル比ハ a/b ニ等シト云フ

第二百八十條 比ノ兩率ニ同數ヲ乘スルモ同數ニテ比ノ兩率ヲ除スルモ
比ノ値變ゼズ

論 $\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}$ ナルガ故ニ前述ノ理實ニ明ナリ但シ m ヲ整數トセバ兩率ニ同

數ヲ乘ズルナリ m ヲ分數トセバ兩率ヲ同數ニテ除シタルナリ〔第百七條定

理第三ヲ視ヨ

第二百八十一條 比ノ大小ヲ比較スルノ法ハ比ノ値ヲ顯ス所ノ分數式ヲ
同分母ニ化スルナリ設令バ a/b ニ於ル比ヲ c/d ニ於ル比ト比較セン

ト欲セバ $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$ ナルガ故ニ ad 若シ bc ヨリ大ナレバ前ノ比ハ後ノ
比ヨリ大ニシテ ad 若シ bc ニ等シケレバ兩比等シク ad 若シ bc ヨリ小ナレバ

前ノ比ハ後ノ比ヨリ小ナリ

第二百八十二條 比ノ前率若シ後率ヨリ大ナレバ大不同比ト云ヒ前率若

シ後率ニ等シケレバ同比ト云ヒ前率若シ後率ヨリ小ナレバ小不同比ト云

フ

第二百八十三條 大不同比ハ兩率ニ同數ヲ加フルキ値減少シ小不同比ハ

兩率ニ同數ヲ加フルキ値増加ス

論 比ヲ $\frac{a}{b}$ トシ此兩率ニ x ヲ加フレバ $\frac{a+x}{b+x}$ ヲ得故ニ $b(a+x)$ 若シ $a(b+x)$

ヨリ大ナレバ $\frac{a+x}{b+x}$ ハ $\frac{a}{b}$ ヨリ大ナリ $b(a+x)$ 若シ $a(b+x)$ ヨリ小ナレバ $\frac{a+x}{b+x}$ ハ

$\frac{a}{b}$ ヨリ小ナリ此ニ由テ bx 若シ ax ヨリ大ナレバ $\frac{a+x}{b+x}$ ハ $\frac{a}{b}$ ヨリ大ニシテ bx 若

シ ax ヨリ小ナレバ $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ヨリ小ナリ是故ニ若シ a ヨリ大ナレバ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

ハ $\frac{a}{b}$ ヨリ大ニシテハ若シ a ヨリ小ナレバ $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ヨリ小ナルヲ知ル

第二百八十四條 大不同比ハ兩率ヨリ同數ヲ減スルハ値増加シ小不同比ハ兩率ヨリ同數ヲ減スルハ値減少ス

論 比ヲ $\frac{a}{b}$ トシ此兩率ヨリ a ヨリ減ズレバ $\frac{a-s}{b}$ ヲ得故ニ $b(a-s)$ 若シ $a(b-s)$

ヨリ大ナレバ $\frac{a-s}{b} > \frac{c}{d}$ ヨリ大ナリ $b(a-s)$ 若シ $a(b-s)$ ヨリ小ナレバ $\frac{a-s}{b} < \frac{c}{d}$ ヨリ小ナリ此ニ由テ bx 若シ ax ヨリ小ナレバ $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ヨリ大ニシテ bx 若シ ax ヨリ大ナレバ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ヨリ小ナリ是故ニ若シ a ヨリ小ナレバ $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ヨリ小ナルヲ知ル

第二百八十五條 乘比ノ前率ノ連乘積ヲ後率ノ連乘積ニ比較シテ作レル

比ヲ合率ノ比ト云フ設令ハ $ac:ld$ ハ $a:b$ ト $c:d$ トノ兩比ニテ作レル合率ノ比ナリ

又 $a:b$ ト $a:b$ トノ合率ノ比ハ $a^2:b^2$ トナル之ヲ $a:b$ ノ二倍比ト云フ又 $a^2:b^2$ ヲ $a:b$ ノ三倍比ト云フ

第二百八十六條 三比 $\frac{a}{b} \frac{c}{d} \frac{e}{f}$ 若シ相等シケレバ此三比皆

$\left\{ \frac{pa^2+qc^2+re^2}{pb^2+qd^2+rf^2} \right\}^{\frac{1}{n}}$ ニ等シ但シ p, q, r, n ハ任意ノ數ナリ

論 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ トセバ $kb=ac, kd=ce, kf=ea$ ナリ此ニ由テ

$p(kb)^n + q(kd)^n + r(kf)^n = pa^n + qc^n + re^n$ ナ得是故ニ

$k^n = \frac{pa^n + qc^n + re^n}{pb^n + qd^n + rf^n} = \frac{\{pa^n + qc^n + re^n\}^{\frac{1}{n}}}{\{pb^n + qd^n + rf^n\}^{\frac{1}{n}}} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ナリ

等比三式以上衆多ナルモ同法ニテ之ト相類スル成果ヲ得ベシ

若シ n ナ一箇トセバ前ニ得ル所ノ式ヨリ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ハ皆 $\frac{pa+qc+re}{pb+qd+rf}$

ニ等シキヲ知ルベシ若シ又 $a:b::c:d$ トセハ原三比各々皆 $a+b+c::d+e+f$ ニ等シキヲ知ルベシ

比式問題

- 第一 3:4, 7:12, 8:9, 2:3, 5:8 上ノ五比ヲ値ノ順次ニ排列セバ如何
- 第二 4:15, 25:36 上ノ兩比ニテ作レル合率ノ比ノ値ヲ問フ
- 第三 $a+b:8, 8^2:a^2-b^2$ 上ノ兩比ニテ作レル合率ノ比ノ値ヲ問フ
- 第四 $a:b$ 若シ $a+c:b+c$ ノ二倍比ニ等シケレバ $a:b::c:d$ ナリ此証ヲ問フ
- 第五 $a:b$ 上ノ比ノ兩率ヨリ同數ヲ減シテ $c:d$ ニ等シキ比ヲ作ラント欲ス由テ問フ減數如何
- 第六 兩數アリ各幾何ナルヲ知ラズ唯此兩數ノ比二ノ三ニ於ルガ如クナルヲ知ル又此兩數ニ各七箇ヲ加フレバ所得ノ和ノ比三ノ四ニ於ルガ如クナルヲ知レリト云フ由テ問フ原兩數各幾何
- 第七 兩數アリ各幾何ナルヲ知ラズ唯此兩數ノ比四ノ五ニ於ルガ如クナルヲ知ル又此兩數ヨリ各六箇ヲ減セバ所得ノ餘數ノ比三ノ四ニ於ルガ如クナルヲ知レリト云フ由テ問フ原兩數各幾何
- 第八 兩數アリ各幾何ナルヲ知ラズ唯此兩數ノ比五ノ八ニ於ルガ如クナルヲ知ル又此兩數中ノ小數ニ八箇ヲ加ヘ大數ヨリ五箇ヲ減セバ得數ノ比二十八ノ二十七ニ於ルガ如クナルヲ知レリト云フ由テ問フ原兩數各幾何
- 第九 定比アリ五ノ三ニ於ルガ如シ今此比ノ兩率ニ同數ヲ加ヘ又兩率ヨリ此加數ヲ減シテ兩比ヲ作り前ノ比ヲ後ノ比ノ四分之三ニナシント欲ス由テ問フ加減數幾何
- 第十 兩數アリ各幾何ナルヲ知ラズ唯此兩數ノ比二ノ三ニ於ルガ如クナルヲ知ル又此兩數ノ差ノ兩數ノ平方ノ差ニ於ル比二ノ二十五ニ於ルガ如クナルヲ知レリト云フ由テ問フ此兩數各幾何
- 第十一 兩數アリ各幾何ナルヲ知ラズ唯此兩數ノ比三ノ四ニ於ルガ如クナルヲ知ル又此兩數ノ差ノ兩數ノ平方ノ差ニ於ル比二ノ二十五ニ於ルガ如クナルヲ知レリト云フ由テ問フ此兩數各幾何

ナルヲ知ル又此兩數ノ和ノ兩數ノ平方ノ和ニ於ル比七ノ五十ニ於ルガ如クナルヲ知レリト云フ由テ問フ此兩數各幾何

第十二 兩數アリ各幾何ナルヲ知ラズ唯此兩數ノ比五ノ六ニ於ルガ如クナルヲ知ル又此兩數ノ和ノ兩數ノ平方ノ差ニ於ル比一ノ七ニ於ルガ如クナルヲ知レリト云フ由テ問フ此兩數各幾何

第十三 一數アリ其幾何ナルヲ知ラズ唯此數ノ一箇ニ於ル比ハ八箇ノ此數ニ於ル比ノ二倍比ニ相當スルヲ知レリト云フ由テ問フ此數幾何

第十四 $a : b = 3 : 1$ 上ノ比若シ $a : b$ ノ二倍比ニ相當セバ b ノ値ハ如何

第十五 金銀銅三種ノ錢合セテ二百箇アリ金錢一箇ハ二十一錢銀錢一箇ハ十錢銅錢一箇ハ二錢五厘ナリ而シテ總金錢ノ値ハ十四ノ如ク總銀錢ノ値ハ八ノ如ク總銅錢ノ値ハ三ノ如シト云フ由テ問フ三種ノ錢各幾何箇ナルヤ

第十六 田地ヲ買フ者アリ唯其地形長方ニシテ長ノ濶ニ於ル比ハ八ノ五

ニ於ルガ如ク每一百六十歩ノ價ノ圓數ハ長ノ間數ニ同シク全田ノ價ノ圓數ハ外周ノ間數十三倍ニ同シト云ヘルヲ聞ク由テ問フ此田地ノ長濶各幾何

第十七 乾草一積アリ其幾何ナルヲ知ラズ唯其長ノ濶ニ於ル比ハ五ノ四ニ於ルガ如ク高ノ濶ニ於ル比ハ七ノ八ニ於ルガ如ク立方尺ノ價ノ錢數〔但シ茲ニ謂ヘル錢ハ物價ノ數幾幾何錢ノ錢ナリ以下之ニ倣テ知ルベシ〕ハ濶ノ尺數ト同シク全草ノ價ノ錢數ハ積草ノ底面ナル平方尺ノ數二百二十四倍ニ同シト云ヘルヲ聞ク由テ問フ此乾草ノ長濶高各幾何

第十八 $b - a : b + a, 4a - b : 6a - b$ 上ノ兩比等シケレバ $a : b$ ノ値如何

第十九 $l : a - b, m : b - c, n : c - a$ 上ノ三比皆等シケレバ l, m, n ノ和空數ナリ此証ヲ問フ

第二十 $ax + by : cz, cz + ax : by, by + cz : ax$ 上ノ三比若シ等シケレバ此三比ノ値何レモ二十ナリ此証ヲ問フ

第二十一 $\frac{c+d}{a+b} \frac{c-d}{a-b}$ 上ノ兩比等シケレバ此兩比ノ値何レモ $\sqrt{\frac{c^2+b^2}{a^2+b^2}}$ +

リ此証ヲ問フ

第二十二 $\frac{c+2d}{2a+b} \frac{2c+d}{a+2b}$ 上ノ兩比等シケレバ此兩比ノ値何レモ $\sqrt{\frac{c^2-b^2}{b^2-a^2}}$

ナリ此証ヲ問フ

第二十三 二物同時ニ一線ノ兩端ヨリ發シ相向テ此線上ヲ行キ六分ヲ歷テ相會シ又別レテ前同方向ニ前同速力ニテ行キ疾進ノ物ハ緩行ノ物ヨリ三分二分分之一速ク線端ニ達セリト云フ由テ問フ二物速力ノ比如何

第二十四 一工事アリ甲乙兩工共ニ作工セバ丙一人ニテ治ル日數ノ三分之一ニテ落成スベシト云ヒ又乙丙兩工共ニ作工セバ甲一人ニテ治ル日數ノ四分之一ニテ落成スベシト云フ由テ問フ三工ノ作力ノ比如何

比例

第二百八十七條 四數アツテ其第一ハ第二ノ幾倍若シクハ幾分ニ相當シ第三亦第四ノ同シ幾倍若シクハ幾分ニ相當セバ斯ル四數ヲ比例數ト云フ設令 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ナレバ $a:b:c:d$ ナ比例數ト云フ之ヲ示スル $a:b::c:d$ 於ルハ c ノ d ニ於ルガ如シト云フ又之ヲ顯スノ記法ハ $a:b::c:d$ 此ノ如シ或ハ $a:b::c:d$ 此ノ如シ是故ニ兩比若シ等シケレバ其兩比ノ四率ハ比例數ナリ

又 $a:d$ 二率ヲ外率ト云ヒ $b:c$ 二率ヲ內率ト云フ

第二百八十八條 四數比例數ナレバ兩外率ノ乘積ハ兩內率ノ乘積ニ等シ論 比例數 $a:b:c:d$ トセバ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ナリ此式ノ兩節ニ bd ナ乘ズルハ $ad::bc$ ナ得ルナリ

是故ニ比例ヲナス四數ノ三ヲ知ラバ他ノ一ハ方程式 $ad::bc$ ヨリ發見スルコトヲ得ベシ

若シ又 $b \parallel c$ ナレバ $ad \parallel b^2$ ナリ此ニ由テ三數アツテ其第一ノ第二ニ於ルハ第二ノ第三ニ於ルガ如クナレバ第一第三ノ相乗積ハ第二ノ自乗ニ等シ
 若シ $a \parallel b$ ニ於ルハ $b \parallel d$ ニ於ルガ如クナレバ $a \parallel b \parallel d$ ノ三數ヲ連比例ノ數ト云ヒ b ナ $a \parallel d$ ノ中比例數ト云フ

第二百八十九條 兩數ノ相乗積若シ他ノ兩數ノ相乗積ニ等シケレバ此四數比例數ニシテ各乗積ノ兩乘子ハ兩外率或ハ兩内率トナル

論 $xy \parallel ab$ トシ $ay \parallel b$ テ此式ノ兩節ヲ除スレバ $\frac{xy}{ay} \parallel \frac{ab}{b}$ 即チ $x \parallel a \dots b \dots y$ ナ得

〔第二百八十七條ヲ視ム〕

第二百九十條 若シ $a \parallel b$ ニ於ルハ $c \parallel d$ ニ於ルガ如クニシテ $c \parallel d$ ニ於ルハ $e \parallel f$ ニ於ルガ如クナレバ $a \parallel b$ ニ於ルハ $e \parallel f$ ニ於ルガ如シ

論 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ニシテ $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ナルガ故ニ $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ 即チ $a \parallel b \dots e \dots f$ ナ得ルナリ

第二百九十一條 四數比例數ナレバ内外率ヲ轉倒スルモ比例數ナリ設令 $a \parallel b \dots c \parallel d$ ナレバ $a \dots c \dots d \dots b$ ナリ

論 $a \parallel b \dots c \parallel d$ ナレバ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ナルガ故ニ此式ノ兩節ニ $b \parallel c$ ヲ乗ズレバ $a \parallel b \dots c \parallel d$ 即チ $a \dots c \dots d \dots b$ ナ得

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ 即チ $a \dots c \dots d \dots b$ ナ得

第二百九十二條 四數比例數ナレバ兩内率ヲ對換スルモ比例數ナリ設令 $a \parallel b \dots c \parallel d$ ナレバ $a \dots c \dots b \dots d$ ナリ

論 $a \parallel b \dots c \parallel d$ ナレバ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ナルガ故ニ此式ノ兩節ニ $b \parallel c$ ヲ乗ズレバ $a \parallel b \dots c \parallel d$ 即チ $a \dots c \dots b \dots d$ ナ得

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ 即チ $a \dots c \dots b \dots d$ ナ得

第二百九十三條 四數比例數ナレバ第一第二ノ和ノ第二ニ於ルハ第三第四ノ和ノ第四ニ於ルガ如シ設令 $a \parallel b \dots c \parallel d$ ナレバ $a + b \parallel c + d$ ナリ

論 方程式 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ノ兩節ニ一箇ヲ加フレバ $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$ 即チ $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ 即チ $a+b \parallel c+d$ ナ得

第二百九十四條 四數比例數ナレバ第一ヨリ第二ヲ減ジタル餘數ノ第二ニ於ルハ第三ヨリ第四ヲ減ジタル餘數ノ第四ニ於ルガ如シ設令 $a \parallel b \dots c \parallel d$ ナレバ $a - b \parallel c - d$ ナリ

$$a:b:c:d + \lambda \times a-b:b:c-d:d + \lambda$$

論 方程式 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ノ兩節ヨリ一箇ヲ減ズレバ $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-d}{b}$ 即チ $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ 即チ $a-b:b:c-d:d$ ナリ得

第二百九十五條 四數比例數ナレバ第一ノ第一ヨリ第二ヲ減シタル餘數ニ於ルハ第三ノ第三ヨリ第四ヲ減シタル餘數ニ於ルガ如シ設令バ $a:b:c:d + \lambda \times a-b:b:c-d:d$ ナリ

論 前條ノ論ニ由テ $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ ナリ得又題意ヨリ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ナリ得是故ニ

$$\frac{a-b}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{c-d}{d} \times \frac{d}{c} \quad \text{即チ} \quad \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \quad \text{即チ} \quad a-b:a:c-d:c \quad \text{ナリ得故ニ第二百}$$

九十一條ニ由テ $a:a-b:b:c:c-d:d$ ナリ得

第二百九十六條 四數比例數ナレバ第一ノ第一第二ノ和ニ於ルハ第三ノ第三第四ノ和ニ於ルガ如シ設令バ $a:b:c:d + \lambda \times a+a-b:b:c+c-d:d$ ナリ

論 第二百九十三條ノ論ニ由テ $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ナリ得又題意ヨリ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ナリ得

$$\text{是故ニ} \quad \frac{a+b}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{c+d}{d} \times \frac{d}{c} \quad \text{即チ} \quad \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \quad \text{即チ} \quad a+b:a:c+d:c \quad \text{ナリ得故}$$

ニ第二百九十一條ニ由テ $a:a+b:b:c:c+d:d$ ナリ得

第二百九十七條 四數比例數ナレバ第一第二ノ和イ第一第二ノ差ニ於ルハ第三第四ノ和ノ第三第四ノ差ニ於ルガ如シ設令バ $a:b:c:d + \lambda \times a+b:a-b:c+d:c-d$ ナリ

論 第二百九十三條ニ由テ $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ナリ得又第二百九十四條ニ由テ

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad \text{ナリ得是故ニ} \quad \frac{a+b}{b} \div \frac{a-b}{b} = \frac{c+d}{d} \div \frac{c-d}{d} \quad \text{即チ} \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad \text{即チ}$$

$$a+b:a-b:c+d:c-d \quad \text{ナリ得}$$

第二百九十八條 兩種ノ比例數ノ各率ノ位ヲ齊ヘテ相乗セバ所得ノ乘積亦比例數ナリ設令バ $a:b:c:d$ 又 $a':b':c':d'$ ナレバ $ad:bb':cd:dd'$ ナリ

論 前ノ比例式ヨリ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ナ得後ノ比例式ヨリ $\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$ ナ得是故 $\frac{ad'}{bd} = \frac{ac'}{bd}$ 即チ $ad':bb':cc':dd'$ ナ得

第二百九十九條 兩種ノ比例數ノ各率ノ位ヲ齊ヘテ相除スレバ所得ノ商亦比例數ナリ

論 前ノ比例式ヨリ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ナ得後ノ比例式ヨリ $\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$ ナ得是故 $\frac{a}{b} \div \frac{a'}{b'} = \frac{c}{d} \div \frac{c'}{d'}$

$$\frac{c}{d} \div \frac{c'}{d'} \text{ 即チ } \frac{ab'}{a'd} = \frac{cd'}{c'd} \text{ 即チ } \frac{a}{b} \div \frac{a'}{b'} = \frac{c}{d} \div \frac{c'}{d'} \text{ ナ得}$$

第三百條 四數比例數ナレバ各率ノ同シ幾乗冪亦比例數ナリ設令バ

$$a:b::c:d \text{ ナレバ } a^m:b^m::c^m:d^m \text{ ナリ}$$

論 方程式 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ノ兩節ヲ乘セバ $\frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m}$ 即チ $a^m:b^m::c^m:d^m$ ナ得

第三百一條 四數比例數ナレバ各率ノ同シ幾乗根亦比例數ナリ設令バ $a:b::c:d \text{ ナレバ } \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}::\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d} \text{ ナリ}$

論 方程式 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ノ兩節ヲ乘根ニ開カバ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ 即チ $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}::\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$ ナ得

第三百二條 比例ノ意義中ニ一數ハ他ノ同種數ノ幾倍若シクハ幾分ニ相當スルヲ含メリ然レバ此理ニ合ズシテ仍ホ比例數ナルヲアリ設令バ正方形ノ一邊一寸ナレバ其對角線ハ $\sqrt{2}$ 寸ナル而シテ $\sqrt{2}$ ハ正值ヲ求ル能ハズ故ニ正方形ノ一邊ト對角線トノ比ハ正シク數ヲ以テ顯ス能ハズ此ノ如キ兩數ヲ交互ニ不可度ノ數ト云フ

交互ニ不可度ノ數ニテモ仍ホ其比ノ零近數ヲ顯スヲ得設令バ $\sqrt{2}$ ヨリ僅ニ小ナル數ヲ求ルヲ得ベシ又 $\sqrt{2}$ ヨリ僅ニ大ナル數ヲ求ルヲ得ベシ今下條ニ於テ不可度ノ兩數ヲ比較スルノ法ヲ示サントス

第三百三條 兩數 a 及 b トシ整數 q 若シ極メテ大ナルモ a 及 b ナトノ間ニ包容スル所ノ他ノ整數 p ナ發見スルヲ得バ a 及 b ハ適等數ナリ

論 兩數の差ハ1より大ナラズ然ルニ若シ彌々大ナレバ1より大ナレバ益々小ナリ然レバ若シ不等數ナレバ其差一定不易ナリ此ニ由テ若シハ不等數ニアラザルヲ知ル

第三百四條 交互ニ不可度ノ兩數ヲ a b トシ又他ノ不可度ノ兩數ヲ c d トシ $\frac{a}{b}$ ノ値ハ $\frac{p}{q}$ ト $\frac{1}{q}$ トノ限リヲ越ヘズ $\frac{c}{d}$ ノ値亦同シ限リノ内ニ在テ p q ノ値増シテ無窮ニ至ル迄此理恒ニ變セザレバ a b c d ハ比例數ナリ其故何トナレバ $\frac{a}{b}$ ト $\frac{c}{d}$ トハ前條ニ述ル所ニ由テ不同數ニアラザルヲ知ルガ故ナリ

比例式問題

左ノ比例式ヨリ x ノ値ヲ發見スベシ

第一 $4:7::8:x$

第二 $3:7::x:42$

第三 $5:x::x:45$

第四 $x:9::16:x$

第五 $x+4:x+2::x+8:x+5$

第六 $x+24:x+5::2x-1:3x+2$

第七 $3x+2:x+7::9x-2:5x+8$

第八 $x^2+x+1:63(x+1)::x^2-x+1:63(x-1)$

第九 $ax+b:bx+a::mx+n:nx+m$

第十 若シ $pq=rs$ ニシテ又 $qt=sw$ ナレバ $p:r::t:s$ ナリ此証ヲ問フ

第十一 a b c d ノ四數比例ヲナスキハ左ノ七式ヲ得此証ヲ問フ

一式 $a(c+d)=c(a+b)$

二式 $a\sqrt{(c^2+d^2)}=c\sqrt{(a^2+b^2)}$

三式 $a(a+b+c+d)=(a+b)(a+c)$

四式 $\frac{(a+c)(a^2+c^2)}{(a-c)(a^2-c^2)}=\frac{(b+d)(b^2+d^2)}{(b-d)(b^2-d^2)}$

五式 $\frac{pa^2+qab+rb^2}{la^2+mab+nb^2}=\frac{pc^2+qcd+rd^2}{lc^2+mcd+nd^2}$

六式 $\frac{1}{a}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{3c}+\frac{1}{4d}=\frac{1}{4}\left\{\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4}\right\}$

七式 $\frac{1}{ma}+\frac{1}{nb}+\frac{1}{pc}+\frac{1}{qd}=\frac{1}{q}\left\{\frac{a}{p}+\frac{b}{n}+\frac{c}{m}+\frac{d}{q}\right\}$

第十二 a b c ノ三數連比例ヲナスキハ左ノ三式ヲ得此証ヲ問フ

一式 $a^2 - b^2 : a :: b^2 - c^2 : c$ 二式 $a : c :: a^2 : b^2$ 三式 $a + 2b + c : 1 :: (b + c)^2 : c$ 第十三 $a \ b \ c \ d$ ノ四數比例ヲナスキハ左ノ比例式ヲ得此証ヲ問フ一式 $a^2 : b^2 :: a^2 + c^2 : b^2 + d^2$ 二式 $a^2 + b^2 : a^2 - b^2 :: c^2 + d^2 : c^2 - d^2$ 三式 $ma + nc : pa + qc :: mb + nd : pb + qd$ 四式 $a + b + c + d : b + d :: c + d : d$ 五式 $(a \pm b)^2 : ab :: (c \pm d)^2 : cd$ 六式 $a(a + c) : c^2 :: b(b + d) : d^2$ 七式 $\sqrt{a^2 + b^2} : \sqrt{c^2 + d^2} :: a : c$ 八式 $(a + mb)^2 : (c + md)^2 :: a^2 - b^2 : c^2 - d^2$ 九式 $\sqrt{(a - b)} : \sqrt{(c - d)} :: \sqrt{a - b} : \sqrt{c - d} :: \sqrt{a + b} : \sqrt{c + d}$ 第十四 $a : y :: a^2 : b^2$ ニシテ又 $a : b :: \sqrt{(a + x)} : \sqrt{(a - y)}$ ナルキニ $a : x - y$

ニシテ得此証ヲ問フ

第十五 $(a + b)^2 : (a - b)^2 :: b + c : b - c$ ナルキニ $a : b :: \sqrt{(2a - c)} : \sqrt{c}$ ナ得此証如何第十六 $x : y :: a^2 : b^2$ ニシテ又 $a : b :: \sqrt{(c + x)} : \sqrt{(d + y)}$ ナルキニ $cx = dy$ ナ得

此証ヲ問フ

第十七 $(a + b + c + d)(a - b - c + d) = (a - b + c - d)(a + b - c - d)$ ナルキニ $a : b :: c :$

ニシテ得此証ヲ問フ

第十八 $a : b :: c : d :: e : f$ ナルキニ $a^2 : b^2 :: ce : df$ ナ得此証ヲ問フ第十九 $x : y :: m^2 : n^2$ ニシテ又 $m : n :: \sqrt{(p^2 + x)} : \sqrt{(p^2 - y^2)}$ ナルトキハ $p^2 : xy :: x + y : x - y$ ナ得此証ヲ問フ第二百九十七條ノ理ニ由テ左ノ方程式ヲ解シテ未知元 x ノ値ヲ發見スベシ

シ

第二十 $\frac{\sqrt{(nx + 1)} + \sqrt{(nx)}}{\sqrt{(nx + 1)} - \sqrt{(nx)}} = \frac{\sqrt{n + 1}}{\sqrt{n - 1}}$ 第二十一 $\frac{\sqrt{a + \sqrt{(a - x)}} + 1}{\sqrt{a} - \sqrt{(a - x)}} = \frac{1}{a}$ 第二十二 $\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(x + 1)} - \sqrt{\frac{1}{2}(x - 1)}}{\sqrt{\frac{1}{2}(x + 1)} + \sqrt{\frac{1}{2}(x - 1)}} = \frac{1}{2}$ 第二十三 $\frac{a - x + \sqrt{(2ax - x^2)}}{a - x} = b$

第二十四 三數連比例ヲナスモノアリ其幾何ナルヲ知ラズ唯其中比例數六十箇ニシテ他ノ兩數ノ和一百二十五箇ナルヲ知レリト云フ由テ問フ

兩外率各幾何

第二十五 三數連比例ヲナスモノアリ其幾何ナルヲ知ラズ唯其和一百九箇ニシテ其自乗ノ和一百三十三箇ナルヲ知レリト云フ由テ問フ三數各幾何

第二十六 四數 a, b, c, d ニ各々同數ヲ加ヘテ比例數トナサンコトヲ欲ス由テ問フ此加數幾何

第二十七 原數十箇ヲ分テ兩分トナシ所得ノ兩分ノ相乘積ヲ兩分ノ平方ノ和ニ比スルハ六ノ十三ニ於ルガ如クナサント欲ス由テ問フ兩分各幾何

第二十八 傭夫二人アリ先ヅ主人ト約シテ勤惰ニ應シテ雇錢ヲ受クベシ然レモ勤惰ニ係ラズ食料ヲ償フベシト云フ然ルニ初メ一週間ハ二人曠日ナク作工シテ雇錢共ニ a 圓ヲ實收セリト云ヒ次ノ一週間ハ一人全ク休工シテ雇錢共ニ b 圓ヲ實收セリト云フ今前週ニ治ル所ノ業ヲ後週ニ

治ル所ノ業ニ比スレバ m ノ n ニ於ルガ如クナルヲ知レリト云フ由テ問フ二人每一週ノ雇錢各幾何

第二十九 四輪車アリ前輪ハ小ニシテ後輪ハ大ナリ其比三ノ三ニ於ルガ如シ若シ此車ニ乗テ某所ヨリ某所ニ行カバ前輪ノ回轉ハ後輪ヨリ一百轉多シト云フ若シ前輪ノ周ヲ二分の一トナシ後輪ノ周ヲ三分之二トシテ同コト道ヲ行カバ前後兩輪ノ回轉ノ差如何

第三十 釀造家アリ酒二瓶ヲ貯藏ス其容量等シカラズ酒ノ品位亦等シカラズ甲瓶ノ酒ハ酒二ノ如ク水三ノ如シ乙瓶ノ酒ハ酒三ノ如ク水七ノ如シ若シ此兩瓶ノ酒ヲ混和セバ酒五ノ如ク水十一ノ如キモノヲ得ベシト云フ由テ問フ兩瓶容量ノ比如何

今又下條ニ於テ比例ノ語ヲ用井スシテ比例ノ理ヲ論スルノ法ヲ示サントス

消長

第三百五條 兩數互ニ關係シテ一數消長スルヒ他ノ一數亦同シ比例ヲ以テ消長セバ此數ハ彼數ニ從テ消長スト云フ設令ハ三角形ノ正高變ゼザルヒハ其積底邊ニ從テ消長ス其故何トナレバ底邊ノ伸縮スルヒ積步亦同シ比例ヲ以テ増減スルガ故ナリ若シ代數學ノ式ヲ以テ之ヲ顯サント欲セバ正高ヲ同フスル兩三角形ノ積ヲ $A \alpha$ トシ底邊ヲ $B \beta$ トスベシ然ルヒハ $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$ ナリ此式ノ內率ヲ對換セバ $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$ ヲ得(第二百九十二條ヲ觀)是故ニ此兩形ト正高ヲ同フスル三角形更ニ一箇アリトセバ其積ノ數值ノ底邊ノ數值ニ於ル比亦 $\frac{\alpha}{\beta}$ ニ等シカルベシ今 $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$ ニトセバ $A \beta = m B \alpha$ ナリ此式ノ A ハ正高ヲ同フスル衆三角形中ノ任意ナル一形ノ積ヲ顯シ B ハ之ニ對合スル底邊ヲ顯スナリ而テ m ハ一定數ナリ此ニ由テ積ハ底ニ從テ消長スト云フベキヲ或ハ積ノ底ニ於ル比ハ一定不易ナリト云フコアリ此語ノ意義ハ積ノ數值ノ底ノ數值ニ於ル比ハ一定不易ナリト云ヘルナリ

以上述べ所此篇ノ用言ノ意義ヲ明ニセント欲スルニ外ナラズ若シ A ハ B ニ從テ消長スト曰ハバ A ハ任意ノ數值ヲ顯スモノニテ B ハ之ニ對合スル量ノ數值ヲ顯スモノト知ルベシ而シテ $A \parallel m B$ 此ノ如キ式中 m ハ A 、 B ノ消長ニ係ラズ一定不易ノ數ナリ

今又下條ニ於テ更ニ正式ヲ以テ $A \parallel m B$ ノ証ヲ論ゼントス

第三百六條 一數 A 若シ他ノ數 B ニ從テ消長セバ A ハ B ト一定數トノ乘積ニ適等ス

論 兩變數ノ對合スル定值ヲ α 、 β トシ他ノ對合スル任意ナル值ヲ A 、 B トセバ前條ノ釋義ニ由テ $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$ ヲ得此ニ由テ $A \parallel \frac{\alpha}{\beta} B$ ヲ得但シ m ハ一定數 $\frac{\alpha}{\beta}$ ヲ顯スナリ

第三百七條 消長號 \parallel

兩數交互ニ關係シテ同シ比例ヲ以テ消長セバ符號 \parallel ヲ以テ此關係ヲ顯ス設令ハ A ハ B ニ從テ消長スト云ヘルコトヲ $A \parallel B$ 此ノ如ス記ス

第三百八條 一數若シ他ノ數ノ倒數ニ從テ消長セバ此數ハ彼數ニ反シテ消長スト云フ〔倒數ノ意義ハ第七十九條ニ見ヘタリ〕若シ之ヲ再說セバ $A \parallel B$ ニシテ m 一定數ナレバ $A \parallel B$ ニ反シテ消長スト云フ

第三百九條 一數若シ他ノ兩數ノ相乘積ニ從テ消長セバ此數ハ彼兩數ニ從テ消長スト云フ若シ之ヲ再說セバ $A \parallel mBC$ ニシテ m 一定數ナレバ $A \parallel BC$ ニ從テ消長スト云フ

第三百十條 三變數アツテ其第一ハ第二ト第三ノ倒數トニ從テ消長セバ第一數ハ第二數ニ從テ消長シ第三數ニ反シテ消長スト云フ若シ之ヲ再說セバ $A \parallel \frac{mB}{C}$ ニシテ m 一定數ナレバ $A \parallel B$ ニ從テ消長シ C ニ反シテ消長スト云フ

第三百十一條 若シ $A \infty B$ ニシテ又 $B \infty C$ ナレバ $A \infty C$ ナリ

論 $A \parallel mB, B \parallel nC$ トス但シ m, n ハ何レモ一定數ナリ然ルキハ $A \parallel mnC$ ナ得然ルニ m ハ一定數ナルガ故ニ $A \infty C$ ナリ

第三百十二條 若シ $A \infty B$ ニシテ又 $B \infty C$ ナレバ $A \pm B \infty C$ ニシテ又 $\sqrt{(AB)}$ ∞C ナリ

論 $A \parallel mB, B \parallel nC$ トス但シ m, n ハ何レモ一定數ナリ然ルキハ $A \pm B \parallel (m+n)C$ ナ得是故ニ $A \pm B \infty C$ ナリ又 $\sqrt{(AB)} \parallel \sqrt{(mn)C} \parallel \sqrt{(m)C}$ ナ得是故ニ $\sqrt{(AB)} \infty C$ ナリ

第三百十三條 若シ $A \infty BC$ ナンキ $B \infty \frac{A}{C}$ ニシテ又 $C \infty \frac{A}{B}$ ナリ

論 $A \parallel mBC$ ナンキ $B \parallel \frac{1}{m} \frac{A}{C}$ ナ得故ニ $B \infty \frac{A}{C}$ ナリ又同理ニテ $C \infty \frac{A}{B}$ ナンキ知ルニ

第三百十四條 若シ $A \infty B$ ニシテ又 $C \infty D$ ナンキ $AC \infty BD$ ナリ

論 $A \parallel mB, C \parallel nD$ ナンキ $AC \parallel mnBD$ ナ得是故ニ $AC \infty BD$ ナリ

又同法ニキ $A \infty B, C \infty D, E \infty F$ ナンキ $ACE \infty BDF$ ナルヲ知ルニ逐テ此ノ如シ

第三百十五條 若シ $A \infty B$ ナレバ $A^2 \infty B^2$ ナリ

論 $A \parallel nB$ ナンキ $A^2 \parallel n^2 B^2$ ナ得是故ニ $A^2 \infty B^2$ ナリ

第三百十六條 若シ $A \propto B$ ナレバ $AP \propto BP$ ナリ但シ P ハ變數トスルモ定數トスルモ任意ナリ

論 $A = mB$ トセハ $AP = mBP$ ナ得是故ニ $AP \propto BP$ ナリ

第三百十七條 若シ C 定數ナルキ $A \propto B$ ニシテ B 定數ナルキ $A \propto C$ ナレバ B C 俱ニ變數ナルキハ $A \propto BC$ ナリ

論 A ノ消長ハ B C ノ消長ニ從フ今 B C ノ消長ヲ同時ニ發セザルモノトシ B ノ b ニ變ズルキ A ハ a トナルトセハ $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$ ナリ又 C ノ c ニ變ズルキ

a' ハ a トナルトセハ $\frac{a'}{a} = \frac{C}{c}$ ナリ是故ニ $\frac{A}{a} \times \frac{a'}{a} = \frac{B}{b} \times \frac{C}{c}$ 卽チ $\frac{A}{a} = \frac{BC}{bc}$ ナ得此

ニ由テ $A \propto BC$ ナリ

幾何學ニ於テ此理ノ適例ヲ見ル三角形ノ積ハ正高不易ナルキ底邊ニ從テ消長シ底邊不易ナルキ正高ニ從テ消長ス若シ底高俱ニ變ズルキハ底高ノ乘積ニ從テ消長ス

又算數學合率比例ノ問題ニ此理ノ適例ヲ見ル設令ハ工事ハ作工時不易ナレバ工人ノ數ニ從テ消長シ工人ノ數不易ナレバ作工時ノ長短ニ從テ消長ス若シ工人ノ數ト作工時ノ長短ト俱ニ定ラサルキハ此兩數ノ乘積ニ從テ消長スルナリ

第三百十八條 前條ノ法ト同法ニテ B C D 等ノ衆數中一數消長スルキ他ノ諸數皆一定不易ニシテ別ニ一數 A ト號スル變數ノ之ニ從テ消長スルモノアラバ前ノ諸數皆俱ニ變數ナルキハ此衆數ノ連乘積ニ從テ消長スルヲ知ルベシ

消長問題

第一 一數 A ハ B ニ從テ消長ス而シテ B ノ値一箇ナルキ A ノ値二箇ナリト云フ由テ問フ B ノ値二箇ナルキ A ノ値幾何

第二 $A + B$ 若シ $A - B$ ニ從テ消長セハ $A + B$ ハ $A - B$ ニ從テ消長ス此証ヲ問フ

第三 $3A+5B$ ハ $3A+3B$ ニ從テ消長ス而シテ B ノ値二箇ナルキ A ノ値五箇ナリト云フ由テ問フ A ノ B ニ於ル比 $A:B$ ノ値如何

第四 A ハ $2B+C$ ニ從テ消長ス而シテ B ノ値二箇 C ノ値三箇ナルキ A ノ値七箇ナリト云ヒ又 B ノ値一箇 C ノ値二箇ナルキ A ノ値五箇ナリト云フ由テ問フ A ノ値幾何

第五 A ハ B C ニ從テ消長ス而シテ B ノ値一箇 C ノ値一箇ナルキ A ノ値一箇ナリト云フ由テ問フ B ノ値二箇 C ノ値二箇ナルキ A ノ値幾何

第六 A ハ B C ニ從テ消長ス而シテ B ノ値二箇 C ノ値二箇ナルキ A ノ値十箇ナリト云フ由テ問フ A ノ値十箇ナルキ B C ノ乗積ノ値幾何

第七 A ハ B C ニ從テ消長ス而シテ B ノ値二箇 C ノ値三箇ナルキ A ノ値八箇ナリト云フ由テ問フ C ノ値四箇ナルキ A ノ B ニ於ル比 $A:B$ ノ値幾何

第八 A ハ B C ニ從テ消長ス而シテ $B=d$, $C=e$ ナルキ A $2a$ ナリト云フ由テ問フ $B=h^2$, $C=e^2$ ナルキ A ノ値幾何

第九 A ハ B ニ從テ消長シ C ニ反シテ消長ス而シテ $B=b$, $C=c$ ナルキ $A=a$ ナリト云フ由テ問フ $B=c$, $C=b$ ナルキ A ノ値幾何

第十 若シ $\frac{2}{y}8x+y$ ナシテ又 $\frac{2}{3}8x-y$ ナレバ a^2-y^2 ハ不易ノ定數ナリ此証ヲ問フ

第十一 $ax+by=cx+dy$ ナレバ $axgy$ ナリ此証ヲ問フ但シ a b c d ノ四數ハ消長變化スルモノニアラズトス

第十二 axb ナレバ a^2-b^2xab ナリ此証ヲ問フ

第十三 球ノ實積ハ半徑ノ立方ニ從テ消長ストセバ半徑六寸ナル大球ノ實積ハ半徑三寸四寸五寸ナル三小球ノ實積ノ和ニ等シ此証ヲ問フ

第十四 貧民救助費ノ中テ貧民ノ人數ニ應シテ増減スル費目アリ又貧民ノ人數増減變化スルモ一定不易ナル費目アリ今貧民九百六十八ナレバ救助費一千二百二十圓ナリト云ヒ又貧民三千人ナレバ救助費一千八百圓ナリト云フ由テ問フ貧民ノ人數一千人ナレバ此救助費幾何

第十五 工夫五人ニテ七週間ニ工錢共ニ十七圓五十錢ヲ得タリト云フ由
テ問フ四週間ニ工錢共ニ三十圓ヲ得ント欲セバ工夫幾人ヲ要スルヤ
第十六 河堤ノ築造費ハ横斷面ノ積ト堤高トヲ變ゼザルキハ堤長ニ應ジ
テ増減アリ若シ又横斷面ノ積ト堤長トヲ變ゼザルキハ堤高ニ應ジテ増
減アリ若シ又堤長ト堤高トヲ變ゼザルキハ横斷面ノ積ニ應ジテ増減ア
リト云フ而シテ今長一里高十尺横斷面ノ積十二平方尺ナル河堤ヲ築造
費ヲ會計セバ九千六百圓ナリト云フ由テ問フ長一里高十六尺横斷面ノ
積十五平方尺ナル河堤ノ築造費幾何

第十七 瀛車アリ機關車ノミナレバ每一時ニ二十四里ノ鐵路ヲ行クベシ
若シ客車ヲ牽カバ其速力ハ列車ノ數ノ平方根ニ從テ消長スル數ヲ以テ
減ズベシト云フ今列車四輛ヲ牽クモ速力ヲ測レバ每一時ニ二十里ヲ行
クベキヲ知レリト云フ由テ問フ此機關車ノ牽力ノ限リ如何

○變數

第三百十九條 物ノ順列變數トハ交換變化ヲ盡シテ幾種ノ物ヲ排列スル
變數ナリ順列ヲ作ルノ法ハ總元ヲ盡ク一列ニ排列スルコアリ或ハ二三元
ヲ一列ニ排列スルコアリト雖ヒ一種ノ順列ハ一列ニ排列スル元數皆同シ
キヲ定則トス

設令ハ三元 a, b, c ナ以テ二元ヲ一列トスル順列ヲ作ラバ ab, ac, ba, bc, ca, cb ナ
得即チ六變ナリ又此三元ヲ盡ク一列トスル順列ヲ作ラバ $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ ナ
得即チ六變ナリ

第三百二十條 物ノ錯列變數トハ交換變化ヲ盡シテ幾種ノ物ヲ連合スル
變數ナリ錯列ヲ作ルノ法ハ一種ノ錯列ハ一列ニ連合スル元數皆同シキヲ
定則トス

設令ハ三元 a, b, c ナ以テ二元ヲ一列トスル錯列ヲ作ラバ ab, ac, bc ナ得即チ
三變ナリ

第三百二十一條 總數 n 元一列 r 元ナル順列變數ヲ發見スル法
諸元 a, b, c, d 等ト命ズ

若シ n 元中一元ヲ拔テ他ノ各元ニ一々配合シ又他ノ一元ヲ拔テ他ノ各元ニ一々配合ス逐テ此ノ如ク順次ニ一元ヲ拔テ他ノ各元ニ一々配合セバ一列ニ二元ヲ排列セシ順列ヲ得

第一 a ヲ拔テ他ノ各元ニ一々配合セバ ab, ac, ad 等ヲ得此總數ニ一ナリ
第二 b ヲ拔テ他ノ各元ニ一々配合セバ ba, bc, bd 等ヲ得此總數ニ一ナリ
第三 c ヲ拔テ他ノ各元ニ一々配合セバ ca, cb, cd 等ヲ得此總數ニ一ナリ
第四 d ヲ拔テ他ノ各元ニ一々配合セバ da, db, dc 等ヲ得此總數ニ一ナリ
逐テ此ノ如クシテ第 n 次ニ至テ止ム此ニ由テ總變數 $n(n-1)(n-2)\dots(1)$ ナルヲ知ル
是故ニ一列ニ二元ヲ排列セシ n 元ノ順列變數 $n(n-1)(n-2)\dots(1)$ ナリ

若シ n 元中配合ノ法變化ヲ盡シテ二元ヲ拔キ排列ノ法變化ヲ盡シテ他ノ各元ニ一々配合セバ一列ニ三元ヲ排列セシ n 元ノ順列變數ヲ得ベシ然ル

ニ n 元中二元ヲ拔カバ餘元 $n-2$ ニシテ一列ニ二元ヲ排列セシ n 元ノ順列變數ハ前論ニ由テ $n(n-1)$ ナルヲ知ル故ニ n 元中二元ヲ拔テ他ノ各元ニ一々配合セバ總變數 $n(n-1)(n-2)\dots(1)$ ナルヲ知ル

是故ニ三元ヲ一列トセシ n 元ノ順列變數 $n(n-1)(n-2)$ ナリ

若シ又 n 元中 $(n-1)$ 元ヲ拔キ排列ノ法變化ヲ盡シテ他ノ各元ニ一々配合セバ一列ニ r 元ヲ排列セシ n 元ノ順列變數ヲ得ベシ然ルニ n 元中 $(n-1)$ 元ヲ拔カバ餘元 $n-(n-1)$ 即チ 1 ナリ是故ニ前所得ノ變數ヲ推シテ r 元ヲ一列ニ配合セシ n 元ノ順列變數 $n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)(\Delta)$ ナルヲ知ル是レ n ヨリ $n-1, n-2, \dots, 1$ ニ至ル連續數ノ連乘積ナリ

註 連續數トハ五、六、七、八等ノ如ク間斷ナク連續セシ數ヲ云フナリ

今又前ニ求メ得タル順列變數ノ公式ヲ公法ニテ証明セントス

一列ニ r 元ヲ排列スル n 元ノ順列變數ヲ P トシ一列ニ $n+1$ 元ヲ排列セシ n 元ノ順列變數ヲ P' トス若シ n 元中 r 元ヲ拔カバ餘元 $n-r+1$ ナリ故ニ一列

ニナリ元ヲ排列セシ順列變數 P' ヲ得シガタメ P ノ各列ト配合スベキ餘元
 $n-r$ ナリナリ $P=P'(n-r)$ ナルヲ知ル此ニ由テ若シ前法ノ如ク

$$P=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)+n\cdots P=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)$$

是故ニ前公式 (A) ニテ一列ニ r 元ヲ排列セシ順列變數ヲ顯スヲ得バ一列

ニ $r+1$ 元ヲ排列セシ順列變數亦 (A) 式ニテ顯スヲ得ベシ然ルニ前一列

ニ三元ヲ排列セシ順列變數ハ此 (A) 式ニテ顯スヲ得ルヲ示セリ此ニ由テ

一列ニ四元ヲ排列セシ順列變數亦此 (A) 式ニテ顯スヲ得ベシ故ニ一列ニ

五元ヲ排列スルモ亦然リ逐テ此ノ如ク論スルハ一列ナル元數ニ限界ナ

シ是故ニ (A) 式ハ順列變數ヲ顯ス公式ナルヲ明ナリ

備考 順列變數ノ公式 (A) ノ乘子連乘ノ次數ハ一列ナル元數ニ同シ

第三百二十二條 諸元ヲ盡ク一列ニ排列セシ n 元ノ順列變數ヲ顯ス公式

ヲ得シト欲セバ前公式 (A) ノ r ヲ n ニ代フベシ乃チ $n(n-1)(n-2)\cdots 1$ (B) ヲ

得是レ所要ノ公式ナリ

是故ニ諸元ヲ盡ク一列ニ排列セシ n 元ノ順列變數ハ n ヨリ一ニ至ル連續
 數ノ連乘積ニ等シ

備考 一ヨリ n ニ至ル連續數ノ連乘積ヲ顯スニ符號 $!$ ヲ用フ讀テ連乘
 子 $n!$ ト云フ

第三百二十三條 總數 n 元一列 r 元ナレ錯列變數ヲ發見スル法

今 r 元ヲ一列ニ連合セシ n 元ノ錯列變數 C トシ r 元ヲ一列ニ排列セシ

n 元ノ順列變數 P トシ諸元ヲ盡ク一列ニ排列セシ n 元ノ順列變數 P'

トス

錯列變數 C ノ各列ノ諸元ノ次序ヲ交換シテ變化シ盡サバ總變數 P ナルヲ

明ナリ然ルニ諸元ヲ盡ク一列ニ排列セシ順列變數ハ P' ナルガ故ニ錯列變

數 C ノ各列ノ諸元ノ次序ヲ交換シテ順列ヲ作ラバ總變數 $C \times P'$ ヲ得ベシ由

テ $C \times P = P'$ ナリ此ニ由テ $C = \frac{P'}{P}$ ヲ得然ルニ第三百二十一條 (A) 式ニ由テ

$P=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ ナルヲ知ル又第三百二十二條 (B) 式ニ由テ

$P = r(r-1)(r-2) \cdots 1$ ナルヲ知ル是故ニ錯列變數ノ公式左ノ如シ

$$C = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)}{r(r-1)(r-2) \cdots 1} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)}{r!} \quad (C)$$

此式ノ分母子ニ $\frac{n-r}{r}$ ナ乗スレバ $C = \frac{n}{r} \frac{n-r}{n-r}$ ナ得

是故ニ r 元ヲ一列ニ連合セシル元ノ錯列變數ハ n ヨリ $\frac{n}{r}$ ナ至ル連續數ノ連乘積ナリヨリニ至ル連續數ノ連乘積ニテ除シタル商ニ等シ
第三百二十四條 總數 n 元一列 r 元ナル錯列變數ハ總數 n 元一列 $n-r$ 元ナル錯列變數ニ等シ

論 一列ニ r 元ヲ連合セシ錯列ノ一ヲ得ルハ餘元恰モ $\frac{n}{r}$ 元ヲ一列ニ連合セシ錯列ノ一トナル是故ニ總數 n 元中ニテ r 元ヲ一列ニ連合セシ錯列ヲ作ラバ $\frac{n}{r}$ 元ヲ一列ニ連合スル他ノ錯列ヲ得由テ r 元ヲ一列ニ連合セシ錯列變數ハ $\frac{n}{r}$ 元ヲ一列ニ連合セシ錯列變數ニ等シキヲ明ナリ
今又代數學ノ法ニテ右ノ定理ヲ證明セントス

總數 n 元一列 r 元ナル錯列變數ヲ C トシ總數 n 元一列 $\frac{n}{r}$ 元ナル錯列變數ヲ C' トス又 C' ノ値ノ分子ノ末乘子ハ $n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$ ナリ是故ニ

$$C = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)}{r!}, \quad C' = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)}{\frac{n-r}{r}!} \quad \text{ナリ此ニ由テ}$$

$$\frac{C}{C'} = \frac{n}{n-r} \quad \text{ナリ故ニ } C = C' \frac{n}{n-r} \text{ ナルヲ証明ス}$$

第三百二十五條 總數 n 變ゼズシテ最モ多キ錯列變數ヲ得ベキ一列ノ元數ヲ發見スル法

總數 n 元一列 r 元ナル錯列變數ヲ C トシ總數 n 元一列 $r+1$ 元ナル錯列變數ヲ C' トセバ第三百二十三條ノ公式 (C) ニ由テ $C = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)}{r!}$

$$\text{又 } C' = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)(n-r)}{(r+1)!} \quad \text{ナルヲ知ル是故ニ } \frac{C}{C'} = \frac{n-r}{r+1} \text{ ナ得此ニ}$$

$$\text{由テ } C = C' \times \frac{n-r}{r+1} \text{ ナ得是故ニ分數式 } \frac{n-r}{r+1} \text{ ノ値一箇ヨリ大ナレバ } C > C' \text{ ヨ}$$

リ大ニシテ分數式 $\frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \dots \frac{1}{2+1}$ ノ値一箇ヨリ小ナレバ C ハ C' ヨリ小ナリ由テ $\frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \dots \frac{1}{2+1} \sqrt{\dots}$ ナレバ一列ニ連合スル元數増加スルハ錯列變數モ増加シ $\frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \dots \frac{1}{2+1} \sqrt{\dots}$ ナレバ一列ニ連合スル元數増加スルハ錯列變數ハ反テ減少スルヲ知ル然ルニ若シ $\frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \dots \frac{1}{2+1} \sqrt{\dots}$ ナレバ $\frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \dots \frac{1}{2+1} \sqrt{\dots}$ ナリ此ニ由テ錯列變數ナシテ最多カラシメンニハ $\frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \dots \frac{1}{2+1} \sqrt{\dots}$ ヨリ小ナルベカラス又 $\frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \dots \frac{1}{2+1} \sqrt{\dots}$ 即チ $\frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \dots \frac{1}{2+1} \sqrt{\dots}$ ヨリ大ナルベカラス是故ニ $\frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \dots \frac{1}{2+1} \sqrt{\dots}$ ノ外ニ出テズ總數 n 若シ偶數ナレバ前後ノ兩式ハ分數ヲ帶ルガ故ニ $\frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \dots \frac{1}{2+1} \sqrt{\dots}$ ノ値トシテ用フベカラズ由テ此時ニテハ $\frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \dots \frac{1}{2+1} \sqrt{\dots}$ ナリ總數 n 若シ奇數ナレバ中央ノ式ハ分數ヲ帶ルガ故ニ $\frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \dots \frac{1}{2+1} \sqrt{\dots}$ ノ値トシテ用フベカラズ由テ此時ニテハ $\frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \dots \frac{1}{2+1} \sqrt{\dots}$ ナリ而シテ此二式中何レヲ採ルモ錯列變數同數ナリ其故何トナレバ第三百二十四條ニ由テ $\frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \dots \frac{1}{2+1} \sqrt{\dots}$ トゾ

作レル錯列變數ハ $\frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \dots \frac{1}{2+1} \sqrt{\dots}$ トシテ作レル錯列變數ト同一ナルヲ

知ルガ故ナリ是故ニ n 若シ奇數ナレバ $\frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \dots \frac{1}{2+1} \sqrt{\dots}$ 或ハ $\frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \dots \frac{1}{2+1} \sqrt{\dots}$ トスルハ

錯列變數最モ多シ但シ $\frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \dots \frac{1}{2+1} \sqrt{\dots}$ ノ兩值俱ニ同シ錯列變數ヲ生ズルナリ

第三百二十六條 總數 n 元ノ中ニ同元若干ヲ包容スルハ諸元ヲ盡ク一列

ニ排列セシハ順列變數ヲ發見スル法

總數 n 元ノ中ニ a 元 p 元 b 元 q 元 c 元 r 元包容シ他ノ諸元 d, e, f 等各々

一元ヲ包容ストシ總變數ヲ N トス

若シ p 箇ノ a 元 p 箇ノ不同元ヲ代用セバ他ノ諸元ノ排列ヲ變換セズシテ

一列ヨリ順列變數 p 得ベシ是故ニ a 元不同ナル p 元ニ代フルハ順列

變數 $N \times \frac{1}{p+1}$ ナリ又同理ニテ b 元不同ナル q 元ニ代フレバ順列變數 $N \times \frac{1}{q+1}$

ナルヲ知ル又 c 元不同ナル r 元ニ代フレバ順列變數 $N \times \frac{1}{r+1}$ ナルヲ

知ルベシ然ルニ此變數ハ n 箇ノ不同元ノ順列變數 N ニ等シカラザルヲ得

是故 $n \times [p \times [q \times [r] = n]$ ナリ此ニ由テ左ノ式ヲ得

$$N = \frac{1}{p} \frac{1}{q} \frac{1}{r} \quad (D)$$

變數問題

- 第一 總數十元アリ四元チ一列ニ排列シテ順列ヲ作ラバ變數幾何ナルヤ
- 第二 總數六元アリ六元チ一列ニ排列シテ順列ヲ作ラバ變數幾何ナルヤ
- 第三 總數十元アリ十元チ一列ニ排列シテ順列ヲ作ラバ變數幾何ナルヤ
- 第四 亞刺伯數字 4 3 2 1 0 ノ五號ヲ以テ五位ノ數幾種ヲ作ラントス但シ一數中同號ヲ複用スルヲ禁ズ由テ問フ幾種ノ數ヲ得ベキヤ
- 第五 亞刺伯數字 5 6 7 8 9 ノ五號ヲ以テ幾種ノ數ヲ作ラントス但シ一數中同號ヲ複用スルヲ禁ズ由テ問フ幾種ノ數ヲ得ベキヤ
- 第六 總數元アリ若シ四元チ一列トシテ順列ヲ作ラバ所得ノ變數恰モ二元チ一列トセシ順列變數二倍ニ等シト云フ由テ問フルノ值幾何

- 第七 總數八元アリ四元チ一列ニ連合シテ錯列ヲ作ラバ變數幾何ナルヤ
- 第八 總數十六元アリ五元チ一列ニ連合シテ錯列ヲ作ラバ變數幾何ナルヤ

第九 二十人中六人ヲ撰マントセバ撰法幾變アリヤ

第十 議官六人順次ニ議場ニ列坐スルアリ交互ニ席次ヲ交換セバ着席ノ法幾變アリヤ但シ一人辭シテ首坐ニ着カザル者アリ

第十一 四十箇ニ滿タザル元乘子ノ連乘積幾種ヲ作ラントス但シ各乘積ノ乘子ノ連乘次數皆同シク乘積ノ變數最モ多カラントス由テ問フ乘積ノ變數幾何

第十二 菓子ヲ賣ル者アリ每三箇ノ價十錢ノ菓子二十箇ヲ携フ今買客六十錢ヲ投シテ適意ノ品ヲ撰マントス由テ問フ撰法幾變アリヤ

第十三 一隊ノ兵士九十六人中番兵十人ヲ擇ハントス但シ一人常ニ擇ニ當ル者アリトス由テ問フ撰法幾變アリヤ

第十四 五元チ一列トモシ順列變數ト三元チ一列トモシ錯列變數一百二十倍ト等シキモノアリ由テ問フ此總元數幾何

第十五 總數元アリ一列ニテ元ヲ連合シテ錯列ヲ作り又一列ニテ元ヲ連合シテ錯列ヲ作ラバ此兩變數相等シク又一列ニテ元ヲ連合シテ錯列ヲ作テ前ノ變數チ後ノ變數ニ比ブレバ五ノ四ニ於ルガ如シト云フ由テ問フ其ノ值幾何

第十六 代數學ノ原名 *algebra* ノ各元字ヲ變列セバ變數如何

第十七 四種ノ錢各一箇アリ即チ一圓五圓十圓二十圓是レナリ由テ問フ釣錢ナシトセバ幾種ノ支償ニ應スベキヤ

第十八 紳士二人アリ各馬同數ヲ飼フ甲ハ三馬ヲ以テ一車ニ裝シ毎日配合チ交換ス乙ハ二馬ヲ以テ一車ニ裝シ又毎日配合チ交換スト云フ若シ配合ノ法ノ變數ヲ比較セバ甲ハ二ノ如ク乙ハ一ノ如シト云フ由テ問フ二士各飼馬ノ數幾何

第十九 平面上ニ十二點アリ中テ五點ハ一線ヲ以テ貫クベシ然レモ此他總テ三點一線ヲナスモノナシ今此各點ヲ繫テ幾條線ヲ作ラントス由テ問フ直線幾條ヲ得ベキヤ

第二十 十角形ノ兩對角ノ間ニ直線ヲ作テ三角形ヲ作ラバ三角形幾種ヲ得ベキヤ但シ此三角ハ必ス一邊以上多角形ノ邊ヲ有ツモノトス

第二十一 一鑑アリ水手九人測士三人乗船ス今此中ヨリ水手八人測士一人ヲ上直ト定ムルハ連合ノ法幾變アリヤ又問ラ若シ測士三人ノ中一人ハ水手ノ務ニモ應スルモノトセバ連合ノ法幾變アリヤ

第二十二 一船中ニ乗客十人アリ内二人ハ外國人ナリト云フ今此乗客ノ中ヨリ輪番ニテ日々六人ノ見張番ヲ撰マントス由テ問フ連合ノ法幾種ヲ得ベキヤ又問フ外國人偕ニ當ル日幾何ナルヤ

第二十三 客店アリ客八人寓ス各主人ニ約シテ日々毎食一食臺ノ雙方ニ四人ツ、相對メ坐シ毎食一方ニ坐スル者連合ノ法幾種シテ變化盡ル

食料ヲ償フベシト乃チ變化盡ルノ日主人食帖ヲ報スルヲ檢スレバ一客ノ出銀三十五圓ナリト云フ由テ問フ一客一食ノ料幾何

○記數法

第三百二十七條 數字ヲ以テ整數ヲ記スルノ法ヨ於テ各位ノ數皆十箇ノ幾乗冪ノ幾倍ヲ示スモノナルヲハ算數學ヲ學ビ得タル者ハ皆ヲ識ル所ナリ設令ハ⁵²³ヨ於テ5ハ五百箇即チ十箇ノ二乗冪五倍ヲ示シ2ハ二十箇即チ十箇ノ一乗冪二倍ヲ示シ3ハ三箇即チ十箇ノ空數冪二倍ヲ示スナリ〔第八十一條ヲ視ヨ〕今此記數法ヲ十進法ト名ヅク而シテ十箇ヲ數元ト名ヅク今下條ニ於テ一箇ヨリ大ナル正ノ整數ハ總テ數元トシテ十箇ニ代用スルヲ得ベキヲ論ジ又整數ハ皆任意ナル記數法ニテ示スヲ得ベキヲ論ゼ

ントス

備考 數字トハ之ヲ用ヒテ數ヲ顯ス所ノ符號ナリ又數元ト云フハ恒ニ一箇ヨリ大ナル整數ト知ルベシ

第三百二十八條 整數ハ任意ナル數元ヲ用ヒテ記スベキヲ論ズ

整數ヲ N トシ數元ヲ a トシ N ニ越ヘサル a ノ最高冪 a^r トシ a^r ヲ以テ N ヲ除シ所得ノ商ヲ α トシ餘數ヲ P トセバ $N \parallel \alpha a^r + P$ ナリ但シ憶定ニ由テ α ハ a ヨリ小ニシテ P ハ a^r ヨリ小ナリ又 a^{r-1} 以テ P ヲ除シ所得ノ商ヲ β トシ餘數ヲ Q トセバ $P = \beta a^{r-1} + Q$ ナリ逐テ此ノ如ク同法ヲ施サバ竟コ

$N = \alpha a^r + \beta a^{r-1} + \gamma a^{r-2} + \dots + h a + k$ ヲ得但シ各數字 $\alpha, \beta, \gamma, \dots, h, k$ ハ皆 a ヨリ小ニシテ此中或ハ空數ナルモアリト知ルベシ

第三百二十九條 已定ノ記數法ニテ整數ヲ顯ス法

斯ニ整數ト云ヘルハ常談ヲ以テ述ル數ニアラザレバ一定セル記數法ニ從テ數字ニテ顯ス所ノ數ヲ指スナリ若シ別ニ註釋アルニアラザレバ恒ニ十

進法ト知ルベシ

整數ヲNトシ數元ヲ a, b, c, \dots, z トシ所要ノ數字ヲ h, k, \dots, z トシ此字數ヲ $n+1$ 字トセバ $N = a^n + b^{n-1} + c^{n-2} + \dots + h + k$ ナリ今 N ヲ以テNヲ除シタル商 M トセバ $M = a^{n-1} + b^{n-2} + c^{n-3} + \dots + h$ ニシテ餘數ハ k ナリ此ニ由テ末位ナル數字ヲ發見スルノ法左ノ如シ

已定ノ數元ヲ以テ所題ノ數ヲ除シテ餘數ヲ所要ノ末位ナル數字トス又 M ヲ以テMヲ除スレバ餘數 h ヲ得ヘキヲ明ナリ故ニ第二位ノ數字ヲ發見ス逐テ此ノ如ク同法ヲ施サバ所要ノ數字ヲ盡ク發見スルヲ得

例一 三萬二千八百八十四箇ヲ七進法數元七ナル記數法以下總テ此例ニ倣テ知ルベシニテ記スレバ如何

算 運

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 32884} \\ 7 \overline{) 4697} \dots 5 \\ 7 \overline{) 671} \dots 0 \\ 7 \overline{) 95} \dots 6 \\ 7 \overline{) 13} \dots 4 \\ 1 \dots 6 \end{array}$$

是故ニ

$$32884 = 1 \cdot 7^5 + 6 \cdot 7^4 + 4 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 5$$

ナリ由テ七進法ニテ

此數ヲ記スルキハ 164605 ナリ

例二 七萬四千一百九十四箇ヲ十二進法ニテ記スレバ如何

算 運

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 74194} \\ 12 \overline{) 6182} \dots 10 \\ 12 \overline{) 515} \dots 2 \\ 12 \overline{) 42} \dots 11 \\ 3 \dots 6 \end{array}$$

是故ニ

$$74194 = 3 \cdot 12^4 + 6 \cdot 12^3 + 11 \cdot 12^2 + 2 \cdot 12^1 + 10$$

ナリ由テ數元十二ナル

記數法ニテ十進法ノ如ク數ヲ記スルヲ必要ムレバ十ト十一トヲ顯ス數字必要ナリ今十ヲ顯ス數字ヲ e トシ十一ヲ顯ス數字ヲ f トシテ十二進法ニテ所題ノ數ヲ記スルキハ 33e2f 此ノ如シ

例三

九進法ニテ 645032

此ノ如ク記スベキ數アリ之ヲ八進法ニテ記ス

算 運

8	645032	
8	727824
8	82102
8	10233
8	1136
8	125
	13

除法 首位 6 ノ内ニ法 8 ナ包容セザルガ故ニ 64 ノ内ニ法 8 ラ包容
スル倍数ヲ發見セントス但シ首位ノ 6 ハ九ノ六倍 54 ナ顯スナリ由
テ 58 ノ内ニ 8 ナ包容スル倍数ヲ發見セントス乃チ七倍ヲ包容シテ
餘數二ナルヲ發見ス次ニ又 25 即チ 23 ノ内ニ 8 ナ包容スル倍数ヲ發
見セントス乃チ二倍ヲ包容シテ餘數七ナルヲ發見ス次ニ又 70 即チ
63 ノ内ニ 8 ナ包容スル倍数ヲ發見セントス乃チ七倍ヲ包容シテ餘
數七ナルヲ發見ス次ニ又 73 即チ 66 ノ内ニ 8 ナ包容スル倍数ヲ發見

セントス乃チ八倍ヲ包容シテ餘數二ナルヲ發見ス次ニ又 22 即チ 20
ノ内ニ 8 ナ包容スル倍数ヲ發見セントス乃チ二倍ヲ包容シテ餘數
四ナルヲ發見ス由テ 4 ナ所要ノ末位ノ數字トス又此ノ如ク同法ヲ
以テ所得ノ商ヲ八除ス逐テ此ノ如クセハ竟ニ此數ハ

$1.S^6 + 3.S^5 + 5.S^4 + 6.S^3 + 3.S^2 + 2.S + 4$ トナルヲ見ル是故ニ數元ヲ 8 トセバ
此數 1356324 トナルヲ知ル

右ノ算法ヲ檢明セントシテ例題ヲ求ルハ其數限リナシ設令バ十進數二
件ヲ撰ミ或ハ相加ヘ或ハ相減シ或ハ相乘シ所得ノ數ヲ任意ナル數元ノ記
數法ニテ顯シ然ル後チ又前ノ兩數ヲ今定ル所ノ記數法ニテ顯シ所得ノ兩
數ヲ或ハ相加ヘ或ハ相減シ或ハ相乘シテ所得ノ數ヲ前ノ得數ニ比ブレバ
毫釐チ差ヘサルヲ知ルベシ

記數問題

第一 三萬四千零四十二箇ヲ五進法ニテ記スレバ如何

- 第二 四萬五千七百九十二箇ヲ十二進法ニテ記スレバ如何
- 第三 一千八百六十六箇ヲ二進法ニテ記スレバ如何
- 第四 二千七百四十五箇ヲ十一進法ニテ記スレバ如何
- 第五 十一進法ニテ 24050 此ノ如ク記スベキ數アリ之ヲ十進法ニテ記スレバ如何
- 第六 十二進法ニテ 1327 此ノ如ク記スベキ數アリ之ヲ七進法ニテ記スレバ如何
- 第七 八進法ニテ 702573 此ノ如ク記スベキ數アリ之ヲ十一進法ニテ記スレバ如何
- 第八 十二進法ニテ記スル兩數 $64f, te$ ノ相乘積ヲ問フ〔但シ先ツ兩數ヲ十進法ニ改メ記シ然ル後ヲ相乘スベシ〕
- 第九 八進法ニテ記スル兩數 $25602, 323$ ノ相乘積ヲ問フ〔但シ十進法ニ改メ記スルヲ許サズ〕

- 第十 九進法ニテ記スル兩數 $17532126, 4685$ アリ前ノ數ヲ後ノ數ニテ除スレバ所得ノ商如何
- 第十一 十進法ニテ 4161 ト記スベキ數アリ之ヲ 10101 トナサント欲セバ數元ヲ幾何ニ定メテ可ナランヤ
- 第十二 十進法ニテ 5261 ト記スベキ數アリ之ヲ 40205 トナサント欲セバ數元ヲ幾何ニ定メテ可ナランヤ
- 第十三 一數アリ 17161 此ノ如シ之ヲ十二進法ニテ記スレバ如何又問フ所得ノ數ヲ同記法ニテ記セル數 te ニテ除スレバ所得ノ商如何
- 第十四 十二進法ニテ記セル數 $et001$ ノ平方根ヲ問フ
- 第十五 二進法ニテ記セル數 1100000100001 ノ平方根ヲ問フ
- 第十六 十進法ニテ記スル數ハ中ヲ各位ノ數字ノ和ヲ減シタル餘數恒ニ九ヲ以テ約スベシ此証ヲ問フ
- 第十七 十進法ニテ記スル數ハ各位ノ數字ノ和九ノ幾倍ニ相當セバ九ヲ

以テ約スベシ此証ヲ問フ

雜問六

第一 $ax^2+bx+c=0$ 上ノ方程式ノ兩商ノ平方ノ和ヲ問フ

第二 前問ノ方程式ノ兩商ヲ r, r' トシテ左ノ六式ノ値ヲ問フ

一式 $r^2+r'^2$

二式 $r^4+r'^4$

三式 $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$

四式 $\frac{r'}{r}+\frac{r}{r'}$

五式 $\frac{r'^2}{r}+\frac{r^2}{r'}$

六式 $\left(\frac{r-1}{r}+\frac{r'-1}{r'}\right)^2$

第三 $\frac{m\sqrt{c^2-x^2}-n(c+x)}{m\sqrt{c^2-x^2}+n(c+x)}=\frac{ma-nb}{ma+nb}$

上ノ方程式ヨリ x ノ値ヲ發見ス

セシ

第四 $\frac{a+a+\sqrt{2ax+x^2}}{a+a-\sqrt{2ax+x^2}}=j^2$ 上ノ方程式ヨリ x ノ値ヲ發見スベシ

第五 $(x^2+y^2)\frac{y}{x}=\frac{2}{3}, (x^2-y^2)\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$ 上ノ方程式ヨリ x, y ノ値ヲ發見ス

セシ

第六 $\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{a+\sqrt{a^2-y^2}}=a, \frac{x}{y}=\sqrt{\frac{1+x}{1-y}}$ 上ノ方程式ヨリ x, y ノ値ヲ發見スベシ

第七 $a+\sqrt{a^2-y^2}=\frac{a}{y}\{\sqrt{(x+y)}+\sqrt{(x-y)}\}, \sqrt{(x+y)}+\sqrt{(x-y)}=y$ 上ノ方程式

ヨリ x, y ノ値ヲ發見スベシ

第八 $\sqrt{a^2+\sqrt{(x^2y^2)}}+\sqrt{y^2+\sqrt{(x^2y^4)}}=a, x+y+3\sqrt{(bxy)}=b$ 上ノ方程式ヨリ

x, y ノ値ヲ發見スベシ

第九 $(xy+1)(x+y)=15xy, (x^2y^2+1)(x^2+y^2)=20x^2y^2$ 上ノ方程式ヨリ x, y

ノ値ヲ問フ

第十 $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a} \quad + \quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \quad \text{ナリ此証ヲ問フ}$

第十一 $a:b::p:q + \sqrt{a^2+b^2} : \frac{a^2}{a+b}::p^2+q^2 : \frac{p^3}{p+q}$ ナ得此証ヲ問フ

第十二 $a+b \times a-b$ ナレバ $a^2+b^2 \times ab$ ナリ此証ヲ問フ

第十三 $a^2-(1+a)x+\frac{1}{2}(1+a+a^2)=0$ 上ノ方程式ノ兩商平方ノ和ヲ問フ

第十四 $ac^2+bx+c=0$ 上ノ方程式ノ兩商ノ比 m ノ n ニ於ルガ如クナレバ $\frac{b^2-(m+n)^2}{ac}$ ナリ此証ヲ問フ

第十五 $xy+n(x+y)=a, ax+n(x+z)=b, yz+n(y+z)=c$ 上ノ方程式ヨリ x, y, z ノ値ヲ問フ

第十六 axb, bxc ナレバ $(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}} \times c^3$ ナリ此証ヲ問フ

第十七 a, b ト兩不等數ナレバ $a^2+b^2:a^2+b^2:a+b$ ヨリ大ナリ此証ヲ問フ

第十八 比例式ノ四率皆同種類ナレバ最大最小兩率ノ和ハ他ノ兩率ノ和ヨリ大ナリ此証ヲ問フ

第十九 $a:b::b:c::c:d::d:e$ ナレバ $a:c::a^4:b^4$ ナリ此証ヲ問フ

第二十 $x^2=mc+ny, y^2=nx+my$ 上ノ方程式ヨリ x, y ノ値ヲ發見スベシ

第二十一 $x(y+z)=a, y(x+z)=b, z(x+y)=c$ 上ノ方程式ヨリ x, y, z ノ値ヲ發見スベシ

第二十二 旅客二人同時ニ東西兩府ヲ發シ相向テ行キ途上ニ相逢フノ後チ東客ハ二十五日ヲ歷テ西府ニ達シ西客ハ三十六日ヲ歷テ東府ニ達セリト云フ由テ問フ二人各旅行日數幾何

第二十三 磁石二箇アリ其距離 a 尺ニシテ引鐵力ノ比 m ノ n ニ於ルガ如シ今兩石ヲ繫ク直線中ニ於テ兩石ヨリ同シ引鐵力ヲ受クベキ一點ヲ發見セント欲ス由テ問フ此點ノ位置如何磁石ノ引鐵力ノ遠近ニ依テ強弱アルヲ燈光ト同シ

第二十四 直三角アリ弦ノ兩邊ノ和ニ於ル比ハ m ノ n ニ於ルガ如シトセバ $n \sqrt{2}$ ヨリ大ナラズ此証ヲ問フ

第二十五 $c - ac^2 - bas$ 上式ノ値ヲ最大ナラシムベキ a ノ値ヲ問フ

第二十六 $c + ac^2 + bas$ 上式ノ値ヲ最小ナラシムベキ a ノ値ヲ問フ

第二十七 總數 n 元アリ一列ニ r 元ヲ連合セシ錯列ノ中ニ兩同元設令ハ第一元ト第二元トノ如シヲ包容スルモノ幾列アリヤ

第二十八 總數 n 元アリ一列ニ r 元ヲ排列セシ順列ノ中ニ兩同元ヲ隣次ニ排列スルモノ〔設令ハ第一元第二元又第二元第一元ノ如シ〕幾列アリヤ

第二十九 川蒸汽船アリ毎日上下兩湊ノ間ヲ往來ス順流ヲ下ルキハ速ク逆流ニ泝ルキハ遅シ由テ上下行船ノ時ヲ比スレバ下ル時ハ三ノ如ク上ルキハ五ノ如シト云フ今雨後大水ニ逢テ水勢常ニ二倍ス故ニ順流ヲ下ルキハ愈速シ而シテ上ラントスルキ水勢ノ三分之一ヲ減ス由テ問フ此時上下行船時ノ比如何

第三十 $a : b :: c : d$ ナンハ $mc^2 + nb^2 : na^2 + mb^2 :: mc^2 + nd^2 : nc^2 + md^2$ ナ得

此証ヲ問フ

第三十一 十進法ニテ記スル兩數ノ列數字若シ同一ナレバ列位ノ次序ニ係ラズ此兩數ノ差ハ九ヲ以テ約スベシ此証ヲ問フ

第三十二 議官九人ノ中ニ議長一人アリ恒ニ中央ニ坐ス他ノ議員交互ニ席ヲ交換シテ坐スルキハ着席ノ法幾種アリヤ

第三十三 議官 n 人アリ議場ニ環坐ス若シ交互ニ席ヲ交換シテ坐スルキハ着席ノ法幾種アリヤ

第三十四 立方形ナル水槽三箇アリ其容積ノ比ハ一ト八ト二十七トノ如ク現在容ル、所ノ水量ノ比ハ一ト二ト三トノ如シト云フ今槽底ナル通管ヲ開テ水面ヲ平準ナラシメ然ル後ヲ通管ヲ塞キ大槽ヨリ水一石二斗八升七分升之四ヲ中槽ニ移シ中槽ヨリモ若干ノ水ヲ小槽ニ移シテ水底ヲ量レバ小槽ノ深キ $\frac{1}{2}$ 中槽ニ二倍スルヲ發見セリト云ヒ又小槽ナル水量ヲ量レバ原藏ノ量ヨリ一石ヲ減ジタルヲ發見セリト云フ由テ問フ三

槽各原藏ノ量幾何

第三十五 釀造家アリ醇酒二百五十六升ヲ貯藏ス始メ此中ヨリ若干ヲ酌ミ出シ之ヲ補フニ水ヲ以テシ又翌日同量ヲ酌ミ出シテ之ヲ補フニ水ヲ以テス此ノ如クスルヲ四次ニシテ竟ニ醇酒八十一升ヲ遺セルヲ發見セリト云フ由テ問フ毎次酌ミ出ス所ノ醇酒ノ量各幾何

第三十六 一箇ノ平面上ニ點アリ此中三點一線ヲナスモノナク又二點ヲ繋ク直線平行スルモノナシ由テ問フ二點ツ、ヲ繋テ直線ヲ作ラバ幾種ノ三角形ヲ得ベキヤ

第三十七 a, b 若シ $a > b$ ヨリ大ナレバ $a + a + b + b = 4a + 2b$ ヨリ小ニシテ $a < b$ ヨリ大ナリ此証ヲ問フ

第三十八 二條ノ鐵路平行スルアリ各々一列ノ汽車往來ス今此汽車ノ乘客中ノ一人彼汽車ノ追ヒ來ルヲ見テ其速力ヲ測レバ三十秒間ニテ我眼前ヲ去レリト云フ後ヲ又此人彼汽車ノ向ヒ來ルヲ見テ其速力ヲ測レバ

二秒間ニシテ我眼前ヲ去レリト云フ由テ問フ兩種汽車ノ速力一定不易ナリトセバ此兩種汽車ノ速力ノ比如何

第三十九 傭夫二人アリ共ニ作工シテ一事ヲ治メントス甲ノ力ハ三ノ如ク乙ノ力ハ五ノ如シ而シテ甲ハ毎日十二時間作工シ乙ハ毎日十時間作工ス然ルニ未タ成工ニ至ラズシテ乙休工セリ然レモ甲一人作工シテ翌日落成セリ由テ兩工ノ力及ヒ作工時ニ應シテ工錢ヲ配分セバ乙ノ所得ハ甲ノ所得ヨリ二錢銅貨ニテ共ニ作工セシ日數ト同數ヲ越ヘタリト云フ然レモ若シ乙ノ休工ヲ更ニ一日早カラシメバ甲所得ノ工錢ハ乙所得ノ工錢ヨリ九十四錢多カルベシト云フ由テ問フ兩工各一日ノ工錢幾何

第四十 金剛石ノ價ハ秤量ノ平方ニ從テ消長シ紅寶石ノ價ハ秤量ノ立方ニ從テ消長ストス今爰ニ重 a 兩ノ金剛石及ヒ重 b 兩ノ紅寶石アリ其價ヲ比スレバ金剛石ノ價ハ紅寶石ノ價ノ m 倍ニシテ兩種寶石ノ價ヲ合スレバ c 圓ナリト云フ由テ問フ重 a 兩ノ金剛石及ヒ紅寶石ノ價各幾何

第四十一 工匠三人アリ甲一人ニテ一事ヲ治ルルハ乙丙二人ニテ一事ヲ治ル日數 m 倍ノ日數ヲ要ス又乙一人ニテ一事ヲ治ルルハ甲丙二人ニテ一事ヲ治ル日數 n 倍ノ日數ヲ要ス又丙一人ニテ一事ヲ治ルルハ甲乙二人ニテ一事ヲ治ル日數 p 倍ノ日數ヲ要スト云フ由テ問フ三工各一人ニテ一事ヲ治ル日數ノ比幾何

第四十二 前題ノ已知數互ニ $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{p+1} = 1$ 此ノ如キ關係アリ

此証ヲ問フ

第四十三 一小舟ニ舟子八人乗テ兩舷ニ四人ツ、別レテ鰻ヲ押スアリ此中チ三人ハ常ニ左舷ニ在リ二人ハ常ニ右舷ニ在リトシテ交互ニ鰻ヲ交換シテ操ラバ幾種ノ變化ヲ得ベキヤ

第四十四 總數 n 元ノ中チ一列ニ r 元ヲ排列シテ順列ヲ作ルルハ兩同元〔設令ハ第一元第二元〕ヲ兩端ニ列スルモノ幾種アリヤ

第四十五 不同ナル數字 n 字アリ若シ之ヲ以テ同字ヲ複用セズシタル位

ノ數ヲ作ラバ作り得タル諸數ノ和ハ前ニ云ヘル n 數字ノ和ヲ以テ約ス
ヲ得ベシ此証ヲ問フ

○級數

第三百三十條 級數トハ衆項相連續シテ作ル所ノ式ナリ而シテ其一項必ズ前ノ一項或ハ數項ヨリ定則ヲ以テ求メ得ベキモノナリ

平差級數

第三百三十一條 平差級數トハ列項公差ヲ以テ順次ニ増加シ或ハ減少シテ連續スル一種ノ級數ナリ

公差ハ代數學科ノ意義アル累加數ト視做スヲ得ベシ此ニ由テ増級數ニテハ公差正數ニシテ減級數ニテハ公差負數ナリ設令ハ一三、五、七、九等ノ如

キハ平差増級數ニシテ公差ハ正數ニナリ又二十八十六十四十二等ノ如キハ平差減級數ニシテ公差ハ負數ニナリ

第三百三十二條 平差級數ノ尾項ハ項數ヨリ一ヲ減シタル餘リニ公差ヲ乘シ所得ノ乘積ヲ首項ニ加ヘタル和ニ等シ

論 首項ヲ a トシ尾項ヲ l トシ公差ヲ d トシ項數ヲ n トセバ級數ノ各項 $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, l$ 此ノ如シ此ニ由テ此級數ノ各項ノ d ノ段數ハ前ニ排列スル項數ニ等シキヲ知ル是故ニ $l = a + (n-1)d$ トナル此式ニ於テ d ハ級數増級數ナル正數ニシテ減級數ナルキ負數ナリト知ルベシ
第三百三十三條 平差級數ノ兩外項ヨリ同ジ次序ニ排列スル兩項ノ和ハ總テ兩外項ノ和ニ等シ

論 級數ノ首項ヨリ第 r 項ヲ t_r トシ又尾項ヨリ第 r 項ヲ t_r トシ級數ヲ増級數トセバ $t_r = a + (r-1)d, t_r = l - (r-1)d$ ヲ得此兩式ヲ合スレバ $t_r + t_r = a + l$ ヲ得ルナリ

第三百三十四條 平差級數ノ總數ハ兩外項ノ和ト項數トノ相乘積ノ半ニ等シ

論 級數ヲ s トシ諸項ヲ順逆二様ニ排列セバ左ノ如シ

$$s = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \dots + l(1)$$

此兩式ヲ合スレバ左ノ如シ

$$s = l + (l-d) + (l-2d) + (l-3d) + \dots + a(1)$$

$$2s = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \dots + (a+l)(1)$$

此[三]式ハ各項何レモ $(a+l)$ ニ等フシタル項排列スルガ故ニ $2s = n(a+l)$ ナリ

此式ノ兩節ヲ二除セバ $s = \frac{n}{2}(a+l)$ ヲ得ルナリ

第三百三十五條 已定ノ兩項間ニ平差中項若干ヲ插入スル法

插入スベキ項數ヲ n トセバ級數ノ總項數ハ $n+2$ ナリ之ヲ以テ第三百三

十二條[A]式ノ n ニ代フレバ $l = a + (n+1)d$ ヲ得此ニ由テ $d = \frac{l-a}{n+1}$ [C]ナリ

此ノ如クシテ公差ヲ得ルガ故ニ容易ニ平差中項ヲ求メ得ベシ

第三百三十六條 公式用法

兩公式 $l = a + (n-1)d$ [A] $s = \frac{n}{2}(a+l)$ [B] ノ中ニ a 及 n 及 d ノ五元ヲ包藏スルガ故ニ若シ此五元ノ三ヲ知ラバ他ノ二元必ズ推算スベシ是レ已知ノ三元ノ値ヲ此兩式中ノ已知元ニ配附セバ未知數二元ヲ包容スル兩方程式ヲ得ルガ故ナリ

例一 平差級數アリ首項五箇公差三箇項數二十四ナリト云フ由テ問フ尾項及ヒ總數幾何

運算 $a=5, d=3, n=24$ ナリ由テ [A] 式ヨリ $l=5+(24-1)3=74$ ナ得

[B] 式ヨリ $s=\frac{24}{2}(5+74)=949$ ナ得ルナリ

答 尾項七十四箇 總數九百四十八箇

例二 $a=15, d=-2, s=60$ ナレバ項數如何

運算 [A] [B] 兩公式ヨリ $l=15-2(n-1)$ $60=\frac{n}{2}(15+l)$ ナ得此ニ由テ

$$l=17-2n, \quad l=\frac{1}{n}(120-15n) \quad \text{トナル故ニ} \quad \frac{120-15n}{n}=17-2n \quad \text{ナ得}$$

此方程式ニ $n=120-15n=17n-2n^2, \quad n^2-16n=-60, \quad n-S=12, \quad n=10, \quad \text{或} \quad 6$ ナ得

斯ニ得ル所ノ項數ハ兩種俱ニ正答ナリ蓋シ此題意ニ適スル級數兩種アツテ其一ハ十項排列シ其二ハ六項排列スルナリ此兩級數ヲ擧グレバ第一ハ十五、十三、十一、九、七、五、三、一、負一、負三、ノ十項ニシテ第二ハ十五、十三、十一、九、七、五、ノ六項ナリ此兩級數ノ總數ハ俱ニ六十トナルナリ

平差級數公式應用問題

第一 平差級數アリ首項七箇公差三箇項數三十六ナリト云フ由テ問フ尾項幾何

第二 平差級數アリ首項二百七十五箇尾項五箇項數四十六ナリト云フ由

テ問フ總數幾何

第三 平差級數アリ總數一百五十六箇項數八公差五箇ナリト云フ由テ問
フ兩外項各幾何

第四 平差級數アリ首項一箇公差二分箇之一項數一百零一ナリト云フ由
テ問フ總數幾何

第五 七箇ト三十七箇トノ間ニ平差中項四項ヲ挿入セント欲ス由テ問フ
中項各幾何

第六 平差級數アリ首項三箇項數六十總數三千七百二十箇ナリト云フ由
テ問フ公差及ヒ尾項幾何

第七 平差級數アリ兩外項九箇ト一百零九箇トニシテ其間ニ九項排列ス
ト云フ由テ問フ總數幾何

第八 平差級數アリ兩外項三分箇之一ト二分箇之一ニシテ其間ニ三項排
列スト云フ由テ問フ公差幾何

第九 債ヲ負フ人アリ毎日之ヲ償還ス其法初日一錢ヲ償還シ次日三錢ヲ
償還シ第三日五錢ヲ償還ス逐テ此ノ如ク日々二錢ヲ増シテ償還シ一歲
ノ間怠ルコナケレバ幾何ヲ償還スルコト得ルヤ但シ一歲三百六十五日
ト算ス

第十 脚夫アリ起程ノ日十里ヲ行キ次日十一里半ヲ行キ第三日十三里ヲ
行ク逐テ此ノ如ク毎日一里半ヲ増シテ進ミ以テ二百十九里ノ行程ヲ旅
行セントス由テ問フ旅行日數幾何

第十一 連續數一箇ニ起リ二、三、四、五等ト間斷ナク連續セシ數ヲ云フナリ
ル項ノ總數ヲ問フ

第十二 奇數一箇ニ起リ三、五、七等ト間斷ナク連續セシ奇數ナリル項ノ總
數ヲ問フ

第十三 平差級數アリ總數九百五十箇公差三箇項數二十五ナリト云フ由
テ問フ首項幾何

第十四 田地ヲ買フ人アリ毎畝ノ價一々同シカラズ第一畝ニ三分圓之一
ヲ價ヒ第二畝ニ三分圓之二ヲ價フ逐テ此ノ如クシテ支價銀三千七百七
十五圓ニ上レリト云フ由テ問フ此人買フ所ノ田地幾何

第十五 $mx, 2mx, 3mx,$ 等ノ級數アリ第二十項及ヒ第二十項ニ至ル總數ヲ
問フ

第十六 $1+x, 1+3x, 1+5x,$ 等ノ級數アリ第十五項及ヒ第十五項ニ至ル總
數ヲ問フ

第十七 $\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \frac{n-3}{n},$ 等ノ級數 n 項ニ至ル總數ヲ問フ

第十八 $\frac{1}{a}, \frac{n-1}{a}, \frac{n-1}{a}, \frac{n-1}{a}, \frac{n-2}{a},$ 等ノ級數 n 項ニ至ル總數ヲ問フ

第十九 落跡ノ法ハ形狀ノ大小ト秤量ノ輕重トニ係ラズ眞空虛ノ中ニ於
テ第一秒時ニ十六英尺一ヲ下リ第二秒時ニ四十八英尺三ヲ下ル逐テ此
ノ如ク毎秒三十二英尺二ヲ増シテ下ルナリ是ヲ以テ幾秒間ニ墜下スル

總尺度ハ時間ノ自乘ニ從テ消長ス此証ヲ問フ

第二十 平差級數アリ第十四項ハ六十六箇第一百三十四項ハ六百六十六
箇ニシテ尾項ハ六千六百六十六箇ナリト云フ由テ問フ此項數幾何

第二十一 一箇ト二十一箇トノ間ニ平差中項數項ヲ挿入シテ總中項ノ和
ノ最大ナル兩中項ノ和ニ於ル比ヲ十一ノ四ニ於ルガ如クナサント欲ス
由テ問フ挿入スベキ各項如何

第二十二 平差級數アリ第 m 項ハ n 箇ニシテ第 n 項ハ m 箇ナリ由テ問フ
總數ヲ $\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)$ 箇トナサント欲セバ幾何項ヲ合計シテ可ナラ

ンヤ又問フ此時ノ尾項如何

第二十三 平差級數ノ第 m 項ニ至ル總數 n 箇ニシテ第 n 項ニ至ル總數 m
箇ナレバ第 $m+n$ 項ニ至ル總數ハ $-(m+n)$ ニシテ第 $m-1$ 項ニ至ル總數

ハ $(m-n)\left(1+\frac{2n}{m}\right)$ ナリ此証ヲ問フ

第二十四 多角形ノ諸内角ノ度順次ニ平差級數ヲナスモノアリ最小角ハ一百二十度ニシテ公差五度ナリト云フ由テ問フ角數如何

第二十五 一府ヨリ一使ヲ出ス此人初日一里ヲ行キ次日二里ヲ行ク逐テ此ノ如ク日ニ一里ヲ増シテ進ムナリ今此人程ヲ起スノ後六日ヲ歷テ還使ヲ出ス此人毎日十五里ヲ行クナリ由テ問フ還使發足ノ日ヨリ幾日ヲ歷テ前使ニ及ブベキヤ

第二十六 兩府相距ルコト一百零二里ナリ今此兩府ヨリ同時ニ使者ヲ出シ東使ハ西府ニ至ラントシ西使ハ東府ニ至ラントス東使ハ初日三里ヲ行キ次日五里ヲ行ク逐テ此ノ如ク日ニ二里ヲ増シテ進ム西使ハ初日四里ヲ行キ次日六里ヲ行ク逐テ此ノ如ク亦日ニ二里ヲ増シテ進ムナリ由テ問フ兩使發足ノ日ヨリ幾日ヲ歷テ途上ニ相會スルヤ

第二十七 一富人アリ米若干ヲ田シテ貧民二十一人ニ給ス乃チ令シテ曰ク每週一人ニ一斗ヲ給スベシト然ルニ每週一人ノ死亡アリシヲ以テ給

與スル日數豫算ニ越ユルヲ殆ト二倍ナシントシテ及ハザルコト一週ナリト云フ由テ問フ給與米ノ全額幾何

第三百三十七條 平差級數ノ五元 a, l, n, d, s ノ中チ三元ヲ知テ他ノ二元ヲ發見スル法

此法十種ノ變化ナシ其一種亦兩公式ヲ作ルベシ是故ニ公式二十ヲ得即チ各元皆四式ニテ顯スコトヲ得之ヲ作ルノ法前ノ兩大本式ヨリ直ニ得ルモノアリ或ハ兩大本式ヨリ變化シ得ルモノアリ左ニ此二十式ヲ掲ク但シ之ヲ求ムルノ運算ハ學者習練ノタメ躬ヲナスベシ

第一 a, d, n ヲ知テ l, s ヲ求ル式 $l = a + (n-1)d, s = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$

第二 l, d, n ヲ知テ a, s ヲ求ル式 $a = l - (n-1)d, s = \frac{1}{2}n\{2l - (n-1)d\}$

- 第三 a, n, l 知テ d, s 求ル式 $d = \frac{l-a}{n-1}, \quad s = \frac{1}{2}n(a+l).$
- 第四 d, n, s 知テ a, l 求ル式 $a = \frac{2s-n(n-1)d}{2n}, \quad l = \frac{2s+n(n-1)d}{2n}.$
- 第五 a, n, s 知テ d, l 求ル式 $d = \frac{2(s-an)}{n(n-1)}, \quad l = \frac{2s}{n} - a.$
- 第六 l, n, s 知テ d, a 求ル式 $d = \frac{2(l(n-s))}{n(n-1)}, \quad a = \frac{2s}{n} - l.$
- 第七 a, d, l 知テ n, s 求ル式 $n = \frac{l-a}{d} + 1, \quad s = \frac{(l+a)(l-a+d)}{2d}.$
- 第八 a, l, s 知テ n, d 求ル式 $n = \frac{2s}{a+l}, \quad d = \frac{(l+a)(l-a)}{2s-(l+a)}.$
- 第九 a, d, s 知テ n, l 求ル式 $n = \frac{d-2a \pm \sqrt{(d-2a)^2 + 4sds}}{2d}, \quad l = a + (n-1)d.$
- 第十 l, d, s 知テ n, a 求ル式 $n = \frac{d+2l \pm \sqrt{(d+2l)^2 - 4sds}}{2d}, \quad a = l - (n-1)d.$

第三百三十八條 題辭明ニ a, l, n, d, s ノ中チ三元ノ値ヲ辨スルニアラザレハ前公式ハ用ヲナサズ故ニ若シ斯ル題ニ逢ハバ兩未知數或ハ衆未知數ヲ用ヒテ級數ノ各項ヲ顯スベシ其法ニアリ第一法ハ首項ヲ a トシ公差ヲ d トスルナリ此ニ由テ級數ノ各項 $s, s+d, s+2d, s+3d, \dots$ 等トナル然レハ此記法ニ由テ便益アルヲ稀レナリ第二法ハ項數奇數ナレハ中央ナル一項ヲ a トシ公差ヲ d トスルナリ然ルハ三項相連ナル級數ノ各項 $s+y, s, s-y$ トナリ五項相連ナル級數ノ各項 $s+2y, s-y, s, s+y, s+2y$ トナル逐テ此ノ如シ又項數偶數ナレハ中央ナル兩項ヲ $s-y, s+y$ トシ公差ヲ $2y$ トスルナリ然ルハ四項相連ナル級數ノ各項 $s-3y, s-y, s+y, s+3y$ トナル此記法ヲ用フルハ總數及ヒ兩外項ヨリ同シ次序ニ列スル兩項ノ和并差ハ皆未知數一元ヲ包容ス是レ此記法ノ便益アル所以ナリ

平差級數問題

第一 三數順次ニ平差級數ヲナスモノアリ共和十八箇ニシテ其自乘ノ和

一百五十八箇ナリト云フ由テ問フ此三數各幾何

第二 五數順次ニ平差級數ヲナスモノアリ其和六十五箇ニシテ其自乗ノ和一千零々五箇ナリト云フ由テ問フ此五數各幾何

第三 四數順次ニ平差級數ヲナスモノアリ公差四箇ニシテ其連乘積一十七萬六千九百八十五箇ナリト云フ由テ問フ此四數各幾何

第四 四數順次ニ平差級數ヲナスモノアリ其兩外項ノ和八箇ニシテ兩中項ノ相乘積一十五箇ナリト云フ由テ問フ此四數各幾何

第五 四數順次ニ平差級數ヲナスモノアリ其兩外項ノ平方ノ和六十五箇ニシテ兩中項ノ平方ノ和六十一箇ナリト云フ由テ問フ此四數各幾何

第六 四數順次ニ平差級數ヲナスモノアリ其和二十四箇ニシテ其連乘積九百四十五箇ナリト云フ由テ問フ四數各幾何

第七 三位ノ數アリ其幾何ナルヲ知ラズ唯其數字順次ニ平差級數ヲナスヲ知レリト云ヒ又此三數字ノ和ヲ以テ本數ヲ除スレバ所得ノ商二十

六箇ナリト云ヒ又本數ニ一百九十八箇ヲ加フレバ數字ノ排列轉倒スルヲ知レリト云フ由テ問フ本數幾何

第八 $(a^2 - 2ab - 1)^2, (a^2 + 1)^2, (a^2 + 2ab - 1)^2$ 上ノ三式順次ニ平差級數ヲナス此証ヲ問フ

第九 若シ a^2, b^2, c^2 ノ三數順次ニ平差級數ヲナスハ $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ ノ三式亦順次ニ平差級數ヲナス此証ヲ問フ

第十 $\frac{a}{b-c}, \frac{b}{c-a}, \frac{c}{a-b}$ 上ノ三式順次ニ平差級數ヲナスハ $\frac{a^2 + c^2 - 2b^2}{a^2 + c^2 - 2b^2} = \frac{1}{2}(a+b+c)$ トナル此作法ヲ問フ

同比級數

第三百三十九條 同比級數トハ連續スル各項皆前項ト一定數トノ乘積ニ等シキモノ是レナリ

第三百四十條 各項ニ乘シテ次項ヲ生ズベキ一定數ヲ公比ト云フ公比一箇ヨリ大ナルホハ級數發級數トナリ公比一箇ヨリ小ナルホハ級數斂級數トナル設令バ二、六、十八、五十四、一百六十二、等ノ級數ハ同比發級數ニシテ公比三ナリ又八十一、二十七、九、三、一、三分之一、九分之一、等ノ級數ハ同比斂級數ニシテ公比三分之一ナリ

第三百四十一條 首項ト公比ト項數トヲ知テ尾項ヲ發見スル法

首項ヲ a トシ公比ヲ r トシ項數ナルトシ尾項ヲ l トセバ級數ノ各項 a, ar, ar^2, ar^3, \dots 此ノ如シ此各項ナル r ノ乘指數ヲ檢スルニ何レモ前ニ列スル項數ニ等シキヲ知ル此ニ由テ $l = ar^{n-1}$ [A]ヲ作ル

第三百四十二條 首項ト公比ト項數トヲ知テ總數ヲ發見スル法

總數ヲ s トセバ $s = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n + \dots$ [1] 得今又

兩節ニ r ヲ乘シ $sr = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n + ar^{n+1} + \dots$ [2]

得此[2]式ヨリ[1]式ヲ減ゼバ $s - sr = a - ar^{n+1}$ 得然ルニ $a(1 - r^{n+1})$ ナルガ

故ニ前條[A]式ヲ視 a $s - sr = a - ar^{n+1}$ トナル此ニ由テ s ヲ求ル兩公式ヲ得即

$$s = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \quad [B] \quad s = \frac{r^n - a}{r-1} \quad [B']$$

第三百四十三條 項數無窮ナルホ首項ト公比トヲ知テ同比斂級數ノ總數

ヲ發見スル法但シ斂級數トハ列項ノ值漸々空數ニ近ヅク級數ヲ云フナリ

前條[B]式ノ分母子ノ正負ヲ變換セバ $s = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 得公比 r ノ值若シ一箇

ヨリ小ナレバ n 増加スル r^n ノ值減少スル若シ最大數トナラバ r^n ハ最小

數即チ空數トナルベシ此ニ由テ項數無窮ナレバ r^n ハ一箇ニ比テレバ殆ト

無キガ如シ故ニ之ヲ棄ル r^n ヲ得由テ同比無窮斂級數ノ總數ノ公式下ノ如

$$s = \frac{a}{1-r} \quad [C]$$

註 無窮級數ノ總數ノ公式ハ項數增加スルニ從テ總數ノ漸ク近ヅク
所ノ限界ヲ顯スナリ項數無窮ナルモ總數ハ此公式ト微少ナル差アルベ
シ故ニ代數學ニ於テ往々無窮級數ノ總數 $\frac{a}{1-r}$ ナリト云フアリト雖モ
是レ唯總數ノ漸ク近ヅカントスル限界ト云ヘル語ノ略言ト知ルベシ

第三百四十四條 已定ノ兩項間ニ同比中項若干ヲ挿入スル法

挿入スベキ項數ヲ n' トセバ級數ノ總項數ハ $m+n'$ ナリ此ニ由テ(A)式ノ

$l = a r^{m+n'+1}$ ヲ得ベシ此ニ由テ $r = \sqrt[n'+1]{\frac{l}{a}}$ (D) ヲ得故ニ此式

ヨリ公比ヲ發見スルヲ得公比已ニ發見シ得ハ所要ノ同比中項ハ容易ニ
求メ得ベシ

第三百四十五條 同比級數ノ兩項相連續スルモノハ皆同比ヲ有スルガ故

ニ各項順次ニ連比例ヲナスモノナリ(第二百八十八條ヲ視ミ)此ニ由テ左ノ
定理アリ

五

第一 三項順次ニ同比級數ヲナスハ其兩外項ノ相乘積ハ中項ノ自乘ニ
等シ

第二 四項順次ニ同比級數ヲナスハ其兩外項ノ相乘積ハ兩中項ノ相乘
積ニ等シ

同比級數公式用法

第三百四十六條 兩公式 $l = ar^{n-1}$ $\frac{l}{a} = r^{n-1}$ ノ中ニ a, l, n ノ五元ヲ

包容スルガ故ニ此中三元ヲ知ラバ他ノ二元ヲ推算スベキ理アリ其故何ト
ナレハ此兩式中ナル已知元ニ其值ヲ配スルモ未知數二元ヲ包容スル兩方
程式ヲ得ルガ故ナリ然レモ平差級數ノ如ク一般ニ常法ヲ以テ解スベキ題
ニアラズ其例ニアリ第一例ハ n ヲ求ルノ法ナリ n ハ乘指數トナツテ兩公
式ニ關係スルヲ以テ之ガ值ヲ發見セント欲スト雖モ通常ノ方程式解法ヲ
以テ算スベカラズ此算法對數ノ理ニ係ル由テ後ヲ適宜ノ條ニ待テ更ニ論

デントス第二例ハ公比 q ヲ求ルノ法ナリ公比 q ハ兩公式ニ於テ皆乘指數ヲ帶テ由テ之ガ値ヲ發見セント欲セバ $s_1 = 1$ 乗方或ハ q 乗方ニ開テ必法ヲ要ス若シ大數ナラザルキハ考察シテ容易ニ q ノ値ヲ發見シ得ベキコトアリト雖モ公法ニアラズ然レモ首項 a ト尾項 l ト總數 s トハ平差級數ノ如ク一次方程式ニテ其值ヲ發見スルヲ得ベシ

例一 同比級數ノ首項三箇ニシテ公比二ナレバ第十二項及ヒ第十二項ニ至ル總數幾何

運算 $a=3, q=2, n=12$. トセ q [A] 兩公式ヨリ

$$l=3 \times 2^{11} = 3 \times 2048 = 6144, s = \frac{3(2^{12}-1)}{2-1} = 3 \times 4095 = 12285 \quad \text{ヲ得}$$

答 第十二項六千一百四十四箇
總數一萬二千二百八十五箇

例二 同比級數六項ノ總數一千八百二十箇ニシテ公比三ナレバ此級數ノ兩外項各如何

運算 $s=1820, n=6, q=3$ トセ q [B] 式ヨリ $1820 = \frac{a(3^6-1)}{3-1} = 364a$ ヲ得

得故 $a=5$ ナリ又 [A] 式ヨリ $l=5 \times 3^5 = 1215$ ヲ得

答 五箇 一千二百十五箇

例三 六箇ト四百八十六箇トノ間ニ同比中項三項ヲ插入セント欲ス由テ問フ所得ノ級數ノ各項如何

運算 [D] 式ヨリ $r = \sqrt[4]{\frac{486}{6}} = \sqrt[4]{81} = 3$ ヲ得

答 六箇 十八箇 五十四箇 一百六十二箇
四百八十六箇

例四 六箇二箇三分箇之二九分箇之二等ノ無窮級數アリ此總數ヲ問フ

運算 $a=6, r=\frac{1}{3}$ トセ r [C] 式ヨリ $s = \frac{6}{1-\frac{1}{3}} = 9$ ヲ得

答 九箇

例五 循環小數四分五厘四毫五絲四忽五微等アリ此値ヲ問フ

運算 循環小數ヲ $\frac{45}{100} + \frac{45}{10000} + \frac{45}{1000000} + \dots$ ト記スルヲ得

總テ此種ノ題ニテハ循環スル一節ヲ同比級數ノ首項トナスヲ得而シテ公比ハ十分之一或ハ十分之一ノ幾乗幂ナリ此題ニテハ

$$a = \frac{45}{100}, r = \frac{1}{100} \text{ ナリ故ニ } s = \frac{45}{100} \div \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{45}{100} \times \frac{100}{99} = \frac{5}{11} \text{ ヲ得}$$

答 十一分之五

例六

$\frac{1}{a} + \frac{a^2}{a^2} + \frac{a^3}{a^3} + \dots$ 上ノ無窮級數ノ値ヲ問フ但シ $\frac{x}{a}$ ハ一箇ヨリ

小ナリト知ルベシ

運算 $a=1, r=\frac{a}{a}$ トセバ $s = \frac{1}{1+\frac{a}{a}} = \frac{a}{a+a}$ ヲ得

答 $\frac{a}{a+a}$

第三百四十七條

$a, (a+b)r, (a+2b)r^2, (a+3b)r^3, \dots$ 等ノ級數 n 項ノ總數ヲ求ル

法

總數ヲ s トセバ

$$s = a + \{a+b\}r + \{a+2b\}r^2 + \dots + \{a+(n-1)b\}r^{n-1} \dots [I] \text{ ヲ得之ニ } r \text{ ヲ乘ゼバ}$$

$$rs = ar + \{a+b\}r^2 + \dots + \{a+(n-2)b\}r^{n-1} + \{a+(n-1)b\}r^n \dots [II] \text{ ヲ得}$$

今 [I] 式ヨリ [II] 式ヲ減ゼバ

$$s(1-r) = a + br + br^2 + \dots + br^{n-1} - \{a+(n-1)b\}r^n$$

$$= a + \frac{br(1-r^{n-1})}{1-r} - \{a+(n-1)b\}r^n \text{ ヲ得是故ニ總數ノ公式左ノ如シ}$$

$$s = \frac{a - \{a+(n-1)b\}r^n}{1-r} + \frac{br(1-r^{n-1})}{(1-r)^2} \quad [E]$$

同比級數公式應用問題

第一 一、二、四、八、等ノ級數九項ノ總數ヲ問フ

第二 二、六、十八、五十四、等ノ級數ノ第八項ヲ問フ

- 第三 一、三分之二、九分之四、二十七分之八、等ノ級數十項ノ總數ヲ問フ
- 第四 二十四ト一百九十二トノ間ニ同比中項二項ヲ挿入セント欲ス由テ問フ兩中項各幾何
- 第五 三ト七百六十八トノ間ニ同比中項七項ヲ挿入セント欲ス由テ七中項各幾何
- 第六 無窮級數 $1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \dots$ ノ總數ヲ問フ
- 第七 無窮級數 $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{9}{25} + \dots$ ノ總數ヲ問フ
- 第八 無窮級數 $\frac{1}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{27} + \dots$ ノ總數ヲ問フ
- 第九 循環小數 $0.33332. \dots$ ノ值ヲ問フ
- 第十 循環小數 $0.12121. \dots$ ノ值ヲ問フ
- 第十一 無窮級數 $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \dots$ ノ總數ヲ問フ

- 第十二 無窮級數 $\frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{125} - \frac{1}{625} + \dots$ ノ總數ヲ問フ
- 第十三 無窮級數 $1 + \frac{2}{a} + \frac{2^2}{a^2} + \frac{2^3}{a^3} + \dots$ ノ總數ヲ問フ
- 第十四 無窮級數 $\frac{1}{a} - \frac{2^2}{a^2} + \frac{2^4}{a^4} - \frac{2^6}{a^6} + \dots$ ノ總數ヲ問フ
- 第十五 無窮級數 $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ ノ總數ヲ問フ
- 第十六 無窮級數 $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \dots$ ノ總數ヲ問フ
- 第十七 $a^2 + a^{2+q} + a^{2+2q} + \dots$ 上ノ級數 n 項ノ總數ヲ問フ
- 第十八 $1 + 3 + 7 + 15 + 31 + \dots$ 上ノ級數 n 項ノ總數ヲ問フ
- 第十九 同比級數八項ノ總數一千七百八十五箇ニシテ公比三ナリト云フ由テ問フ此首項如何
- 第三十 同比級數六項ノ總數七千八百十二箇ニシテ公比五ナリト云フ由テ問フ此尾項如何

第三十一 同比級數ノ首項五箇第六項一千二百十五箇ナリト云フ由テ問
ラ公比如何

第二十二 無窮級數 $1, r, r^2, r^3, \dots$ 等ノ總數ヲ P トシ又他ノ無窮級數 $1, r^2, r^4, \dots$ 等ノ總數ヲ Q トセバ $P^2(Q-1) = Q^2(P-1)$ ヲ得此作法ヲ問フ

第二十三 兩外項 a, c トシ此中間ニ同比中項 n 項ヲ挿入セバ其諸中項
ノ連乘積ハ $(ac)^{\frac{n+1}{2}}$ ニ等シ此証ヲ問フ

第二十四 $s + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$ 上ノ級數 n 項ノ總數ヲ問フ

第二十五 銀行アリ本錢 P 圓ヲ放出シ n 年ニ分テ本利ヲ收回セント欲ス
年息法本錢一百ニ利子 r トシ每年利子ヲ算シテ本錢ニ添入スルヲ法ト
ス由テ問フ年々幾何ヲ收回セバ可ナランヤ

第三百四十八條 同比級數ノ各項ハ通例 x, xy, xy^2, xy^3, \dots 等ト記ス然レモ問題ノ
解法ニ於テハ此法便ナラズ故ニ項數若シ奇數ナレバ各項ヲ x^2, xy, y^2 或ハ
 $\frac{x^3}{y}, \frac{xy^2}{x}, \frac{y^3}{x^2}$ ト記シ項數若シ偶數ナレバ各項ヲ $\frac{x^2}{y}, x, y, \frac{y^2}{x}$ 或ハ $\frac{x^3}{y^2}, \frac{xy}{x^2}, \frac{y^3}{x}$
 $\frac{x^2}{y}, x, y, \frac{y^2}{x^2}$ ト記スルヲ便トス又三項ノ同比級數ニテハ x, \sqrt{xy}, y 以
テ各項ニ命スルヲ便トス

同比級數問題

第一 三數順次ニ同比級數ヲナスモノアリ其和二十六箇ニシテ其自乗ノ
和三百六十四箇ナリト云フ由テ問フ三數各幾何

解法 所要ノ三數ヲ a, \sqrt{xy}, y ト命スレバ題意ニ依テ

$a + \sqrt{xy} + y = 26 = a \dots [1]$ $a^2 + xy + y^2 = 364 = b \dots [2]$ ヲ得[一]式ノ前節

ナル根數式ヲ後節ニ轉シテ兩節ヲ自乗セバ

$a^2 + xy + y^2 = a^2 - 2a\sqrt{xy} + 2a\sqrt{xy} + y^2 = 364 = b \dots [3]$ 兩式ノ後節ヲ探テ方程式

$a^2 - 2a\sqrt{xy} = b \dots [4]$ ヲ作ルイテ得此ニ由テ

$$\sqrt{xy} = \frac{a^2 - b}{2a} = 6. \quad \text{ヲ得之ヲ以テ} \quad [一] \text{兩式ナル } xy \text{ヲ變換セバ}$$

$$a=2, y=18 \quad \text{ヲ得故ニ所要ノ三數左ノ如シ}$$

答 二箇 六箇 十八箇

第二 四數順次ニ同比級數ヲナスモノアリ其和十五箇ニシテ其自乗ノ和八十五箇ナリト云フ由テ問フ四數各幾何

解法 所要ノ四數ヲ x^2, y, y^2, x ト命ズレバ題意ニ由テ

$$\frac{x^2}{y} + x + y + \frac{y^2}{x} = 15 = a \dots [一] \quad \frac{x^4}{y^2} + x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 55 = b \dots [二] \quad \text{ヲ得今 } x + y = s,$$

$$xy = p \quad \text{トセバ第二百六十五條ニ由テ } x^2 + y^2 = s^2 - 2p, x^4 + y^4 = s^4 - 3sp \quad \text{ヲ得之ヲ以テ前ノ} [一] [二] \text{兩式ヲ變換セバ}$$

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = a - s \dots [三] \quad \frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{x^2} = b - s^2 + 2p \dots [四] \quad \text{トナル此} [三] \text{式ノ兩節ヲ自}$$

$$\text{乗シテ前節ナル } 2xy \text{ヲ後節ニ轉スレバ } \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} = (a-s)^2 - 2p \dots [五] \quad \text{ヲ得}$$

[四][五]兩式ノ後節ヲ探テ $(a-s)^2 - 2p = b - s^2 + 2p$ ヲ作リ之ヲ變換セバ

$$a^2 - 2as + 2s^2 - 4p = b \dots [六] \quad \text{ヲ得又} [三] \text{式ノ分母ヲ消去シテ後節ナル } xy$$

$$\text{ヲ } p = \text{代フレバ } x^2 + y^2 = ap - ps \quad \text{即チ } s^2 - 3sp = ap - ps \quad \text{ヲ得此ニ由}$$

$$\text{テ } p = \frac{s^2}{a+2s} \dots [七] \quad \text{ヲ得之ヲ以テ} [六] \text{式ノ } p = \text{代ヘ然ル後ヲ分母ヲ去}$$

$$\text{ラハ } a^2 - 2as^2 = ab + 2bs \quad \text{即チ } as^2 + bs = \frac{a}{2}(a^2 - b) \quad \text{ヲ得此式中 } a, b = \text{數値}$$

$$\text{ヲ配スレバ } 15s^2 + 85s = 70 \times 15 \quad \text{ヲ得此ニ由テ } s = 6 \quad \text{ヲ得又} [七] \text{式ナル}$$

$$a, s = \text{數値ヲ配スレバ } p = 8 \quad \text{ヲ得是故ニ } x + y = 6, xy = 8 \quad \text{ナリ此ニ由}$$

$$\text{テ此兩式ヲ連合セバ } x = 2, y = 4 \quad \text{ヲ得故ニ所要ノ四數左ノ如シ}$$

答 一箇 二箇 四箇 八箇

第三 三數順次ニ同比級數ヲナスモノアリ其和二十一箇ニシテ其平方ノ和一百八十九箇ナリト云フ由テ問フ三數各幾何

第四 原數二百十箇ヲ分テ同比級數ヲナス所ノ三分トナシ首尾兩分ノ差

第九十箇トナサント欲ス由テ問フ三分各幾何

第五 四數順次ニ同比級數ヲナスモノアリ其和三十箇ニシテ兩中項ノ和ヲ以テ尾項ヲ除スレバ所得ノ商一箇三分之一トナルト云フ由テ問フ四數各幾何

第六 四數順次ニ同比級數ヲナスモノアリ奇次ノ兩項ノ和一百四十八箇ニシテ偶次ノ兩項ノ和八百八十八箇ナリト云フ由テ問フ四數各幾何

第七 三數順次ニ同比級數ヲナスモノアリ其和一十四箇ニシテ其自乗ノ和八十四箇ナリト云フ由テ問フ三數各幾何

第八 四數順次ニ同比級數ヲナスモノアリ第二項ハ第四項ヨリ二十四箇少ナク兩外項ノ和ノ兩中項ノ和ニ於ル比七ノ三ニ於ルガ如シト云フ由テ問フ四數各幾何

第九 三數順次ニ同比級數ヲナスモノアリ其第一第二兩項ノ和二十箇ニシテ第二第三兩項ノ差三十箇ナリト云フ由テ問フ三數各幾何

第十 三數順次ニ同比級數ヲナスモノアリ其連乘積二百十六箇ニシテ兩

外項ノ自乗ノ和三百二十八箇ナリト云フ由テ問フ三數各幾何

第十一 三數順次ニ同比級數ヲナスモノアリ其和一十三箇ニシテ兩外項ノ和ト中項トノ相乘積三十箇ナリト云フ由テ問フ三數各幾何

第十二 三數順次ニ同比級數ヲナスモノアリ其連乘積六十四箇ニシテ其立方ノ和五百八十四箇ナリト云フ由テ問フ三數各幾何

第十三 三數順次ニ同比級數ヲナスモノアリ其連乘積一箇ニシテ第一第二兩項ノ差ノ第二第三兩項ノ差ニ於ル比ハ五ノ一ニ於ルガ如シト云フ由テ問フ三數各幾何

第十四 賞金一百二十圓ヲ分テ四士ニ交付セントス各士ノ所得順次ニ平差級數ヲナスヲ法トス然レモ若シ第二第三ノ所得各十二圓ヲ減シ第四ノ所得ヲ二十四圓増サハ四士ノ所得順次ニ同比級數ヲナスト云フ由テ問フ四士ノ所得各幾何

第十五 三數順次ニ同比級數ヲナスモノアリ其和三十一箇ニシテ兩外項

ノ和二十六箇ナリト云フ由テ問フ三數各幾何

第十六 六數順次ニ同比級數ヲナスモノアリ其和一百八十九箇ニシテ第

二項ト第五項トノ和五十四箇ナリト云フ由テ問フ六數各幾何

第十七 六數順次ニ同比級數ヲナスモノアリ其和一百八十九箇ニシテ中

央ナル兩項ノ和三十六箇ナリト云フ由テ問フ六數各幾何

第十八 四數 a, b, c, d 若シ順次ニ同比級數ヲナスハ左ノ式ヲ得此作法

ヲ問フ $(a^2+b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$

第十九 四數 a, b, c, d 若シ順次ニ同比級數ヲナスハ左ノ式ヲ得此作法

ヲ問フ $(a-d)^2=(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2$

第二十 三數 a, b, c 若シ順次ニ同比級數ヲナスハ左ノ式ヲ得此証如何

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=a^2+b^2+c^2$$

諧音級數

第三百四十九條 三數 a, b, c 若シ克シ $a:c::a-b:b-o$ 此ノ如キ理ニ合

フキハ此三數諧音級數ヲナスト云フ

衆多ノ數ニテモ連續スル三數皆克ク此理ニ合フハ諧音級數ト云フ

第三百五十條 諧音級數ノ各項ノ倒數ハ平差級數ヲナス

論 諧音級數ヲナス三數 a, b, c トセハ前條ノ釋義ニ由テ $a:c::a-b:b-o$

ナリ故ニ $a(b-o)=(a-b)c$ 卽チ $ab-ac=ac-bc$ ヲ得此方程式ノ兩節ヲ

$$abc \text{ ニテ除スルハ } \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \text{ ヲ得是故ニ第一第二兩項ノ倒數ノ差ハ}$$

第二第三兩項ノ倒數ノ差ニ等シ

備考 諧音ノ名稱アル所以ハ此級數ノ情性克ク樂ニ諧フガ故ナリ若シ

同質ナル六絃ノ尺度ヲ二、二分之一、三分之一、四分之一、五分之一、六分之一

トナシ此中兩絃ヲ同時ニ彈スルハ皆諧音ヲ發ス

第三百五十一條 前條ニ証明セシ諧音級數ノ情性ニ據テ諧音級數ノ問題ヲ解スルコヲ得設令ハ兩外項三分之二ト十五分之八トノ間ニ諧音中項五項ヲ插入セシコヲ要ストセバ第三百三十五條(C)式ニ據テ

$$d = \frac{\frac{15}{3} - \frac{2}{3}}{3+1} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{16} \quad \text{ナ得是故ニ平差級數ノ各項} \quad \frac{3}{2}, \frac{25}{16}, \frac{26}{16}, \frac{27}{16}, \frac{28}{16}, \frac{29}{16}, \frac{15}{8}$$

此ノ如シ故ニ諧音級數ノ各項 $\frac{2}{3}, \frac{16}{25}, \frac{16}{26}, \frac{16}{27}, \frac{16}{28}, \frac{16}{29}, \frac{8}{15}$ ナリ

第三百五十二條 兩數ヲ a, c トシ此兩數ノ平差中項ヲ A トシ同比中項ヲ

G トシ諧音中項ヲ H トセバ $A - a = c - A$ ナリ故ニ $A = \frac{1}{2}(a+c)$ ナリ又

$$a : G :: G : c \quad \text{ナリ故ニ} \quad G = \sqrt{ac} \quad \text{ナリ又} \quad a : c :: c : a - H : H - c \quad \text{ナリ故ニ} \quad H = \frac{2ac}{a+c}$$

ナリ

諧音級數問題

第一 諧音級數ノ三項六箇三箇二箇ナレバ次ノ三項如何

六

第二 諧音級數ノ三項八箇二箇一箇七分之一ナレバ次ノ三項如何

第三 四箇ト二箇トノ間ニ諧音中項二項ヲ插入セント欲ス由テ問フ兩中項各幾何

第四 三分箇之一ト二十一分箇之一トノ間ニ諧音中項三項ヲ插入セント欲ス由テ問フ三中項各幾何

第五 兩數アリ各幾何ナルヲ知ラズ唯此兩數ノ平差中項ハ九箇ニシテ諧音中項ハ八箇ナルヲ知レリト云フ由テ問フ兩數各幾何

第六 兩數アリ各幾何ナルヲ知ラズ唯此兩數ノ同比中項ハ四十八箇ニシテ諧音中項ハ四十六箇二十五分之二ナルヲ知レリト云フ由テ問フ兩數各幾何

第七 兩數アリ各幾何ナルヲ知ラズ唯此兩數ノ平差中項ト同比中項ト諧音中項トノ三數ヲ合スルハ九箇五分之二ナルヲ知レリト云ヒ又此三中項ノ連乘積ハ二十七箇ナルヲ知レリト云フ由テ問フ兩數各幾何

第八

兩數アリ各幾何ナルヲ知ラズ唯此兩數ノ平差中項ト諧音中項トノ相乘積ハ二十七箇ニシテ平差中項ハ諧音中項ヨリ一箇二分之二大ナルヲ知レリト云フ由テ問フ兩數各幾何

第九 諧音級數アリ其第 p 項ハ P 箇ニシテ第 q 項ハ Q 箇ナリト云フ由テ問フ此級數ノ第 n 項ヲ問フ

第十 三數順次ニ諧音級數ヲナスル此中項ノ半ヲ各項ヨリ減スルルハ所得ノ三餘數順次ニ同比級數ヲナスベシ此証ヲ問フ

第十一 三數 a, b, c 若シ順次ニ諧音級數ヲナスルハ左ノ比例式ヲ得ベシ此証ヲ問フ

$$a+c-2b : a-c :: c-a : a+c$$

第十二 三數順次ニ同比級數ヲナスル中項ヲ以テ各項ニ加フレバ所得ノ三總數順次ニ諧音級數ヲナス此証ヲ問フ

第十三 兩數 a, b ノ諧音中項ヲ x トセバ左ノ式ヲ得此証ヲ問フ

$$\frac{1}{a-a} + \frac{1}{a-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

第十四 三數 a, b, c 若シ順次ニ諧音級數ヲナスルハ $\frac{a}{a+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ 亦順次ニ諧音級數ヲナス此証ヲ問フ

兩同式

第三百五十三條

兩同式トハ方程式ノ兩節同シ代數式ナルニアラザレバ同式ニシテ變形ナルモノ是レナリ凡ソ此種ノ方程式ハ此節ヲ變換シテ直ニ彼節ヲ得ベク或ハ兩節サ他ノ形狀ナル同式ニ化スルヲ得ベシ設令ハ

$$ax+b=ay+b, x^2+(a-b)x-ab=(a+b)(x-b), 1-a+x^2=\frac{x^2}{1+a}-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2(1+x)}$$

此ノ如シ此第一式ハ兩節全ク同シ代數式ナリ第二式ハ後節ノ括弧ヲ解カ

ハ前節ト同式ヲ得第三式ハ兩節ヲ變化シテ $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ ナスベシ

第三百五十四條 兩同式ニ定理アリ皆後ノ級數之論及ヒ方程式之論ニ於テ必要トス故ニ此定理ヲ証明センカタノ一箇ノ變數 ax^n ナ帶ル一項式 ax^n ニ於テ $ax^n = 0$ ナルハ指數 n ノ各種ノ狀勢ニ對合スル本式ノ値ヲ示ントス

第一 n ナ正數トセハ $ax^n = 0$ ナルハ $ax^n = a \cdot 0^n = 0$ ナリ

第二 n ナ負數トセハ $ax^n = 0$ ナルハ $ax^n = \frac{a}{a^{-n}} = \frac{a}{0} = \infty$ ナリ

第三 n ナ空數トセハ $ax^n = 0$ ナルハ $ax^n = a \cdot 0^0 = a \cdot 1 = a$ ナリ

第三百五十五條 左ニ兩同式ノ四定理ヲ証明セントス

第一 兩同式ハ未知元ニ任意ナル値ヲ配スルモ兩節恒ニ適等ナリ

論 此定理ハ兩同式ノ意義ヨリ直ニ出ルナリ凡ソ一箇ノ代數式其形狀ヲ

二三ニスト雖其值變換セサルコハ代數式ノ諸法ノ意義ノ中ニ包含セリ

此ニ由テ方程式ノ兩節若シ同形ナルカ或ハ同形ニ改作スベキハ未知元ニ任意ノ數ヲ代用スルモ兩節恒ニ適等ナラザルヲ得ズ

設令ハ方程式 $\{(x-3)^2+1+(x-2)^2\}^2=2\{(x-3)^4+1+(x-2)^4\}$

ハ兩節ノ形狀同

シカラズト雖モ之ヲ解カバ兩節俱ニ $4x^4-40x^3+156x^2-280x+196$

トナ

ル故ニ兩同式ナリ今此式ニ於テ $x=1, 2, 3, 4, 5$ 等ノ諸數ヲ順次ニ配附セバ皆正シキ方程式ヲ得即チ左ノ如シ

$$x=1 \quad \text{トセバ} \quad \{4+1+1\}^2=2\{16+1+1\} \quad \text{即チ} \quad 36=2 \times 18.$$

$$x=2 \quad \text{トセバ} \quad \{1+1+0\}^2=2\{1+1+0\} \quad \text{即チ} \quad 4=2 \times 2.$$

$$x=3 \quad \text{トセバ} \quad \{0+1+1\}^2=2\{0+1+1\} \quad \text{即チ} \quad 4=2 \times 2.$$

$$x=4 \quad \text{トセバ} \quad \{1+1+4\}^2=2\{1+1+16\} \quad \text{即チ} \quad 36=2 \times 18.$$

$$x=5 \quad \text{トセバ} \quad \{4+1+9\}^2=2\{16+1+81\} \quad \text{即チ} \quad 196=2 \times 98.$$

第二 方程式ノ兩節未知元ニ任意ナル値ヲ配スルモ恒ニ適等ナルキハ是レ兩同式ナリ(第一定理ノ還源)

論 原方程式ノ分數ヲ盡ク消去シテ未知元ノ昇降ノ順ニ諸項ヲ排列セハ $Ax^4+Bx^3+Cx^2+\dots=A'x^4+B'x^3+C'x^2+\dots$ 此ノ如シ但 $\sqrt{A} \sqrt{B} \sqrt{C} \dots$

シテ $\wedge \wedge \wedge \dots$ ナリ又段數 A, B, C 等及ヒ A', B', C' 等ハ何レモ空數ニア
ラズシテ α ナ包容セザルモノナリ又列項數ノ限界ハ固ヨリ定リナシ
今 x^a ナ以テ [一] 式ノ兩節ヲ除スレハ

$$A + Bx^{b-a} + Cx^{c-a} + \dots = A'x^{a'-a} + B'x^{b'-a} + C'x^{c'-a} + \dots \quad [1] \quad \text{ナ得然ルニ } \wedge \wedge \wedge$$

等ナルヲ以テ $b-a, c-a, \dots$ 等ハ皆正數ナリ

原方程式ハ α ノ値ノ大小ニ係ラス兩節恒ニ適等ナルモノト定メタルガ故

ニ縱ヒ其形狀ヲ變換スト雖モ猶ホ此理ニ合ハザルヲ得ス由テ $\S 110$ トセバ
[二] 式ノ前節ハ首項ノ外盡シ空數トナル [第三百五十四條第一ノ理ヲ視ヨ] 由
テ $A = A'x^{a'-a} + B'x^{b'-a} + C'x^{c'-a} + \dots \quad [1] \quad \text{ナ得}$

又 a', b', c' 等ハ值順次ニ増加スルガ故ニ $a'-a, b'-a, c'-a$ 等モ順次ニ值増加セ
ザルヲ得ズ由テ首項ノ指數 $\alpha'-\alpha$ ハ [三] 式中ノ最小指數ナルベシ而シテ此
指數ノ值空數ナリ左ニ此証ヲ論スベシ

第一 指數 $\alpha'-\alpha$ ハ正數ニアラズ其故何トナレバ若シ之ヲ正數トセバ $\S 110$

ナルガ故ニ α ナ帶ブル諸項皆空數トナル [第三百五十四條第一ノ理ヲ視ヨ]
由テ $A = 0$ ナ得故ニ初ノ憶定ニ背クガ故ナリ

第二 指數 $\alpha'-\alpha$ ハ負數ニアラズ其故何トナレバ若シ之ヲ負數トセバ

$\S 110$ ナルガ故ニ α ナ帶ブル諸項皆無限大トナル [第三百五十四條第二ノ
理ヲ視ヨ] 由テ $A = \infty$ ナ得故ニ亦初ノ憶定ニ背クガ故ナリ

註 後節ナル諸項盡ク正數ナレバ右ノ理實ニ明ナリ若シ列項中正負錯
雜スルハ後節ノ形狀 $\S 118$ 此ノ如シ然レハ是レ亦有限ノ數ニアラズ
其故何トナレシ $Ax^{a'-a} + Bx^{b'-a} + Cx^{c'-a} + \dots = x^{a'-a}(A + Bx^{b'-a'} + Cx^{c'-a'} + \dots)$
ナルガ故ナリ

是故ニ $\alpha'-\alpha$ ハ正數ニアラズ又負數ニアラズ由テ空數ナラサルヲ得ズ故
ニ $\alpha'-\alpha = 0, \alpha'-\alpha = \alpha$ ナリ然ルニ [三] 式中他ノ指數 $b'-a, c'-a$ 等ハ皆空數ヨリ大
ナルガ故ニ正數ナリ由テ [三] 式ノ後節ハ $\S 110$ ナルキ首項ノ外皆空數トナル
[第三百五十四條第一ノ理ヲ視ヨ] 故ニ $A = A'x^{a'-a} = A'$ ナ得 [第三百五十四條第三

ノ理ヲ視ヨ[然ルニ $A \neq A'$ トハ何レモ α ヲ包容セザルガ故ニ α ノ値ノ變化ニ從テ借ニ變化スルモノニアラス由テ恒ニ $Ax^a = A'x^a + Bx^b + Cx^c + \dots$ 式ヨリ此兩項ヲ去ルヲ得ヘシ然ルモハ所得ノ式 $Bx^b + Cx^c + \dots = B'x^b + C'x^c + \dots$ 此ノ如シ是ヨリ又前同法ニテ $b = b', c = c',$ 等及 $B = B', C = C',$ 等ヲ發見スルヲ得是故ニ[一]式ハ兩節全ク同形ニシテ兩同式ナリ由テ原方程式亦兩同式ナルヲ明ナリ

縱ヒ a, b, c 等ノ指數中一二或ハ負數ナルモノアリト雖モ又空數ナルモノアリト雖モ前論猶ホ用フベキヲ明ナリ但シ空指數アラハ兩節必ズ未知數ヲ帶ビサル項ヲ具有ス

第三 方程式ノ兩節未知元ニ任意ナル値ヲ配スルモ恒ニ適等ニシテ且ツ未知元ノ同幕ヲ具有セバ未知元ノ同幕ノ段數交互ニ相等シ

論 方程式ヲ $Ax^a + Bx^b + Cx^c + \dots = A'x^a + B'x^b + C'x^c + \dots$ ト定ム但シ列項數ノ限界定リナシトス方程式ノ兩節若シ未知元ニ任意ナル値ヲ配スルモ恒

ニ適等ナレバ前論ニ據テ α ノ指數交互ニ等シク段數亦等シキヲ知ル故ニ $A = A', B = B', C = C',$ 等ナリ

凡ソ此種ノ方程式ハ縱ヒ A, B, C 等ノ段數一々 A', B', C' 等ノ段數ト同形ナラサルモ是レ一種ノ兩同式ナリ

第四 方程式ノ後節空數ニシテ未知元ニ任意ナル値ヲ配スルモ兩節恒ニ適等ナレバ未知元ノ不同幕ノ段數皆空數ナリ

論 未知元ノ昇冪ノ順ニ諸項ヲ排列シタル方程式ヲ

$Ax^a + Bx^b + Cx^c + Dx^d + \dots = 0$ トス但シ A, B, C 等ハ皆 α ヲ包容セザルモ

ノトス故ニ α ノ値ノ變化ニ從テ借ニ變化スルモノニアラス
今 α ヲ以テ[一]式ノ各項ヲ除スレバ

$A + Bx^{b-a} + Cx^{c-a} + Dx^{d-a} + \dots = 0$ [二] ヲ得此式ニ於テ $b-a, c-a, d-a,$ 等ハ皆正數ナルガ故ニ $\alpha = 0$ トセバ[二]首項ノ外都テ空數トナル[第三百五十四條第一ノ理ヲ視ヨ]由テ $A = 0$ ヲ得故ニ[一]式ヨリ Ax^a ヲ去リ然ル後ヲ各項ヲ

をニテ除スレバ

$$B + Cx^{n-1} + Dx^{n-2} + \dots + 0 \quad (11) \quad \text{ヲ得此式ニ於テ } x=0 \text{ トセバ } B=0 \text{ ヲ得逐テ}$$

此ノ如ク同法ヲ以テ他ノ諸段數皆空數ナルヲ証明スルヲ得ベシ但シ
 爰ニ謂フ所ノ諸段數 A B C 等ハ皆何レモ一箇ノ多項式ニシテ列項中正負
 兩種ノ數ノ關係スルアリテ空數トナルモノト知ルベシ

常分數分解法

第三百五十六條 一箇ノ分數式ヲ分解シテ幾箇ノ簡分數トナスヲ得ル

モノアリ設令ハ分數式 $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ ハ兩分數式ノ和トナスヲ得即チ

$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$ 此ノ如シ此ノ如ク分解シテ得ル所ノ各分數式ヲ偏分數ト

名ヅク總テ分母一次式乘子ノ連乘積ニシテ分子ノ次數分母ヨリ低キモノハ
 總箇ノ偏分數ニ分解スルヲ得設令ハ分數式ヲ $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ トセハ偏

分數 $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$ 合計スレバ但シ A B C ハモテ包含セザル未知數

ナキ故ニ A B C ノ値ハモテ未知數ニ變化スルモノニアラス而

シテ方程式 $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$ ヲ兩同式トナスベキ A B

C ノ値ヲ發見セんとス今此式ノ兩箇 $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$ ヲ乘スレバ

$$px^2+qx+r = A(x-b)(x-c) + B(x-a)(x-c) + C(x-a)(x-b)$$

$$= A(x^2 - (b+c)x + bc) + B(x^2 - (a+c)x + ac) + C(x^2 - (a+b)x + ab)$$

此式ヲ兩同式トナシ之ヲ欲セバ

$$px^2+qx+r = Ax^2 + Bx^2 + Cx^2 + (-A(b+c) - B(a+c) - C(a+b))x + A(bc) + B(ac) + C(ab)$$

關係ヲ必要トス故ニ此三式皆獨立ニシテ併立スベキハ A B C ノ值皆發

見スルヲ得ベシ

常分數分解法問題

第一 $\frac{x^2-1}{x^2+2x+3}$ 上ノ分數式ヲ偏分數ニ分解セバ如何

運算

$$\frac{x-31}{x^2-7x+10} = \frac{Sr-31}{(x-5)(x-2)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-2}$$

トシ此式ノ分母ヲ去

ラ、 $(x-31)=A(x-2)+B(x-5)=(A+B)x-(2A+5B)$ ナ得是故ニ

$A+B=5$, $2A+5B=31$ ナ得故ニ此兩式ヨリ $A=3$, $B=5$ ナ得此ニ由

$$\frac{3}{x-5} + \frac{5}{x-2} \quad \text{ヲ以テ問ニ答フ}$$

第二 $\frac{7x-24}{x^2-9x+14}$ 上ノ分數式ヲ幾箇ノ偏分數ニ分解セハ如何

第三 $\frac{20x+2}{2x^2+3x-20}$ 上ノ分數式ヲ幾箇ノ偏分數ニ分解セハ如何

第四 $\frac{6x^2-22x+18}{(x-1)(x^2-5x+6)}$ 上ノ分數式ヲ幾箇ノ偏分數ニ分解セハ如何

第五 $\frac{x+2}{x^3-x}$ 上ノ分數式ヲ幾箇ノ偏分數ニ分解セハ如何

第六 $\frac{10}{x^4-13x^2+36}$ 上ノ分數式ヲ幾箇ノ偏分數ニ分解セハ如何

第七 $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$ 上ノ分數式ヲ幾箇ノ偏分數ニ分解セハ如何

第八 $\frac{x}{(1+x)(1+ax)} + \frac{ax}{(1+ax)(1+a^2x)} + \frac{a^2x}{(1+a^2x)(1+a^3x)} + \dots$ 上ノ級數

n 項ニ至ル總數ヲ問フ

第九 $\frac{ax(1-ax)}{(1+x)(1+ax)(1+a^2x)} + \frac{ax(1-a^2x)}{(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)} + \dots$ 上ノ級數 n 項ニ

至ル總數ヲ問フ

餘數式定理

第三百五十七條 第八十二條ニ於テ m 若シ正ノ整數ナレバ $x-y$ ナ以テ

x^m-y^m ヲ約スベキヲ証明セリ而シテ除商ノ形狀ハ

$\frac{x^m-y^m}{x-y} = x^{m-1} + x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 + x^{m-4}y^3 + \dots + y^{m-1}$ 此ノ如クニシテ列項ノ

數ハ m 等シ今此式ニ於テ $z \parallel y$ トセバ各項皆 z トナルガ故ニ

$$\left(\frac{z^m - y^m}{z - y} \right)_{y=z} = mx^{m-1} \dots [A] \text{ヲ得但シ前節ノ右傍ノ下ニ配附セシ方程式 } z \parallel y$$

ハ [A] 式ノ兩節ヲ適等ナラシムルニ必要ナル狀勢ヲ顯スナリ

第三百五十八條 前條ニ示セシ [A] 式ハ m ノ値ノ整分正負ニ係ラズ恒ニ合理ナルヲ証明セントス

第一 m ノ値正ノ分數ナルキヲ論ズ

今 $\frac{m}{s} \parallel z$ トセバ $z^m - y^m \parallel z^s - y^s$ トナル但シ s ハ何レモ正ノ整數ヲ顯スナリ

又 $z^s \parallel z$ トセバ $z^s \parallel z^r$ ニシテ $z \parallel z^s$ ナリ又 $y^s \parallel y$ トセバ $y^s \parallel y^r$ ニシテ $y \parallel y^s$ ナリ

此ニ由テ $\frac{z^r - y^r}{z - y} \parallel \frac{z^r - y^r}{z^s - y^s} \parallel \frac{z^r - y^r}{z - y} \parallel \frac{z^r - y^r}{z - y}$ [1]ヲ得茲ニ於テ $z \parallel y$ トセバ $z \parallel z$ トナル而シテ r トハ何レモ正ノ整數ナルガ故ニ [1] 式ヨリ

$$\left\{ \frac{z^r - y^r}{z - y} \right\} = \left(\frac{z^r - y^r}{z - y} \right)_{y=z} = \frac{r z^{r-1}}{s z^{s-1}} = \frac{r}{s} z^{r-s} \parallel z^{r-1} \text{ ヲ得此ニ由テ指數設令ヒ分}$$

數ナルモ [A] 式尙ホ合理ナルヲ証明ス

第二 m ノ値負數ナルキヲ論ズ

若シ xy ノ指數ナ $-m$ トセバ $z^{-m} - y^{-m} \parallel z^{-m} - y^{-m} (z^m - y^m)$ ナリ故ニ由テ

$$\frac{z^{-m} - y^{-m}}{z - y} \parallel \frac{z^{-m} - y^{-m}}{z - y} \left(\frac{z^m - y^m}{z - y} \right) \quad [1] \text{ヲ得今 } z \parallel y \text{ ナリトセバ } m \text{ ノ値ノ整分ニ係ラズ}$$

前ニ論スル所ノ理ニ由テ $z^{-m} - y^{-m} \parallel z^{-m} - y^{-m} \frac{z^m - y^m}{z - y} \parallel m z^{m-1}$ ヲ得此ニ由テ

$$\left(\frac{z^{-m} - y^{-m}}{z - y} \right)_{y=z} = (-x^{-sm}) \times mx^{m-1} = -mx^{m-1} \text{ ナリ是故ニ [A] 式ノ公式ナルヲ証明セリ}$$

二項法(即合名法)

第三百五十九條 二項法トハ二項式ノ幂數ノ詳式ヲ求メ又二項式ノ根數ヲ級數ニ改作スルノ法ナリ此法ヲ代數式ニテ顯シタルモノヲ二項法公式ト云フ

第三百六十條 $(z+s)^n$ 上式ヲ級數ニ詳開スルノ法但シ指數 n ハ任意ナル實數トス即チ正數ナルニアリ負數ナルニアリ整數ナルニアリ分數ナルニアリトス

$(z+s)^n = \left(1 + \frac{s}{z}\right)^n$ ナルガ故ニ $(z+s)^n = z^n \left(1 + \frac{s}{z}\right)^n$ ナリ此ニ由テ先ツ $\left(1 + \frac{s}{z}\right)^n$ ヲ級數ニ詳開シ然ル後チ所得ノ級數ニ z^n ヲ乘ズレバ $(z+s)^n$ ノ詳式ヲ得ベシ今 $z = \frac{1}{a}$ トセバ $\left(1 + \frac{s}{a}\right)^n = \left(1 + \frac{s}{z}\right)^n$ トナル又

$(1+z)^n = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \dots$ [I] ト命ズ但シ $A B C D$ 等ハ皆 z ヲ包含セザル數トス茲ニ於テ z ノ値ノ大小ニ係ラズ [I] 式ノ兩節ヲ恒ニ適等ナラシムベキ諸段數ノ值ヲ發見セントス

七

若シ $z=0$ トセバ [I] 式ヨリ $A=1$ ヲ得故ニ所設ノ詳式 z ノ値ニ係ラズ恒ニ $(1+z)^n = 1 + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \dots$ [I] トナル今又 $z = \frac{1}{u}$ トセバ

$(1+\frac{1}{u})^n = 1 + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4 + \dots$ [II] ヲ得此 [I] 式ヲ [II] 式ヨリ減シ所得ノ

餘數式ヲ $z-u$ ニテ除スベシ

$$\frac{(1+z)^n - (1+\frac{1}{u})^n}{z-u} = B + C\left(\frac{z^2-u^2}{z-u}\right) + D\left(\frac{z^3-u^3}{z-u}\right) + E\left(\frac{z^4-u^4}{z-u}\right) + \dots$$
 [III] ヲ得今又

$$P=1+z, Q=1+\frac{1}{u} \text{ トセバ } P-Q=z-u \text{ トナル故ニ [IV] 式ヨリ}$$

$$\frac{P^n - Q^n}{P-Q} = B + C\left(\frac{z^2-u^2}{z-u}\right) + D\left(\frac{z^3-u^3}{z-u}\right) + E\left(\frac{z^4-u^4}{z-u}\right) + \dots$$
 [IV] ヲ得又 $z = \frac{1}{u}$ トセバ $P=Q$

トナル而シテ第三百五十七條ニ示ス所ノ餘數式定理ニ依テ

$$\left(\frac{P^n - Q^n}{P-Q}\right)_{Q=P} = nP^{n-1} = n(1+z)^{n-1}, \left(\frac{z^2-u^2}{z-u}\right)_{u=z} = 2z, \left(\frac{z^3-u^3}{z-u}\right)_{u=z} = 3z^2, \left(\frac{z^4-u^4}{z-u}\right)_{u=z} = 4z^3,$$

等ヲ得之ヲ以テ [V] 式ヲ變換セバ

$$n(1+z)^{n-1} = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \dots$$
 [V] ヲ得此式ノ兩節 $1+z$ ヲ乘ズ

$$n(1+z)^n = B + 2C \left[z + 3D \right] z^2 + \dots + 4E \left[z^3 + \dots + 3D \right] + B + 2C \left[z + 3D \right] + 3D$$

乗ズレハ $n(1+z)^n = n + nBz + nCz^2 + nDz^3 + \dots$ (八) ヲ得 (七) 兩式ノ後節ヲ探
テ方程式ヲ作ラハ兩同式ヲ得ベシ其故何トナレバ z ノ値ニ係ラズ兩節恒
ニ適等ナルガ故ナリ是故ニ (七) 兩式ニ於テ z ノ同器ノ段數等シカルベシ
[第三百五十五條第三定理ヲ觀ヨ] 此ニ由テ諸段數ヲ求ルヲ左ノ如シ
 $B=n, 2C+B=nB, 3D+2C=nC, 4E+3D=nD$, 逐テ此ノ如シ是故ニ

$$C=B\left(\frac{n-1}{2}\right), D=C\left(\frac{n-2}{3}\right), E=D\left(\frac{n-3}{4}\right), \text{ 逐テ此ノ如シ是故ニ諸段數ノ値左ノ}$$

$$\text{如シ } A=1, B=n, C=\frac{n(n-1)}{2}, D=\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}, E=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ 逐テ此ノ如シ}$$

茲ニ求メ得タル諸段數ノ値ヲ以テ (一) 式ノ A B C D 等ニ代用セバ

$$(1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2} z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} z^3 + \dots + \frac{n!}{n!} z^n$$

ヲ得此式ノ z ヲ

$\frac{x}{a}$ ニ代フレバ

$$\left(1 + \frac{x}{a}\right)^n = 1 + n\frac{x}{a} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{x^2}{a^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{x^3}{a^3} + \dots + \frac{n!}{n!} \left(\frac{x}{a}\right)^n$$

ヲ得此式ノ兩節ニ

a^n ヲ乘スレバ

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} a^{n-3}x^3 + \dots + a^n$$

ヲ得

此 (c) 式ヲ以テ通例二項法公式トス然レモ (a) (b) (c) 三式ノ諸段數皆同一ナル
ガ故ニ詳開スベキ二項式ノ形狀ニ應シテ合宜ナル式ヲ用フベシ

二項法公式 (c) ニ由テ二項式 $a+x$ ノ幂數或ハ根數ノ詳式ノ各項ノ段數及
ヒ字乘子ノ指數ヲ求ル法則ヲ定ルヲ左ノ如シ

法則一 各項ナル前字乘子ノ指數ハ首項ニ在テ二項式ノ指數ニ同シク是
ヨリ順次ニ一乗ヲ減ズ又後乘子ノ指數ハ首項ニ在テ空數ニシテ是ヨリ順
次ニ一乗ヲ増ス

法則二 首項ノ段數ハ一段第二項ノ段數ハ二項式ノ指數ニ同シク第三項

以下各項ノ段數皆前項ノ段數ニ前項ノ前字乘子ノ指數ヲ乘シ所得ノ乘積
ヲ本項ノ後字乘子ノ指數ニテ除シタル商ニ同シ

第三百六十一條 詳式第二項以下ナル各項ノ段數ノ末乘子ハ平差減級數
ヲナス即チ $\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \frac{n-5}{2}, \dots$ 等逐テ此ノ如シ但シ平差ハ一箇ナリ是故ニ n
若シ正ノ整數ナレバ第 $\frac{n+1}{2}$ 項ノ分子ノ最小乘子ハ 1 ニ即チ空數ニシテ此
項消去ス然レモ若シ原數ナルモ或ハ分數ナルモニ在テハ $\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \frac{n-5}{2}, \dots$
等ノ乘子中空數トナルモノナシ由テ詳式無窮級數トナル此ニ由テ左ノ兩
定理アリ

第一 n ノ值正ノ整數ナルモハ二項式ノ n 乗幂ノ詳式有限級數ニシテ列
項數 $\frac{n+1}{2}$ ナリ

第二 n ノ值負數ナルモ或ハ分數ナルモハ二項式ノ n 乗幂ノ詳式無窮級
數トナル

二項法公式應用

第三百六十二條 二項法公式(c)ハ n 若シ正ノ整數ナレバ二項式ノ幾乗幂
ヲ顯ス所ノ幂數詳式トナリ n 若シ正ノ分數ナレバ二項式ノ幾乗根ヲ顯ス
所ノ根數詳式トナリ n 若シ負數ナレバ二項式ノ幾乗幂或ハ幾乗根ノ轉數
詳式トナル

第三百六十三條 二項法公式ノ各項ノ段數ハ一箇ニ起リ逐テ $\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \dots$
等ヲ連乘セシ乘積ナリ

例一 $(a-x)^6$ 上式ノ詳式ヲ問フ

運算 $\frac{n}{2}$ ナルガ故ニ詳式ノ各項ノ段數左ノ如シ

$$1=1, 1 \times 6=6, 6 \times \frac{5}{2}=15, 15 \times \frac{4}{3}=20, 20 \times \frac{3}{4}=15, 15 \times \frac{2}{5}=6, 6 \times \frac{1}{6}=1.$$

又 $1-6$ ノ奇次ノ幂數ハ負數ニシテ偶次ノ幂數ハ正數ナルガ故ニ詳
式各項ノ字乘子左ノ如シ

$$a^6, -6a^5x, 15a^4x^2, -20a^3x^3, 15a^2x^4, -6ax^5, x^6.$$

是故ニ所要ノ詳式左ノ如シ

$$a^6 - 6a^5x + 15a^4x^2 - 20a^3x^3 + 15a^2x^4 - 6ax^5 + x^6.$$

答

例二 $(a+x)^{\frac{10}{2}}$ 上式ノ詳式ヲ問フ

運算 $n=1$ ナルガ故ニ詳式ノ各項ノ字乗子 $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{2}}x, a^{\frac{3}{2}}x^2, a^{\frac{5}{2}}x^3, a^{\frac{7}{2}}x^4, a^{\frac{9}{2}}x^5, \dots$ 此ノ如シ又詳式ノ各項ノ段數 $A=1, B=A \times n = +\frac{1}{2},$

$$C=B \times \left(\frac{n-1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}, D=C \times \left(\frac{n-2}{3}\right) = +\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6}, E=D \times \left(\frac{n-3}{4}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8},$$

等ナリ此ニ由テ所要ノ詳式左ノ如シ

$$\begin{aligned} (a+x)^{\frac{10}{2}} &= a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x - \frac{1}{2 \cdot 4} a^{\frac{3}{2}} x^2 + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 6} a^{\frac{5}{2}} x^3 - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} a^{\frac{7}{2}} x^4 + \dots \\ &= a^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} x - \frac{1}{2 \cdot 4} a^{-\frac{3}{2}} x^2 + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 6} a^{-\frac{5}{2}} x^3 - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} a^{-\frac{7}{2}} x^4 + \dots \right) \\ &= a^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{a} - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^2}{a^2} + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^3}{a^3} - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^4}{a^4} + \dots \right) \quad \text{答} \end{aligned}$$

例三 $\frac{1}{(a+x)^2}$ 上式ヲ級數ニ詳開スベシ

運算 $\frac{1}{(a+x)^2} = (a+x)^{-2} = a^{-2} \left(1 + \frac{x}{a} \right)^{-2} = \frac{1}{a^2} \left(1 + \frac{x}{a} \right)^{-2}$ ナルガ故ニ後乗子

$\left(1 + \frac{x}{a} \right)^{-2}$ ヲ級數ニ詳開シテ

$$\frac{1}{(a+x)^2} = \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{2x}{a} + \frac{3x^2}{a^2} - \frac{4x^3}{a^3} + \frac{5x^4}{a^4} - \dots \right) \quad \text{ヲ得テ問ニ答フ}$$

例四 $(a^2-x^2)^5$ 上式ノ詳式ヲ問フ

運算 a^3 ノ五乗羣ヨリ降羣ノ順ニ前乗子ヲ排列シ又 x^2 ノ一乗羣ヨリ昇羣ノ順ニ後乗子ヲ排列セバ各項ノ字乗子 $a^{15}, a^{12}x^2, a^9x^4, a^6x^6, a^3x^8, a^0x^{10}$ 此ノ如シ此ニ由テ所要ノ詳式左ノ如シ

$$(a^2-x^2)^5 = a^{15} - 5a^{12}x^2 + 10a^9x^4 - 10a^6x^6 + 5a^3x^8 - x^{10}. \quad \text{答}$$

二項法問題一

- 第一 $a-b$ 上式ノ五乗羣ノ詳式ヲ問フ
- 第二 $1+0$ 上式ノ六乗羣ノ詳式ヲ問フ
- 第三 $x+y$ 上式ノ七乗羣ノ詳式ヲ問フ
- 第四 $a-1$ 上式ノ八乗羣ノ詳式ヲ問フ

第五 ∞ 上式ノ九乗幕ヲ問フ

左ノ各式ノ詳式ヲ問フ

第六 $(1+ax)^5$. 第七 $(a^2-x^2)^3$. 第八 $(x^2-x^4)^5$. 第九 $(a^2x+ax^2)^5$.

左ノ各式ヲ級數ニ詳開セバ如何

第十 $(a-x)^{\frac{1}{2}}$. 第十一 $(1-x)^{\frac{1}{4}}$. 第十二 $(a+1)^{\frac{1}{3}}$. 第十三 $(a+b)^{\frac{1}{5}}$.

第十四 $\frac{1}{a-b}$. 第十五 $\frac{a}{(1-x)^2}$. 第十六 $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$. 第十七 $(a-c^2)^{\frac{2}{3}}$.

第十八 $d(c^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}$. 第十九 $(1-x)^2$. 第二十 $(a^2-x^2)^{\frac{3}{4}}$.

第二十一 $(a+y)^{-4}$. 第二十二 $\frac{a}{\sqrt[3]{(1-x)}}$. 第二十三 $\sqrt[5]{(1-x^4)}$.

第二十四 $(a-x)^{100}$ 上式ノ詳式第九十九項ヲ問フ

第二十五 $(a+x)^{10}$ 上式ノ詳式ノ中央ナル一項ヲ問フ

第二十六 $(a+x)^2$ 上式ノ詳式ノ中央ナル兩項ヲ問フ

第二十七 $(1-x)^{-4}$ 上式ヲ級數ニ化スルキハ第二十項如何

第二十八 $\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)}}$ 上式ヲ級數ニ化スルキハ何ノ段數如何

第二十九 $3a+2c$ 上式ノ五乗幕ノ詳式ヲ問フ

$$(3a+2c)^5 =$$

$$(3a)^5 + 5(3a)^4(2c) + 10(3a)^3(2c)^2 + 10(3a)^2(2c)^3 + 5(3a)(2c)^4 + (2c)^5 = 243a^5 + 810a^4c + 1080a^3c^2 + 720a^2c^3 + 240ac^4 + 32c^5. \quad \text{答}$$

第三十 $a+b+2c^2$ 上式ノ四乗幕ノ詳式ヲ問フ

$$\begin{aligned} (a+b+2c^2)^4 &= (a+b)^4 + 4(a+b)^3(2c^2) + 6(a+b)^2(2c^2)^2 + 4(a+b)(2c^2)^3 + (2c^2)^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(2c^2) + \\ &\quad 6(a^2 + 2ab + b^2)(4c^4) + 4(a+b)(8c^6) + 16c^8 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 8a^3c^2 + 24a^2b^2c^2 + 24ab^3c^2 + 8b^4c^2 \\ &\quad + 24a^2c^4 + 48ab^2c^4 + 24b^3c^4 + 32ac^6 + 32b^2c^6 + 16c^8. \quad \text{答} \end{aligned}$$

第三十一 $a-2b$ 上式ノ三乗幕ノ詳式ヲ問フ

第三十二 $2a+3b$ 上式ノ四乗算ノ詳式ヲ問フ

第三十三 $1-\frac{1}{2}a$ 上式ノ四乗算ノ詳式ヲ問フ

第三十四 $a^2-a^2+a^2$ 上式ノ四乗算ノ詳式ヲ問フ

第三十五 $(4a^2-3a)^4$ 上式ヲ級数ニ化スレバ如何

第三百六十四條 二項式ノ各項段數ヲ具スルキハ二項法公式ヲ變換シテ
算數詳式ヲ求ル簡法ヲ得

設令 $(z+u)^n = z^n + nz^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}z^{n-3}u^3 + \dots$ 於テ

$$z=az, u=by \quad \text{トセバ} \quad (ax+by)^n =$$

$$a^n x^n + na^{n-1}b x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 x^{n-3}y^3 + \dots \quad \text{ヲ得}$$

但シ a, b, x, y ノ段數ヲ顯スナリ今所要ノ詳式ノ各項ノ段數ヲ C_1, C_2, C_3, C_4

等トセバ $(ax+by)^n = C_1 x^n + C_2 x^{n-1}y + C_3 x^{n-2}y^2 + C_4 x^{n-3}y^3 + \dots$ トナル但シ

$$C_1 = a^n, C_2 = C_1 \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{b}{a}, C_3 = C_2 \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{b}{a}, C_4 = C_3 \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{b}{a}, C_5 = C_4 \cdot \frac{n-3}{4} \cdot \frac{b}{a}, \dots \text{等逐テ此ノ如シ}$$

例一 $5a+3x$ 上式ノ四乗算ノ詳式ヲ問フ

$$\text{運算} \quad n=4, a=5, b=3 \text{ ナリ故ニ } C_1=5^4=625, C_2=625 \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{5}=1500,$$

$$C_3=1500 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5}=1350, C_4=1350 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}=540, C_5=540 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5}=81 \quad \text{ヲ得此ニ}$$

由テ所要ノ詳式左ノ如シ

$$(5a+3x)^4 = 625a^4 + 1500a^3x + 1350a^2x^2 + 540ax^3 + 81x^4. \quad \text{答}$$

例二 $\frac{2c}{3} - \frac{4x}{5}$ 上式ノ四乗算ノ詳式ヲ問フ

$$\text{運算} \quad n=4, a=\frac{2}{3}, b=-\frac{4}{5} \text{ ナリ故ニ } \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{5} \quad \text{トナル此ニ由テ}$$

$$C_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}, C_2 = \frac{16}{81} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{6}{5} = \frac{128}{135}, C_3 = \frac{128}{135} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{128}{75},$$

如 $C_1 = \frac{128}{75} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{512}{375}, C_2 = \frac{512}{375} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{256}{625}$ ナリ是故ニ所要ノ詳式左ノ

$$\left(\frac{2c}{3} - \frac{4x}{5}\right)^4 = \frac{16}{81}c^4 - \frac{128}{135}c^3x + \frac{128}{75}c^2x^2 - \frac{512}{375}cx^3 + \frac{256}{625}x^4.$$

答

二項法問題二

- 第一 $2x+5y$ 上式ノ四乗幕ノ詳式ヲ問フ
- 第二 $2a-3x$ 上式ノ五乗幕ノ詳式ヲ問フ
- 第三 $3+4x^2$ 上式ノ六乗幕ノ詳式ヲ問フ
- 第四 $\frac{3a}{4} + \frac{4x}{5}$ 上式ノ四乗幕ノ詳式ヲ問フ
- 第五 $\frac{2t}{3} + \frac{3y}{2}$ 上式ノ六乗幕ノ詳式ヲ問フ
- 第六 $\frac{m}{4} - \frac{1}{5}$ 上式ノ五乗幕ノ詳式ヲ問フ
- 第七 $\frac{m}{2} - \frac{1}{2m}$ 上式ノ八乗幕ノ詳式ヲ問フ

多項法

第三百六十五條 多項式ノ幾乗幕ノ詳式ヲ求ルノ法ヲ多項法ト云フ今先

ツ $(a+bx+cx^2+dx^3+\dots)^n$ 此ノ如キ幕數簡式ヲ詳開セシ詳式ノ列項ノ一ヲ顯ス所ノ公式ヲ發見セントス但シ a, b, c 等ノ列項數定リナシ又 n ノ値ハ正數ナルヲアリ負數ナルヲアリ整數ナルヲアリ分數ナルヲアリトス
 今 $v = bx+cx^2+dx^3+\dots$ トセバ所設ノ幕數簡式 $(a+v)^n$ トナル是故ニ此式ノ詳式第 $m+1$ 項ハ $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!} a^{n-m} v^m$ ナリ今又

$$v = bx+cx^2+dx^3+\dots \text{トセバ } a^m v^m = (bx+b^2x^2+\dots)^m = (b^m + b^m v) \text{トナル故ニ此式ノ詳式第}$$

$q+1$ 項ハ $\frac{1}{q!} \frac{d^q}{dx^q} (bx)^q v^{m-q}$ トナル今之ヲ以テ前式ニ配スレバ所要ノ詳式ノ列

項ノ一ヲ顯ス所ノ公式左ノ如シ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{q!} \frac{d^q}{dx^q} (bx)^q v^{m-q} \text{ 今又 } v = bx+cx^2+dx^3+\dots \text{トセバ}$$

$$b^{m-q} = (cx^2 + c)^{m-q} \quad \text{トナル此式ノ詳式第} \quad \frac{m-q}{r} \quad \text{項}$$

ル是故ニ所要ノ詳式ノ列項ノ一ヲ顯ス所ノ公式

$$\frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)}{[q][r][s][t] \cdots} a^{n-m} (bx)^q (cx)^r c^{m-q-r} \quad \text{ヲ得逐テ此ノ如ク同法ヲ}$$

施スキハ竟ニ所要ノ公式

$$\frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)}{[q][r][s][t] \cdots} a^{n-m} b^q c^r d^s e^t \cdots a^{q^2+r^2+s^2+t^2+\cdots} \quad \text{ナルヲ發見ス但シ}$$

$$q+r+s+t+\cdots = m \quad \text{トシ又} \quad n-m = p \quad \text{トセバ此公式ノ形狀}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2) \cdots (p+1)}{[q][r][s][t] \cdots} a^p b^q c^r d^s e^t \cdots a^{q^2+r^2+s^2+t^2+\cdots} \quad \text{トナル但シ}$$

$$p+q+r+s+t+\cdots = n \quad \text{ナリ}$$

此公式中 q, r, s, t 等ハ皆恒ニ正ノ整數ナレモ(但シ空數ヲ含有ス) p ハ n ノ値正ノ整數ナルニアラサレバ正ノ整數タルヲ得スト知ルベシ p ノ値正ノ整數ナルキハ分母子ニ $[p]$ ヲ乘ズレバ前乘子ノ形狀

$$\frac{[p][q][r][s][t] \cdots}{[q][r][s][t] \cdots} \quad \text{トナル}$$

右公式ニ於テモノ外ノ諸乘子ノ連乘積ヲ $a^{q^2+r^2+s^2+t^2+\cdots}$ ノ段數ト云フ而シ

$$\text{テモノ値一箇ナルキハ} \quad \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (p+1)}{[q][r][s][t] \cdots} \quad \text{ヲ段數ト云フ}$$

第三百六十六條 簡式 $(a+bs+cx^2+dx^3+\cdots)^n$ ノ詳式ノ列項中 x^k ノ段數ヲ發見スル法

$$q+\frac{1}{2}r+\frac{3}{2}s+4t+\cdots = k, p+q+r+s+t+\cdots = n \quad \text{ナルガ故ニ前式ニ合フ所}$$

ノ q, r, s, t 等ノ正ノ整數ナル各種ノ値ヲ探リ然ル後ヲ後式ヨリ p ノ値ヲ

$$\text{發見セハ所要ノ段數ハ} \quad \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (p-1)}{[q][r][s][t] \cdots} a^p b^q c^r d^s e^t \cdots \quad \text{此ノ如キ式}$$

ヨリ求メ得タル諸數ノ和ナリ

n 若シ正ノ整數ナレバ p 亦正ノ整數ナリ故ニ此時ニ於テハ所要ノ段數

$$\frac{[p][q][r][s][t] \cdots}{[q][r][s][t] \cdots} a^p b^q c^r d^s e^t \cdots \quad \text{此ノ如キ式ヨリ求メ得タル諸數ノ和ナリ}$$

例一 $(1+2x+3x^2+4x^3)^4$ 上式ノ詳式中 x^2 ノ段數如何

運算 $q+2r+3s=1, p+q+r+s=4$ ナルガ故ニ $s=2$ トセバ $q=0$, $q=1, p=1$ ヲ得次ニ又 $s=1$ トセバ $r=2, q=0, p=1$ 或ハ $r=1, q=2, p=0$ ナ得次ニ又 $s=0$ トセバ $r=3, q=1, p=0$ ヲ得而シテ p, q, r, s ノ値ハ此四種ニ止ルナリ又 $a=1, b=2, c=3, d=4$ ナリ是故ニ所要ノ段數左ノ如シ

p	q	r	s
1	1	0	2
1	0	2	1
0	2	1	1
0	1	3	0

$$\begin{aligned} & \left[\frac{4}{2} 2^1 \cdot 4^2 + \frac{4}{2} 3^2 \cdot 4^1 + \frac{4}{2} 2^2 \cdot 3^1 \cdot 4^1 + \frac{4}{3} 2^1 \cdot 3^3 \right] \\ &= 384 + 432 + 576 + 216 \\ &= 1608. \quad \text{答} \end{aligned}$$

例二 $(1+2x+3x^2+4x^3+\dots)^{\frac{1}{2}}$ 上式ノ詳式中 x^2 ノ段數如何

運算 $q+2r+3s=3, p+q+r+s=\frac{1}{2}$.
 p, q, r, s ノ對合スル値左表ノ如シ

p	q	r	s
$\frac{1}{2}$	0	0	1
$\frac{3}{2}$	1	1	0
$\frac{5}{2}$	3	0	0

是故ニ所要ノ段數左ノ如シ

$$\left(\frac{1}{2} \right)^4 + \left(\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \cdot 3^1 + \left(\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right)^2$$

$$= \frac{2}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 1. \quad \text{答}$$

此例ニ於テハ $1+2x+3x^2+4x^3+\dots=(1-x)^{-2}$ ニシテ $((1-x)^{-2})^{\frac{1}{2}}$ ハ即チ $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\dots$ ナルガ故ニ x^2 ノ段數一箇ナレバ誤リナキヲ檢明ス若シ又多項法ニ由テ x ノ段數ヲ求ルルハ

$$\frac{5}{2} - \frac{2}{2} - \frac{9}{8} + \frac{9}{4} - \frac{5}{8} = 1 \text{ ナルヲ發見スヘシ}$$

多項法問題

- 第一 $(1+x+x^2)^3$ 上式ノ詳式中 x^4 ノ段數如何
 第二 $(1-s+s^2)^4$ 上式ノ詳式中 x ノ段數如何

- 第三 $(1-2x+3x^2-4x^3)^{-1}$ 上式ノ詳式中 x^8 ノ段數如何
- 第四 $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3$ 上式ノ詳式中 x^{14} ノ段數如何
- 第五 $(2-3x-4x^2)^3$ 上式ノ詳式中 x^6 ノ段數如何
- 第六 $(1-x+2x^2)^{12}$ 上式ノ詳式中 x^8 ノ段數如何
- 第七 $(2-5x-7x^2)^3$ 上式ノ詳式中 x^4 ノ段數如何
- 第八 $(1-2x^2+4x)^{-2}$ 上式ノ詳式中 x^8 ノ段數如何
- 第九 $(1+x+x^2)^{-5}$ 上式ノ詳式中 x^4 ノ段數如何
- 第十 $(1+2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 上式ノ詳式中 x^5 ノ段數如何
- 第十一 $\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)^{-2}$ 上式ノ詳式中 x^8 ノ段數如何
- 第十二 $(1+2x-4x^2-2x^3)^{-\frac{1}{2}}$ 上式ノ詳式中 x^4 ノ段數如何
- 第十三 $(1-2x+x^4)^{\frac{1}{4}}$ 上式ノ詳式中 x^6 ノ段數如何
- 第十四 $(1+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{7}{2}})^3$ 上式ノ詳式中 x^4 ノ段數如何
- 第十五 $(1+x+x^3)^4$ 上式ノ詳式中 x^4 ノ段數如何

- 第十六 $(1+2x+3x^2+4x^3+\dots)^{-\frac{1}{2}}$ 上式ノ詳式中 x^4 ノ段數如何
- 第十七 $(1+ax+bx^2+cx^3)^3$ 上式ノ詳式中 x^{12} ノ段數如何
- 第十八 $(1-x^2+x^3-x^4)^4$ 上式ノ詳式中 x^8 ノ段數如何
- 第十九 $(1+ax+bx^2+cx^3+\dots)^{-\frac{1}{2}}$ 上式ノ詳式中 x^2 ノ段數如何
- 第二十 $(1+ax+bx^2+cx^3+\dots)^{-n}$ 上式ノ詳式中 x^3 ノ段數如何
- 第二十一 $(a+b+c)^3$ 上式ノ詳式中 abc^3 ノ段數如何
- 第二十二 $(a-b-c)^7$ 上式ノ詳式中 $a^2b^3c^2$ ノ段數如何
- 第二十三 $(a+b+c+d)^9$ 上式ノ詳式中 $a^2b^3c^3$ ノ段數如何
- 第二十四 $(a-b+c-d)^{10}$ 上式ノ詳式中 $ab^2c^3d^4$ ノ段數如何

根數式詳開法

第三百六十七條 根數式ヲ化シテ級數トナシ以テ容易ニ根數式ノ略近ノ値ヲ發見スルコトヲ得

積數(開カント欲スル數)ニ越ルル乘算或ハ積數ニ及ハサルル乘算ヲ a^n トシ之ト積數トノ差ヲ b トセハ $a^n + b$ 或ハ $a^n - b$ ヲ以テ積數ヲ顯スコトヲ得而シテ $\sqrt[n]{(a^n + b)} = a\sqrt[n]{1 + \frac{b}{a^n}}$, $\sqrt[n]{(a^n - b)} = a\sqrt[n]{1 - \frac{b}{a^n}}$ ナリ是故ニ此兩式ノ根數分

ヲ級數ニ化スレハ左ノ如シ

$$\sqrt[n]{(a^n + b)} = a \left\{ 1 + \frac{1}{n} \frac{b}{a^n} + \frac{1}{2n} \frac{b^2}{a^{2n}} + \frac{1}{3n} \frac{b^3}{a^{3n}} + \dots \right\} \quad [1]$$

$$\sqrt[n]{(a^n - b)} = a \left\{ 1 - \frac{1}{n} \frac{b}{a^n} + \frac{1}{2n} \frac{b^2}{a^{2n}} - \frac{1}{3n} \frac{b^3}{a^{3n}} + \dots \right\} \quad [2]$$

此兩式ノ後節根數號ヲ帶ルモノナシ故ニ根數式ヲ化シテ常數ノ連續セシ級數トナスコトヲ得タリ此ニ由テ此無窮級數ヲ合計セハ根數式ノ略近ノ値

ヲ得ヘシ

分數式 $\frac{b}{a^n}$ ノ值若シ彌々小ナレハ級數ノ斂收スルコト益々速ナリト知ルヘシ

例一 七十六箇ノ立方根ヲ小數以下六位迄算スレハ如何

運算 七十六箇ニ及ハスシテ最モ近キ三乘算ヲ用フルキハ最小ナル分數ヲ得

$$\sqrt[3]{76} = \sqrt[3]{64 + 12} = 4\sqrt[3]{1 + \frac{12}{64}} = 4\sqrt[3]{1 + \frac{3}{16}} \quad \text{是故ニ } n=3, a=4, \frac{b}{a^n} = \frac{3}{16}$$

シテ[1]式ニ由テ根數分ヲ級數ニ詳開ス

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3 \cdot 3} \frac{1}{4^3} - \frac{1}{4 \cdot 3} \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5 \cdot 3} \frac{1}{4^5} - \frac{1}{6 \cdot 3} \frac{1}{4^6} + \dots \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24} + \frac{1}{36} - \frac{1}{48} + \frac{1}{60} - \frac{1}{72} + \dots \end{aligned}$$

逐テ此ノ如シ

今A B C D等ヲ以テ各項ヲ顯シ六位ノ中ニ差違ナカラシメンカタメ各項ノ値ヲ小數以下七位迄算スレハ左ノ如シ

答 四箇二三五八二四

$$\sqrt[4]{76} = 4.235824 \pm$$

$$\sqrt[3]{1 + \frac{3}{16}} = 1.0589559$$

A	= +	1.0000000	
B = +	$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{16}$	= +	.0625000
C = -	$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{16}$	B = -	.0039062
D = -	$\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{16}$	C = +	.0004069
E = -	$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{16}$	D = -	.0000508
F = -	$\frac{11}{15} \cdot \frac{3}{16}$	E = +	.0000069
G = -	$\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{16}$	F = -	.0000010
H = -	$\frac{17}{21} \cdot \frac{3}{16}$	G = +	.0000001

例二 二十五箇ノ五乗根ヲ小數以下六位迄算スレハ如何

運算 二十五箇ニ越ヘテ最モ近キ五乗冪ヲ用フルキハ最小ナル分

數ヲ得

$$\sqrt[5]{(25)} = \sqrt[5]{(32-7)} = 2\sqrt[5]{\left(1 - \frac{7}{32}\right)} \quad \text{ナリ由テ〔二〕式ヲ用テ根數分ヲ詳開ス}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1-n}{2n} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1-2n}{3n} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1-3n}{4n} = \frac{7}{10} \cdot \frac{1-4n}{5n} = \frac{19}{25} \cdot \frac{1-5n}{6n}$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{1-6n}{7n} = \frac{20}{35} \quad \text{逐テ此ノシ}$$

A =	= +	1.0000000
B = -	$\frac{1}{5} \cdot \frac{7}{32}$	= - 437500
C = +	$\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{32}$	B = - 38281
D = +	$\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{32}$	C = - 5024
E = +	$\frac{7}{10} \cdot \frac{7}{32}$	D = - 769
F = +	$\frac{19}{25} \cdot \frac{7}{32}$	E = - 128
G = +	$\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{32}$	F = - 22
H = +	$\frac{29}{35} \cdot \frac{7}{32}$	G = - 4

$$\sqrt[5]{\left(1 - \frac{7}{32}\right)} = .9518272$$

$$\sqrt[5]{(25)} = 1.903654 \pm$$

答 一箇九〇三六五箇

根數式詳開法問題

第一 九箇ノ立方根ヲ小數以下六位迄算スヘシ

- 第二 三十一箇ノ立方根ヲ小數以下六位迄算スヘシ
- 第三 一百箇ノ立方根ヲ小數以下六位迄算スヘシ
- 第四 一百十箇ノ立方根ヲ小數以下六位迄算スヘシ
- 第五 二百九十七箇ノ五乗根ヲ小數以下六位迄算スヘシ
- 第六 六十箇ノ六乗根ヲ小數以下六位迄算スヘシ
- 第七 四箇ノ五乗根ヲ小數以下六位迄算スヘシ
- 第八 三千二百七十五箇ノ五乗根ヲ小數以下六位迄算スヘシ
- 第九 一百二十五箇ノ七乗根ヲ小數以下六位迄算スヘシ

分數式ヲ化シテ級數ヲ求ル法

第三百六十八條 不能化ノ分數式(分母子ニ公約數ナキモノ)ハ常ノ除法ニ
テ級數ニ化スルヲ得

設令ハ分數式ノ $\frac{1}{1+a}$ ヲ級數ニ化スルノ法ニアリ即チ左ノ如シ

第一 法

$$\frac{1+a}{-a} = \frac{-a-a^2}{+a^2}$$

第二 法

$$\begin{array}{r} (1+a)1 \\ 1+\frac{1}{a} \\ \hline \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} \quad \frac{1}{a^2} \\ \hline \frac{1}{a^2} \end{array}$$

上ニ算シ得タル
兩除商ノ列項連
續ノ法自ラ明ナ
リ故ニ一箇ノ分
數式ヲ化シテ兩
無窮級數トナス
ヲ得即チ下ノ
如シ

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + \dots \quad (一)$$

$$\frac{1}{a+1} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} - \frac{1}{a^6} + \dots \quad (二)$$

泛段數法

第三百六十九條 分數式ヲ化シテ級數トナシ所得ノ級數式ト原分數式トヲ比較シテ作レル方程式ハ未知元ノ値ニ係ラス西節恆ニ適等ナルヘシ此ニ由テ斯ル方程式ハ即チ兩同式ナリ此理ニ由テ一箇ノ代數式ヲ化シテ級數トナスノ法アリ之ヲ泛段數法ト云フ其法先ツ未定ノ段數ヲ具スル級數ヲ作り以テ所要ノ級數式トシ〔此未定段數ヲ泛段數ト云フ〕然ル後チ兩同式ノ定理ニ由テ泛段數ノ値ヲ發見スルナリ

例一 $\frac{1+2x}{1-3x}$ 上ノ分數式ヲ級數ニ化スレハ如何

$$\text{運算} \quad \frac{1+2x}{1-3x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots \dots \dots [1] \quad \text{此ノ如ク定メ此式ノ分母ヲ去リ諸項ヲ尽ク後節ニ集ルキハ左ノ如シ}$$

$$0 = (A-1) + \frac{B}{-3A}x + \frac{C}{-3B}x^2 + \frac{D}{-3C}x^3 + \frac{E}{-3D}x^4 + \dots \dots [1]$$

〔二〕式ハ兩同式ナルガ故ニ各ノ不同幕ノ段數皆空數ナルヘシ〔第三百五十五條定理第四ヲ視ヨ〕此ニ由テ左ノ方程式ヲ作レ

$$A-1=0, B-3A-2=0, C-3B=0, D-3C=0, E-3D=0, \text{等ナリ此ニ由テ} \\ A=1, B=5, C=15, D=45, E=135, \text{等ナリ之ヲ以テ〔一〕式ノ泛段數ニ代用セハ所要ノ級數式ヲ得即チ左ノ如シ}$$

$$\text{答} \quad \frac{1+2x}{1-3x} = 1 + 5x + 15x^2 + 45x^3 + 135x^4 + \dots \dots \dots$$

例二 $\frac{1+x}{x-2x^2+6x^3}$ 上ノ分數式ヲ級數ニ化スレハ如何

運算 此分數式ヲ級數ニ化スルキハ首項 $\frac{1}{x}$ 即チ x^{-1} ナルヲ明ナリ此ニ由テ泛段數ノ級數ヲ左ノ如ク命ス

$$\frac{1+x}{x-2x^2+6x^3} = Ax^{-1} + Bx^0 + Cx^1 + Dx^2 + Ex^3 + Fx^4 + \dots \dots \dots$$

此式ノ分母ヲ去リ諸項ヲ尽ク後節ニ集ルキハ左ノ如シ

$$0=A \begin{vmatrix} x^0 & B & C & D & E & F & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2A & -2B & -2C & -2D & -2E & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & +6A & +6B & +6C & +6D & \dots \end{vmatrix}$$

是故 $A-1=0, B-2A-1=0, C-2B+6A=0, D-2C+6B=0, E-2D+6C=0,$

$F-2E+6D=0, G-2F+6E=0,$ 等ヲ得此ニ由テ

$A=1, B=3, C=0, D=-18, E=-36, F=+36, G=+288,$ 等ナリ之ヲ以テ所

設ノ泛段數ニ代用セハ所要ノ級數ヲ得即チ左ノ如シ但シ $C=0$ ナル
ガ故ニ C ナ具スル項消去ス

$$\text{答} \quad \frac{1+x}{x-2x^2+6x^3} = \frac{1}{x} + 3-18x^2-36x^3+36x^4+288x^5+\dots$$

備考 所設ノ兩同式ノ諸項ヲ一節ニ集ムルコトナキモ兩同式定理第

三ニ由テ x ノ同幂ノ段數ヲ比較シテ方程式ヲ作ラハ可ナリ

泛段數法ヲ施サントスルキ必ス先ツ級數ノ首項ナル字乘子ノ指數ヲ考定
シ然ル後チ所設ノ級數ノ首項ヲ此狀勢ニ合スト宜シトス然レモ所設ノ級

數ノ首項ノ字乘子ノ指數ヲ多キニ失スルキハ方程式中不合理ナルモノ出
ルアツテ此失ヲ知ルヘシ若シ又少キニ失スルキハ方程式中不合理ナルモ
ノヲ見ス却テ過溢ノ諸項ハ段數ノ空數トナルガタメニ皆消去ス
泛段數法ハ有限ノ代數式ヲ以テ無窮級數ト比較シテ兩同式ヲ作レリ是レ
此級數漸ク斂收スルモノニアラサレハ行フヘカラサルノ法ナリ而シテ此
級數漸ク斂收スルモノナレハ昇幂ノ順ニ配附スル所ノ字乘子ノ値一箇ニ
リ小ナラサルヲ得ズ然レモ亦分數式ノ分母ヲ以テ分子ヲ除スルキハ此級
數ヲ得ヘシ此時ニ於テハ昇幂ノ順ニ配附スル所ノ字乘子ノ値ニ定限ヲ立
ルコトヲ得ス是レ初學ノ士ノ惑ヲ生スル所ナリ然レモ之ヲ除スルキハ恆ニ
餘數アツテ設令ヒ幾千万項ノ除商ヲ求ルモ此餘數尽ルコトナシ若シ此餘數
ヲ細微ナリ之ヲ棄ルモ可ナリト云ハハ是レ即チ斂級數ト看做スナリ是故
ニ泛段數法ヲ以テ有限ノ代數式ヲ化シテ求メ得タル無窮級數ハ恆ニ斂級
數ト知ルヘシ

此式 y の値ニ係ラズ兩節恆ニ適等ナルガ故ニ兩同式ナリ由テ y ノ
不同幕ノ段數皆空數ナリ是故ニ泛段數 $A B C D$ 等ノ値ヲ發見スル
ヲ得即チ左ノ如シ

甲式

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a} \\ B &= -\frac{b}{a^2} \\ C &= \frac{2b^2 - ac}{a^3} \\ D &= -\frac{5b^3 - 5abc + a^2d}{a^4} \\ E &= \frac{14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e}{a^5} \end{aligned}$$

上ニ得ル所ノ $A B C$ 等ノ値ヲ〔一〕式ナル A
 $B C$ 等ニ代用セバ $a b c$ 等ト y トナ以テ
 x ノ値ヲ顯ス所ノ級數式ヲ得ベシ

例二

$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \dots$ 上ノ級數式ヨリ y ナ以テ x ノ値ヲ

顯ス所ノ級數式ヲ求ムレバ如何

運算

$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \dots$ トシテ前同法ヲ施ス

乙式

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a} \\ B &= -\frac{b}{a^2} \\ C &= \frac{3b^2 - ac}{a^3} \\ D &= -\frac{12b^3 - 8abc + a^2d}{a^4} \\ E &= \frac{55b^4 - 55a^2b^2c + 10a^2bd + 5a^2c^2 - a^3e}{a^5} \end{aligned}$$

此二例ニ於テ $a b c$ 等ハ任意ノ數ナリ故
ニ此兩級數ノ如キ形狀ヲナス所ノ級數ニ
逢ハマ甲乙兩式ヲ以テ公式トシテ泛段數
ノ値ヲ發見スルヲ得ベシ

例三 $y = x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 + \dots$

上ノ級數式ヨリ y ナ以テ x ノ値ヲ顯

ス所ノ級數式ヲ求ムレハ如何

運算 $x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \dots$ トシ甲式ニ於テ $a=1, b=2, c=4,$

$d=8$ ナルニ $A=1, B=2, C=4, D=8$ ナ得此ニ由テ所要ノ級數式左ノ如シ

答 $x = y - 2y^2 + 4y^3 - 8y^4 + \dots$

級數互求法問題

第一 $y = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$

上ノ級數式ヨリ y ナ以テ x ノ値ヲ顯

ス所ノ級數式ヲ求ムレハ如何

第二 $y = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 + \dots$

上ノ級數式ヨリ y ナ以テ x ノ値ヲ

顯ス所ノ級數式ヲ求ムレハ如何

第三 $x = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \dots$ 上ノ級數式ヨリ x ナ以テ y ノ値ヲ顯ス所

ノ級數式ヲ求ムレハ如何

第四 $y = x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \dots$

上ノ級數式ヨリ y ナ以テ x ノ値ヲ顯

ス所ノ級數式ヲ求ムレハ如何

第五 $y = 2x - 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots$

上ノ級數式ヨリ y ナ以テ x ノ値ヲ顯ス

所ノ級數式ヲ求ムレハ如何

第六 $x = 2y + 4y^2 + 6y^3 + 8y^4 + 10y^5 + \dots$

上ノ級數式ヨリ x ナ以テ y ノ値ヲ顯

ス所ノ級數式ヲ求ムレハ如何

第七 $\frac{1}{4} = \frac{2x}{3} - \frac{4x^2}{5} + \frac{6x^3}{7} - \frac{8x^4}{7} + \dots$

上ノ級數式ヨリ x ノ値ノ略近數ヲ

發見スル

運算 $x = 2x - \frac{4x^2}{3} + \frac{6x^3}{5} - \frac{8x^4}{7} + \dots$ [1] トシ此式ヨリ x ナ以テ x

ノ値ヲ顯ス所ノ級數式ヲ求ムレハ

$x = \frac{1}{2} + \frac{8}{6}x^2 + \frac{13}{36}x^3 + \frac{5}{12}x^4 + \dots$ [1] ナ得此式ニ於テ x ナ $1/4$ ニ代ヘ

テ各項ノ數値ヲ求ムレハ x ノ値ヲ得即チ左ノ如シ

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \parallel 125000$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{16} = \frac{1}{6} \parallel .010416$$

$$\frac{13}{360} = \frac{1}{64} = \frac{13}{360} \parallel .000564$$

$$\frac{5}{1512} = \frac{1}{256} = \frac{5}{1512} \parallel .000013$$

$$x \parallel .135993, \text{ 答}$$

第八 $\frac{2}{5} = 5x - 20x^2 + 80x^3 - 320x^4 + 1280x^5 - \dots$ 上ノ級數式ヨリ x ノ

値ノ略近數ヲ小數以下六位迄算スレハ如何

第九 $\frac{1}{2} = x + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^4}{4.5} + \frac{x^5}{5.6} + \dots$ 上ノ級數式ヨリ x ノ値ノ略近數

ヲ小數以下六位迄算スレハ如何

第十 $\frac{1}{5} = \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^9}{40} - \frac{x^{12}}{112} - \dots$ 上ノ級數式ヨリ x ノ値ノ零近數ヲ

小數以下六位迄算スレハ如何

第十一 $\frac{1}{4} = \frac{3x^2}{2.4} + \frac{5x^3}{4.6} + \frac{7x^4}{6.8} - \dots$ 上ノ級數式ヨリ x ノ値ノ略近數ヲ小數以下六位迄算スレハ如何

循環級數

第三百七十一條 循環級數トハ初列數項ノ後チハ各項皆前數項ニ各々一定數ヲ乘シタル幾乘積ノ和ニ等シキモノヲ云フ設令ハ

$$1 + 4x + 11x^2 + 34x^3 + 101x^4 + \dots$$

此ノ如シ此級數ニテハ連續スル兩項ヲ取テ前項ニ $3x^2$ ヲ乘シ後項ニ $2x$ ヲ乘シ所得ノ兩乘積ヲ合スレハ次ノ一項ヲ得ルナリ此一定乘子ノ段數即チ3及ヒ2ヲ聯法ト云フ

又 $1 + x + 3x^2 + 8x^3 + 17x^4 + 42x^5 + 100x^6 + \dots$ 此ノ如キ循環級數ニテハ聯法3

2 1 ナリ

第三百七十二條 循環級數ノ第二項以下ノ各項皆前ノ二項ヨリ求メ得ヘキハ此級數ヲ一次循環級數ト云フ此時ニ於テハ聯法一數ニシテ同比級數トナル若シ又第三項以下ノ各項皆前ノ二項ヨリ求メ得ヘキハ此級數ヲ二次循環級數ト云フ此時ニ於テハ聯法兩數ナリ若シ又第四項以下ノ各項皆前ノ三項ヨリ求メ得ヘキハ此級數ヲ三次循環級數ト云フ此時ニ於テハ聯法三數ナリ逐テ此ノ如シ

第三百七十三條 二次循環級數ノ聯法及ヒ總數ヲ求ル法

〔一〕 聯法ヲ求ル法

連續スル四項ノ段數ヲ a, b, c, d トシ聯法ヲ m, n トセハ此級數ノ性質ニ依テ $ma+nb \equiv c, nb+nc \equiv d$ 〔P〕ヲ得此兩方程式ヨリ容易ニ m, n ノ値ヲ發見スルヲ得ヘシ

〔二〕 總數ヲ求ル法

級數ノ各項ヲ A, B, C 等トシ總數ヲ S トセハ $S \equiv A+B+C+D+E+\dots$ 〔I〕ヲ得

但シ此級數ノ各項 x ノ昇降ノ順ニ排列スルモノトシ A 或ハ B ニ x ノ一乗幕ヲ帶フルトス然ルニ此級數二次ナルカ故ニ左ノ〔二〕式ヲ得

$$C \equiv mAx^2 + nBx$$

$$D \equiv mBx^2 + nCx$$

$$E \equiv mCx^2 + nDx$$

$$F \equiv mDx^2 + nEx$$

$$G \equiv mEx^2 + nFx$$

此式ノ同行ナル諸項ヲ合シ〔一〕式ニ據テ變換セハ左
〔I〕ノ如シ但シ此級數漸々斂收スルモノニシテ x ノ値一箇ヨリ小ナリトス

$$S - A - B = mS^2 + nx(S - A) \quad \text{此ニ由テ} \quad x = \frac{A+B-Anc}{1-mn} \quad \text{〔Q〕ヲ得ルナリ}$$

第三百七十四條 三次循環級數ノ聯法及ヒ總數ヲ求ル法

〔一〕 聯法ヲ求ル法

連續スル六項ノ段數ヲ a, b, c, d, e, f トシ聯法ヲ m, n, r トセハ $ma+nb+rc \equiv d, nb+nc+rd \equiv e, nc+nd+re \equiv f$ 〔T〕ヲ得此三方程式ヨリ容易ニ m, n, r ノ値ヲ發見スルヲ得

(二) 總數ヲ求ル法

級數ノ各項ヲ A, B, C 等トシ總數ヲ S トセハ $S = A + B + C + D + E + F + \dots$ [I]
 ナ得然ルニ此級數三次ナルカ故ニ左ノ [II] 式ヲ得

$$\begin{aligned} D &= mAx^2 + nBx^2 + rCx \\ E &= mBx^3 + nCx^2 + rDx \\ F &= mCx^3 + nDx^2 + rEx \\ &\vdots \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{[II]} \\ \text{此式ノ同行ナル諸項ヲ合シ [I] 式ニ據テ變換} \\ \text{セハ左ノ如シ但シ此級數漸々歛收スルモノ} \\ \text{ニシテ } x \text{ ノ値一箇ヨリ小ナリトス} \end{array} \right.$$

$$S - A - B - C = mAx^2 + nBx^2 + rCx - A - B - C = -A - B - C + mAx^2 + nBx^2 + rCx$$

此ニ由テ

$$S = \frac{A+B+C - (A+B)rx - nAx^3}{1-rx-nx^2-nx^3} \quad \text{[V]} \quad \text{ナリ}$$

又同法ヲ下シテ更ニ高次數ナル循環級數ノ聯法及ヒ總數ヲ求ムヘキ公式
 ナ作ルヲ得ヘシ

第三百七十五條 前公式ニ從テ循環級數ノ總數ヲ求メントセハ先ツ [P] 式

或ハ [T] 式ヨリ聯法ヲ求メ然ル後チ [Q] 式或ハ [V] 式ニ從テ總數ヲ求ムヘシ
 若シ級數ノ次數明ナラサルハ先ツ [P] ヨリ m, n ノ値ヲ求メ此數ヲ他ノ各
 項ニ照ラシ此數ノ正否ヲ檢シ若シ不可ナレハ更ニ [T] 式ヨリ m, n, r ノ値ヲ
 發見シ前ノ如ク此得數ヲ檢スヘシ若シ猶不可ナレハ更ニ高次數ナル循環
 級數ニ適スル公式ヲ求メ以テ聯法ヲ發見シ前ノ如ク得數ヲ檢ス逐テ此ノ
 如シ

例一 $1+x+10x^2+22x^3+46x^4+\dots$ 上ノ無窮歛級數ノ總數如何

運算 $a=1, b=4, c=10, d=22$ トセハ [P] 式ヨリ $m+4n=10, 4m+10n=22$

ヲ得由テ $m=2, n=3$ ナ得此兩聯法ハ能ク所設ノ級數ニ合フ其故何

トナレハ $10 \times (-2) + 22 \times 3 = 66 - 20 = 46$ ナルカ故ナリ今又 $A=1, B=4$

トセハ [Q] 式ヨリ $S = \frac{1+4x-3x}{1-3x+2x^2} = \frac{1+x}{1-3x+2x^2}$ ナ得テ問ニ答フ

循環級數問題

左ノ無窮級數ノ總數ヲ問フ

第一 $1+3x+4x^2+7x^3+11x^4+\dots\dots\dots$ 第二 $1+6x+12x^2+48x^3+120x^4+\dots\dots\dots$ 第三 $1+2x-5x^2+26x^3-119x^4+\dots\dots\dots$ 第四 $1+4x+3x^2-2x^3+4x^4+17x^5+3x^6+\dots\dots\dots$ 第五 $1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\dots\dots\dots$ 第六 $1+x+5x^2+13x^3+41x^4+121x^5+\dots\dots\dots$ 第七 $1+4x+6x^2+11x^3+28x^4+63x^5+131x^6+\dots\dots\dots$ 第八 $\frac{8}{3}+x^2+\frac{7x^3}{2}+10x^4+\frac{61x^5}{2}+91x^6+\dots\dots\dots$ 第九 $1+4x+10x^2+22x^3+46x^4+\dots\dots\dots$ 上ノ級數ノ第 n 項及ヒ第 n 項ニ至ル總數ヲ問フ

解法 先ツ所設ノ級數無窮ニ至ル總數ヲ求ムレハ

$$\frac{x}{1-3x+2x^2} = \frac{1+x}{1-3x+2x^2} \quad \text{ヲ得此分數式ヲ兩分數式ニ分解セハ}$$

$$\frac{1+x}{1-3x+2x^2} = \frac{3}{1-2x} - \frac{2}{1-x} \quad \text{ヲ得此兩分數式ヲ級數ニ化スレハ}$$

$$(3+6x+12x^2+24x^3+48x^4+\dots\dots\dots) - (2+2x+2x^2+2x^3+2x^4+\dots\dots\dots)$$

ヲ得是故ニ第 n 項ハ $3(2x)^{n-1} - 2x^{n-1}$ ニシテ第 n 項ニ至ル總數ハ

$$3 \cdot \frac{1-(2x)^n}{1-2x} - 2 \cdot \frac{1-x^n}{1-x} \quad \text{ナリ}$$

第十 $2+2+5x^2+7x^3+17x^4+\dots\dots\dots$ 上ノ級數ノ第 n 項及ヒ第 n 項ニ

至ル總數ヲ問フ

第十一 $3+6x+14x^2+36x^3+98x^4+276x^5+794x^6+2316x^7+\dots\dots\dots$ 上ノ級數ノ第 n 項及ヒ第 n 項ニ至ル總數ヲ問フ

推差法

第三百七十六條 推差法ハ級數ノ列項ノ逐差ヲ以テ任意ナル一項ヲ發見シ或ハ幾項ノ總數ヲ求ルノ法ナリ

第三百七十七條 任意ナル一項ヲ發見スル法

級數ヲナス各項ヲ次ノ一項ヨリ減シタル餘數一種ノ新級數ヲナス之ヲ第一差ト名ツク又此新級數ノ各項ヲ次項ヨリ減シタル餘數一種ノ新級數ヲナス之ヲ第二差ト名ツク逐テ此ノ如シ

今原級數ヲ a, b, c 等トシ之ヲ第一行ニ置キ前法ニ從テ各次ノ逐差ヲ求メ順次ニ次行ニ置カハ左ノ如シ

各行ノ上級ナル式ヲ各次逐差級數ノ首項ト名ツク今第一差ノ首項ヲ d_1 トシ第二差ノ首項ヲ d_2 トシ第三差ノ首項ヲ d_3 トシ第四差ノ首項ヲ d_4 トス逐テ此ノ如ク命ス

原級數	第一差	第二差	第三差	第四差
a	$b-a$	$c-2b+a$	$d-3c+3b-a$	$e-4d+6c-4b+a$
b	$c-b$	$d-2c+b$	$e-3d+3c-b$	
c	$d-c$	$e-2d+c$		
d	$e-d$			
e				

是故ニ

$$d_1 = b - a$$

$$d_2 = c - 2b + a$$

$$d_3 = d - 3c + 3b - a$$

$$d_4 = e - 4d + 6c - 4b + a$$

逐テ此ノ如シ

此式ヲ變化シテ逐差 d_1, d_2, d_3 等ヲ以テ原級數ノ各項 a, b, c, d, e 等ヲ顯ス所ノ式ヲ作レハ左ノ如シ

$$a \equiv a$$

$$b \equiv a + d_1$$

$$c \equiv a + 2d_1 + d_2$$

$$d \equiv a + 3d_1 + 3d_2 + d_3$$

$$e \equiv a + 4d_1 + 6d_2 + 4d_3 + d_4$$

$$\dots\dots\dots$$

上式ニ於テ各項ノ段數ハ二項式ノ幾乗幕ノ段數ニ同シ即チ二乗幕ノ段數ハ第三式ノ段數ニ同シ三乗幕ノ段數ハ第四式ノ段數ニ同シ逐フ此ノ如シ故ニ各項ノ段數ハ二項法ニ據テ求メ得ヘシ

是故ニ原級數 a, b, c, d, e 等ノ第 $n+1$ 項ヲ T_{n+1} トセハ左ノ式ヲ得

$$T_{n+1} \equiv a + nd_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \cdot d_3 + \dots\dots\dots [n]$$

今此 $[n]$ 式中 $n = 1$ ヲ代用セハ原級數ノ第 n 項ヲ求ル公式ヲ得ヘシ即チ左ノ如シ

$$T_n \equiv a + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot d_2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3} \cdot d_3 + \dots\dots\dots [A]$$

第三百七十八條 級數幾項ノ總數ヲ求ル法

原級數 a, b, c, d, e 等トシ此級數 n 項ノ總數ヲ S トシ a, d_1, d_2, d_3 等ヲ以テ S ノ值ヲ顯ス所ノ式ヲ作ラントス

今別ニ輔級數 $0, a, a+b, a+b+c, a+b+c+d,$ 等ヲ設ケ此級數ノ第 $n+1$ 項ヲ求ルキハ原級數 n 項ノ總數ヲ得ヘシ

今又輔級數ノ逐差ノ首項ヲ d_1, d_2, d_3, d_4 等トセハ前條ニ示セシ $[n]$ 式ヨリ左ノ式ヲ得

$$S \equiv 0 + nd_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \cdot d_3 + \dots\dots\dots [n]$$

輔級數ノ逐差ヲ求ルキハ $d' = a, d'_2 = b - a = d_1, d'_3 = c - 2b + a = d_2,$ 等ヲ得此ニ由テ之ヲ $[n]$ 式ニ配スレハ左ノ式ヲ得

$$S \equiv na + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \cdot d_2 + \dots\dots\dots [B]$$

左ニ問題ヲ設テ [A] 兩公式ノ用法ヲ詳ニス

例一 一、五、十五、三十五、七十、一百二十六、等ノ級數第十二項ヲ問フ

運算

1, 5, 15, 35, 70, 126, 差 4, 10, 20, 35, 56, 逐 6, 10, 15, 21, 4, 5, 6, 1, 0,

此ニ由テ $n = 12, a = 1, d_1 = 4, d_2 = 6, d_3 = 4, d_4 = 1, d_5 = 0$. ナリ之ヲ [A] 式ニ配シ

各項ヲ約スキハ左ノ如シ

$$T_{12} = \begin{cases} 1 \\ + 44 \\ + 330 \\ + 660 \\ + 330 \end{cases} = 1365.$$

答 第十二項一千三百六十五

此級數ニテハ第五差以下ノ逐差總テ空數トナル故ニ公式第五項ニ底止ス

例二 一、三、六、十、十五、二十一、等ノ級數 n 項ニ至ル總數ヲ問フ

運算 前例ノ如ク逐差ヲ求ムニ $a=1, d_1=2, d_2=1, d_3=0$, ナ得之ヲ

[B] 式ニ配スレハ左ノ如シ

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

ガ故ニ此級數第三項ニ底止ス

乗除ヲ實算シ所得ノ式ヲ變換シハ左ノ答式ヲ得

$$\text{答 } \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

問題

第一 一、四、八、十三、十九、等ノ級數ノ第九項ヲ問フ

第二 一、四、十、二十、三十五、等ノ級數ノ第十五項ヲ問フ

第三 一、六、二十一、五十六、一百二十六、二百五十一、四百五十六、等ノ級數ノ第八項及ヒ第九項ヲ問フ

挿入法

第三百七十九條 挿入法ハ級數ノ兩外項ノ間ニ此級數ノ法ニ適ヘル項若干ヲ挿入スルノ法ナリ此法算學所用ノ諸表對數表八線表ノ類ナリヲ製スルキ及ヒ天學ノ算法ニ於テ所用最モ廣シ

第三百八十條 級數ノ兩項間ニ幾項ヲ挿入スルノ法ハ推差法ヲ施スコアリ凡ソ級數ノ第 n 項ヲ顯ス公式ハ第三百七十七條ノ $[m]$ 式是レナリ即チ左ノ如シ

$$T_{n+1} = a + nd_1 + \frac{n(n-1)}{2}d_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}d_3 + \dots$$

此式ニ於テ n ヲ分數トセハ所得ノ式已定ノ兩項間ニテ本級數ノ法ニ適ヘル一項ヲ得ヘシ若シ n ヲ一箇ヨリ小トセハ間項ハ第一項ト第二項トノ間ニ入り若シ n ヲ一箇ヨリ大ニシテ二箇ヨリ小トセハ間項ハ第二項ト第三項トノ間ニ入ル逐テ此ノ如シ

挿入法第一例

第三百八十一條

立方根五件

$$\sqrt[3]{(24)} = 2.884499, \sqrt[3]{(25)} = 2.924018 \quad \text{ヲ知テ中間數ノ立方根ヲ挿入法ニテ發}$$

見スルノ例ヲ示サントス

設令ハ二十一箇七分五厘ノ立方根ヲ求ルノ法左ノ如シ

數	根	方	立	d_1	d_2	d_3	d_4
21	2.758924						
22	2.802039			+.043115			
23	2.843867			+.041828	-.001287		
24	2.884499			+.040632	-.001196	+.000091	
25	2.924018			+.039519	-.001113	+.000083	-.000008

此ニ由テ公式 $u = 2.758924, u = .75, d_1 = +.043115, d_2 = -.001287, d_3 = +.000091,$

$d_4 = -.000008$ ヲ配スレハ二十一箇七分五厘ノ立方根ヲ得即チ $2.758924 + .03$

$9335 + .000121 + .000004 = 2.791385$ ヲ得是故ニ所要ノ立方根二箇七分九厘一

毫三絲八忽五微ナリ

若シ二十二箇ト二十三箇トノ間ナル數ノ立方根ヲ發見セント欲セハ其積數ト二十一トノ差トシ d_1, d_2 等ノ值ハ前ノ數ヲ用フヘシ然レモ若シ更ニ密合スル數ヲ得ント欲セハ二十二箇ヲ級數ノ首項トナシ之ニ對合スル逐差ヲ用フヘシ此時ニ於テハ必ス眞ノ分數ナリ

挿入法第一例問題

- 第一 二十一箇三分二厘五毫ノ立方根ヲ問フ
- 第二 二十一箇八分七厘五毫ノ立方根ヲ問フ
- 第三 二十一箇四分五厘六毫八絲ノ立方根ヲ問フ
- 第四 二十二箇二分五釐ノ立方根ヲ問フ
- 第五 二十二箇六分八釐四毫ノ立方根ヲ問フ
- 第六 二十二箇七分五釐ノ立方根ヲ問フ

挿入法第二例

第三百八十二條 毎日正午ト夜半トニ於テ日月ノ距度ヲ大地ヨリ見ルルハ左ノ如シトシテ中間時ノ日月距度ヲ發見スルノ法ヲ示サントス

第一日正午六十六度 六分三十八秒 夜半七十二度二十四分 五秒

第二日正午七十八度三十四分四十八秒 夜半八十四度三十九分 四秒

第三日正午九十度三十七分一十八秒 夜半九十六度二十九分五十七秒

茲ニ獨ル所ノ度分ハ毎十二時間ノ日月距度ナリ故ニ中間時ノ日月距度ヲ發見セント欲セハ公式中 n 十二中ノ分數トナサマルヲ得ス

設令ハ第一日午後三時ノ日月距度ヲ知ラント欲セハ $n = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ トシ

$a = 66^{\circ} 6' 38''$ トスルナリ又第二日午前六時ノ日月距度ヲ知ラント欲セハ

$n = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ トシ $a = 78^{\circ} 34' 59''$ トスルナリ又第二日午後三時ノ日月距度ヲ知

ラント欲セハ $n = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ トシ $a = 78^{\circ} 34' 59''$ トスルナリ

插入法第二例問題

- 第一 第一日午後三時ノ日月距度ヲ問フ
 第二 第一日午後六時ノ日月距度ヲ問フ
 第三 第一日午後九時ノ日月距度ヲ問フ
 第四 第二日午前三時ノ日月距度ヲ問フ
 第五 第二日午前六時ノ日月距度ヲ問フ
 第六 第二日午前九時ノ日月距度ヲ問フ
 第七 第二日午後三時ノ日月距度ヲ問フ
 第八 第二日午後六時ノ日月距度ヲ問フ
 第九 第二日午後九時ノ日月距度ヲ問フ

對數

第三百八十三條 方程式 $\log x = a$ ニ於テ a ハ一定不易ノ數ナリトシ x ノ値ノ消長變化ニ從テ x ノ値増減シテ兩節恒ニ適等ナルトキ x ヲ x ノ對數ト云ヒ a ヲ對數底ト云フ是故ニ一數ノ對數トハ對數底ト號スル一定數ヲ幾乗シテ本數ト適等ナラシムルニ必要ナル指數ナリ此ニ由テ a ノ値ヲ變セシテ x ノ各種ノ値ニ對合スル x ノ値各々一アリ是レ即チ一種ノ對數トナル

第三百八十四條 正數ハ總テ一種對數ノ底トナスヘシ其故何トナレハ方程式 $\log x = a$ ニ於テ a ニ適當ナル値ヲ配スルキハ a ノ値ニ係ラス x ノ各種ノ値ニ達テ兩節適等ナルガ故ナリ

是故ニ對數ノ種類限リ無シ

第三百八十五條 方程式 $\log x = a$ ニ於テ x ヲ x ノ幾乗 y ニ相當スル數トセハ y ハ整數ナリト雖モ否ラサレハ y ハ分數ナラサルヲ得ス

是故ニ對數ニ整數分ト小數分トアリ

第三百八十六條 對數ノ整數分ヲ對指數ト云ヒ小數分ヲ對加數ト云フ
 設令ハ對數底ナ5トセハ $5^{37384} = 5^1 \times 5^{37383} = 5 \times 37384$ ナルガ故ニ眞數 37384 ノ對數
 ハ 2.25 ニシテ對指數ハ 2 對加數ハ 25 ナリ

對數定理

第三百八十七條 各種ノ對數ニ通スル定理アリ今之ヲ考窮センガタメ對
 數底ヲ a トシ眞數ノ前ニ \log_a ト記シ以テ此眞數ニ對合スル對數ヲ顯ス

第一 一箇ノ對數ハ空數ナリ

論 $a = 1$ トセハ $a = \log_a 1$ 又第八十一條ニ依テ $a = 1$ ナレハ $a = 0$ ナル
 ナ知ル故ニ $\log_a 1 = 0$ ナリ

第二 對數底ノ對數ハ一箇ナリ

論 $a = a$ ナレハ $a = \log_a a$ ナリ又第十三條ニ依テ $a = a$ ナレハ $a = 1$ ナル
 ナ知ル故ニ $\log_a a = 1$ ナリ

第三 兩數ノ相乗積ノ對數ハ兩乘子ノ對數ノ和ニ等シ

論

$m = a^x, n = a^y$ トセハ $a = \log_a m, a = \log_a n$ ナリ又乘法ニ據テ $mn = a^{x+y}$ ナリ得

故ニ又 $\log_a(mn) = x + y$ ナリ此ニ由テ $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$ ナリ得

第四 除商ノ對數ハ法ノ對數ヲ實ノ對數ヨリ減シタル餘數ニ等シ

論 $m = a^x, n = a^y$ トセハ $a = \log_a m, a = \log_a n$ ナリ又除法ニ據テ $\frac{m}{n} = a^{x-y}$ ナリ得

故ニ又 $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = x - y$ ナリ此ニ由テ $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$ ナリ得

第五 冪數ノ對數ハ根數ノ對數ト乗指數トノ相乗積ニ等シ

論 $m = a^x$ トセハ $a = \log_a m$ ナリ又乗方ニ據テ $m^y = a^{xy}$ ナリ得故ニ

$\log_a(m^y) = xy = y \log_a m$ ナリ

第六 根數ノ對數ハ開指數ヲ以テ冪數ノ對數ヲ除シタル商ニ等シ

論 $m = a^x$ トセハ $a = \log_a m$ ナリ又開方ニ據テ $\sqrt[n]{m} = a^{\frac{x}{n}}$ ナリ得故ニ

$\log_a\left(\sqrt[n]{m}\right) = \frac{x}{n} = \frac{\log_a m}{n}$ ナリ

第三百八十八條 對數ノ用ハ算法ヲ簡捷ナラシムルニアリ即チ加法ヲ以

テ乘法ニ代ヘ減法ヲ以テ除法ニ代ヘ乘法ヲ以テ乘方法ニ代ヘ除法ヲ以テ開方法ニ代フルヲ得ヘシ若シ此簡法ヲ行ハントセハ豫メ對數表ヲ造テ某ヨリ某ニ至ル任意ナル眞數ノ對數ヲ容易ニ求メ或ハ任意ナル對數ニ對合スル眞數ノ畧近數ヲ求ルノ便ニ供スルヲ要ス當時刊行セル對數表ハ通例一ヨリ萬ニ至ル各眞數ノ對數ヲ小數以下六位迄載セタリ

原本爰ニ對數ノ算法ヲ載セタリト雖モ代數ノ理ニ關係ナキヲ以テ之ヲ省ク

常對數

第三百八十九條 正數ハ皆一種ノ對數底トナスヲ得ヘシト雖モ常用ノ對數ノ底ハ正數十箇ナリ此對數底ヲ具スル對數ヲ常對數ト云フ
此對數ノ外ニ訥白爾對數ト號スル對數アリ此種ノ對數甚タ理論ニ於テ緊要ナリトス是レ對數ヲ發明セシ算學家訥白爾ト曰ヘルヲ以テ名ククルナリ此種ノ對數ト他種ノ對數ト相關係スルノ理ヲ下條ニ論セントス

註 此書中常對數ハ底ヲ記サズ即チ \log ハ \log_{10} ノ畧ナリ

第三百九十條 常對數ノ便ナル所以ヲ左ニ示サントス

對數底十ナルガ故ニ $\log 1 \parallel \log 10^0 \parallel 0, \log 10 \parallel \log 10^1 \parallel 1, \log 100 \parallel \log 10^2 \parallel 2,$

$\log 1000 \parallel \log 10^3 \parallel 3, \log 10000 \parallel \log 10^4 \parallel 4$ 逐テ此ノ如シ

是故ニ一ト十トノ間ナル數ハ整數ニテモ混數ニテモ皆其對數全ク小數ナルベシ又十ト百トノ間ナル數ハ整數ニテモ混數ニテモ皆其對數一箇ト小數若干トナルベシ又百ト千トノ間ナル數ハ整數ニテモ混數ニテモ皆其對數二箇ト小數若干トナルベシ逐テ此ノ如シ此ニ由テ左ノ定理アリ

第一 整數及ヒ混數ノ常對數ノ對指數ハ正數ニシテ整數分ノ位ヨリ一ヲ減シタル餘數ニ等シ

又十ノ對數一ナルガ故ニ十ヲ以テ一數ヲ除シタル商ノ對數ハ實ノ對數ヨリ一ヲ減シタル餘數ニシテ小數分ニ變化ナカルベシ

設令ハ五千四百六十八ノ對數ノ小數分ヲ m トセハ $\log 5468 \parallel 3 + m$

$\log 546.8 = 2 + m, \log 54.68 = 1 + m, \log 5.468 = 0 + m$ ニシテ又 $\log 5468 = -1 - m,$
 $\log .05468 = -2 - m, \log .005468 = -3 - m,$ 逐テ此ノ如シ此ニ由テ左ノ定
 理アリ

第二 列數字同一ニシテ小數點ノ所在同シカラザル兩數ノ常對數ハ小數ノ
 分同一ニシテ對指數同シカラズ

第三 小數ノ常對數ノ對指數ハ負數ナリ而シテ小數ノ首位分位ニ起ラバ
 其對指數負一箇ナリ然レハ小數點ト首數字トノ間ニ零位アラバ對指數ハ
 零位ノ數ヨリ一箇多シ

第三百九十一條 小數ノ對數ヲ顯スニ負符ヲ對指數ノ前ニ記シ小數分即
 チ正數分ヲ其後ニ記スト雖ニ其間ニ正符ヲ置カズ設令ハ

$\log .0546 = -2.737193$ 此ノ如ク記スルノ類ナリ此負符ハ對指數シノ負數
 ナルコトヲ顯スモノニテ $-2 + 7.37193$ 此ノ如ク記スルモノト意義同一
 ナリ

對數問題

第一 對數底三ナルキハ八十一箇ノ對數如何

第二 對數底二ナルキハ九箇ノ對指數如何

第三 對數底七ナルキハ五百箇ノ對指數如何

第四 $\log 2 = .301030, \log 3 = .477121$ ナンキ $\log 6$ ノ値如何

第五 常對數ニテ三箇ノ對數ハ零箇四七七一一ナリト云フ由テ問フ三
 百箇及ヒ三釐ノ對數如何

第六 常對數ニテ二箇ノ對數ハ零箇三〇一〇三〇ナリト云フ由テ問フ二
 箇ノ三乘根ノ對數如何

第七 $\log 2 = .301030$ ナンキ $1/(1.25), .0025, \sqrt{(.0125)}$ ノ常對數各如何

求對數法

第三百九十二條 對數ヲ用ヒテ算法ヲサント欲セハ必ズ對數表ナカル
ベカラズ此ニ由テ數多相連續スル數ノ對數ヲ作ルコトヲ要ス其法已知數ヲ

以テ各對數ヲ顯ス所ノ級數ヲ求ルニアリ

§ 1 於テ a ハ n ノ對數 a ハ對數底ナリ今又 $a \parallel 1+c, n \parallel 1+p$ トセハ

$(1+c)^n \parallel 1+p$ [一]ヲ得此式ニ於テ a ハ $1+p$ ノ對數其對數底ハ a ナリ今 [二]式ノ兩

節ヲ n 乗シ二項法ニ據テ詳式ヲ求ムルハ左ノ如シ

$$(1+c)^n \parallel (1+p)^n$$

$$1 + nxc + \frac{n(n-1)}{2} c^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} c^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} c^4 + \dots$$

$$\parallel 1 + np + \frac{n(n-1)}{2} p^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} p^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} p^4 + \dots$$

此式ノ兩節ヨリ一箇ヲ減シ n ヲ以テ餘リヲ除スレハ左ノ如シ

1

$$a(c + \frac{(nx-1)}{2} c^2 + \frac{(nx-1)(nx-2)}{3} c^3 + \frac{(nx-1)(nx-2)(nx-3)}{4} c^4 + \dots)$$

$$\parallel p + \frac{(n-1)}{2} p^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{3} p^3 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4} p^4 + \dots$$

此式 n ノ值ニ係ラズ兩節適等ナリ故ニ $n \parallel 0$ トセハ左ノ式ヲ得

$$n(c - \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} - \frac{c^4}{4} + \dots) \parallel p - \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4} + \dots \quad [1]$$

又 [二]式ヨリ $a \parallel \log_a(1+p)$ ヲ得由テ若シ $M =$

$$\frac{1}{c - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{3}c^3 - \frac{1}{4}c^4 + \frac{1}{5}c^5 - \dots} \quad [2]$$

$$\text{トセハ [三]式ヨリ } \log_a(1+p) \parallel M(p - \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4} + \frac{p^5}{5} - \dots) \quad [A] \text{ヲ得}$$

是故ニ $1+p$ 即チ n ノ對數ヲ顯ス所ノ級數式ヲ得此式兩乘子ノ乘積ニシテ其

一乘子ハ真數ニ因テ定リ他ノ一乘子 m ハ對數底ニ因テ定ルナリ

第三百九十三條 若シ M ノ值ヲ定ルハ對數底モ從テ定リ其值推算シ得
ベキヲ明ナリ訥白爾氏ハ之ヲ一箇ト定ム今此定則ニ從テ對數底ヲ求メシ

ガタメ前條ニ示セシ(四)式ノMチ一箇トセハ $1 = e - \frac{e^2}{2} + \frac{e^3}{3} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^5}{5} - \dots$ ヲ得

又 $s = 1$ トセハ $s = e - \frac{e^2}{2} + \frac{e^3}{3} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^5}{5} - \dots$ ヲ得互求法ニ據テ左ノ式ヲ作ル

$$e = s + \frac{s^2}{1.2} + \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^4}{1.2.3.4} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} + \dots \quad \text{此式ノ } s \text{ニ値ヲ配スレハ}$$

$$e = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \dots \quad \text{ヲ得此級數十二項ヲ取テ}$$

eノ略近數ヲ求ムレハ1.7182818ヲ得然ルニ對數底ハ1+eナルガ故ニ此得數ニ一箇ヲ加ヘ所得ノ和チeトセハ $e = 2.7182818$ ヲ得但シeハ訥白爾對數ノ底ヲ顯ス定符號ナリ

第三百九十四條 公式[A]ニ於テ對數底ニ由テ定ル所ノ乘子Mヲ對數根ト曰フ訥白爾對數ハ對數根一箇ナリ

$$\log_e(1+p) = M\left(p - \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4} + \frac{p^5}{5} - \dots\right) \quad \text{〔一〕} \quad \text{此ニ由テ}$$

$$\log_e(1+p) = \left(p - \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4} + \frac{p^5}{5} - \dots\right) \quad \text{〔一〕} \quad \text{ナリ此〔二〕式ヲ以テ〔一〕式ヲ除スレハ}$$

$$M = \frac{\log_e(1+p)}{\log_e(1+p)} \dots \dots \dots \quad \text{〔二〕} \quad \{ \log_e(1+p) \} \times M = \log_e(1+p) \quad \text{〔四〕} \quad \text{ヲ得此〔四〕式}$$

中ナルMハ後節ナル對數ノ根ヲ顯スナリ

是故ニ各種對數ノ根ハ訥白爾對數ヲ變シテ其種ノ對數トナスヘキ一定ノ乘率ナリ

第三百九十五條 公式[A]ニ依テ對數ヲ求メントスルモpノ値一箇ヨリ小ナルニアラサレハ能ハス其故何トナレハpノ値若シ一箇ヨリ大ナレハ發級數トナルガ故ナリ然レハ此級數ヲ變化シテ恆ニ斂收スル所ノ級數トナスヲ得其法左ノ如シ

$$\log_e(1+p) = M\left(p - \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4} + \frac{p^5}{5} - \dots\right) \quad \text{〔一〕} \quad \text{此式ノ } p \text{ヲ} -p \text{ニ改ムレハ}$$

$$\log_e(1-p) = M\left(-p - \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4} - \frac{p^5}{5} - \dots\right) \quad \text{〔二〕} \quad \text{ヲ得此〔二〕式ヲ〔一〕式ヨリ減$$

$$2 \log_p (1+p) - \log_p (1-p) = \log_p \left(\frac{1+p}{1-p} \right) \text{ナルガ故}$$

$$\log_p \left(\frac{1+p}{1-p} \right) = 2M \left(p + \frac{p^3}{3} + \frac{p^5}{5} + \frac{p^7}{7} + \dots \right) \quad (1) \text{ヲ得今又 } p = \frac{1}{2z+1} \text{トセハ}$$

$$\frac{1+p}{1-p} = \frac{z+1}{z} \text{トナルヲ以テ (3) 式ノ } \frac{1+p}{1-p} \text{ニ代用セハ}$$

$$\log_p \left(\frac{z+1}{z} \right) = 2M \left(\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3(2z+1)^3} + \frac{1}{5(2z+1)^5} + \frac{1}{7(2z+1)^7} + \dots \right) \quad (4) \text{ヲ得}$$

此方程式ノ前節ハ $\log_p (z+1) - \log_p z = \log_p \frac{z+1}{z}$ ニ同シ由テ

$$\log_p (z+1) - \log_p z = 2M \left(\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3(2z+1)^3} + \frac{1}{5(2z+1)^5} + \frac{1}{7(2z+1)^7} + \dots \right) \quad (B)$$

ヲ得此級數速ニ斂收スルモノニシテ訥白爾對數及ヒ他種ノ對數ヲ算スルニ實ニ便ナリ

對數表ヲ造ラント欲セハ先ツ $\log_p z \parallel 1$ トスヘシ此時ニ於テハ $\log_p z \parallel 0$ ニシテ公式(B)ヨリ $\log_p (z+1)$ 即チ $\log_p 2$ ノ値ヲ得ヘシ次ニ $\log_p 3$ トセハ公式(B)ヨリ

$\log_p (z+1)$ 即チ $\log_p 3$ ノ値ヲ得ヘシ逐テ此ノ如シ

凡ソ對數ハ其種類ニ係ラズ幾乗子ノ乘積ニ分開スル能ハザル數ノ對數ノミチ公式ヨリ求ムレバ可ナリ其故何トナレハ第三百八十七條定理第三ニ據テ幾乗子ニ分開スルヲ得ベキ數ノ對數ハ其諸乗子ノ對數ヲ相合スレハ則チ得ベキナ知ルガ故ナリ

第三百九十六條 今二、四、五、及ヒ十ノ訥白爾對數ヲ算シテ公式(B)ノ用法ヲ示サントス

$$z \parallel 1 \text{トセバ } \log_p z \parallel 0 \text{ニシテ } \log_p (z+1) \parallel \log_p 2 \text{ナリ又 } M \parallel 1 \text{ナルガ故ニ}$$

$$\log_p 2 = 2 \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \dots \right) \text{ナリ}$$

左ニ $\frac{2}{3}$ ト 3^2 即チ9ヲ以テ $\frac{2}{3}$ ヲ連除シタル商トヲ以テ一行ヲ作り第一數ヲ一除シ第二數ヲ三除シ第三數ヲ五除ス逐テ此ノ如クシテ級數ノ各項ヲ求メ然ル後チ第三百八十七條定理第五ニ依テ末段ノ對數ヲ作ル

第三百九十七條 常對數ヲ算セント欲セハ先ツ常對數ノ根ヲ求メサルヲ
得メ山テ第三百九十四條(三)式ヨリ

$$\begin{array}{rcl}
 9^2 = 81 & 9 \overline{) 2} & \\
 81 & 0.22222222 \div 1 = & .22222222 \\
 81 & 274348 \div 3 = & 91449 \\
 & 3387 \div 5 = & 677 \\
 & 42 \div 7 = & 6 \\
 & \hline & .22314354 & \\
 \log_e 4 = & 1.38629436 & \\
 \log_e 5 = & 1.60943790 & \\
 \log_e 2 = & .69314718 & \\
 \log_e 10 = & 2.30258508 &
 \end{array}$$

第三百八十七條定理第三ニ依テ
末段ノ對數ヲ造ル

次ニ又
 $\log_5 2 = \frac{1}{1.9} + \frac{1}{3.9^2} + \frac{1}{5.9^3} + \frac{1}{7.9^4} + \dots$
 此ニ由テ

$$\begin{array}{rcl}
 3^2 & 90.66666666 \div 1 = & .66666666 \\
 9 & 7407407 \div 3 = & 2469136 \\
 9 & 823045 \div 5 = & 164609 \\
 9 & 91449 \div 7 = & 13064 \\
 9 & 10161 \div 9 = & 1129 \\
 9 & 1129 \div 11 = & 103 \\
 9 & 125 \div 13 = & 10 \\
 & 14 \div 15 = & 1 \\
 & \log_e 2 = & .69314718 \\
 & & 2 \\
 & \log_e 4 = & 1.38629436
 \end{array}$$

$N = \frac{\log_e (1+p)}{\log_e (1+p)}$ 求メ此式ニ常對數ノ底 $1+p$ 10ナ配スルハ左ノ如シ

$M = \frac{1}{2.30258508} = .43429448$ (一) 是レ所要ノ常對數ノ根ナリ之ヲ以

テ公式(B)ノMニ代用セハ常對數ノ公式ヲ得即チ左ノ如シ

$\log (z+1) - \log z =$

$$.86858896 \left(\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3(2z+1)^2} + \frac{1}{5(2z+1)^3} + \frac{1}{7(2z+1)^4} + \dots \right) \quad (C)$$

公式(C)ノ應用ヲ示サンガタメ $z=10$ トセハ $\log z=1, 2z+1=21$ ナリ由テ

21 .86858896

21² = 441 .04136138 + 1 = .04136138

441 9379 ÷ 3 = 3126

21 ÷ 3 = 4

.04139268

$\log z = 1.0$

$\log (z+1) = 1.04139268 = \log 11$

若シ又 $z=99$ トセハ $z+1=100, 2z+1=199$ トナル面シテ

$\log (z+1) - \log z = \log 100 - \log 99 = 2 - \log 99$ ナルガ故ニ公式(C)ヨリ九十九ノ對

數ヲ求メ得ルニ

199 .86858896

199² = 39601 436477 ÷ 1 = .00436477

11 ÷ 3 = 4

2 - $\log 99 = .00436481$ 此數ヲ2ヨリ減ス

$\log 99 = 1.99563519$

$\log 11 = 1.04139268$

$\log 9 = .95424251$

$\frac{1}{2} \log 9 = \log 3 = .47712126$

第三百八十七條定理第六ニ據テ

此對數ヲ求ム

對數問題

第一 $\log_e(x+1) = {}^2\log_e x - \log_e(a-1) - {}^2\left\{ \frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2x^2-1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2x^2-1} \right)^5 + \dots \right\}$
 上式ノ證ヲ問フ

第二 $\log_e(x+2x) = {}^2\log_e(x+z) - \log_e x - M \left\{ \frac{z^2}{(x+z)^2} + \frac{1}{3} \frac{z^4}{(x+z)^4} + \frac{1}{5} \frac{z^6}{(x+z)^6} + \dots \right\}$
 上式ノ證ヲ問フ

第三 三數 a, b, c ナ連續數トセハ左ノ式ヲ得此作法ヲ問フ

$$\log_e c = {}^2\log_e b - \log_e a - {}^2\left\{ \frac{1}{2ac+1} + \frac{1}{3(2ac+1)^3} + \frac{1}{5(2ac+1)^5} + \dots \right\}$$

指數方程式

第三百九十八條 未知元ヲ指數ニ具スル方程式ヲ指數方程式ト云フ左ニ
 對數ヲ用ヒテ指數方程式ヲ解スルノ例ヲ示サントス

例一 $\log 2 = .301030$ ナルヲ知テ方程式 $x = 10$ ヨリ x ノ値ヲ發見スヘシ
 解法 方程式ノ兩節ノ常對數ヲ求ルトセハ $x \log 2 = \log 10 = 1$ ナ得第
 三百八十七條定理第五及ヒ第二ヲ見ヨ此ニ由テ

$$x = \frac{1}{\log 2} = \frac{1}{.301030} = 3.3219 \text{ ナリ}$$

答 三箇三分二釐一毫九絲餘

例二 $\log 2.5 = 1.397940, \log 3 = .477121, \log 7 = .845098$ ナルヲ知
 テ方程式 $5^x = \frac{3}{7}$ ヨリ x ノ値ヲ發見スヘシ

解法 方程式ノ兩節ヲ乘セハ $5^{3x} = \frac{3^3}{7^3}$ ナ得此式ノ兩節ノ常對數

ヲ求ムレハ $\log 25 = x \log 3 - x \log 7$ ナ得此ニ由テ

$$x = \frac{\log 25}{\log 3 - \log 7} = \frac{1.397940}{.477121 - .845098} = 3.79899 + \text{ナリ}$$

答 負三箇七分九釐八毫九絲九忽餘

例三 $ax = b$ 上ノ方程式ヨリ a, b, c, r ノ常對數ヲ以テ x ノ値ヲ顯ス所

ノ式ヲ求ムヘシ

解法 方程式ノ兩節ノ常對數ヲ求ムレハ

$$\log r + x \log a = 2 \log b + \log c \text{ ナ得此ニ由テ答式左ノ如シ}$$

答 $x = \frac{2 \log b + \log c - \log r}{\log a}$

問題

第一 $\log 7 = .845098, \log 2 = .301030$ ナルコヲ知テ方程式 $x^2 = \infty$ ヨリ x ノ値ヲ發見スヘシ

第二 $\log 25 = 1.397940, \log 3 = .477121$ ナルコヲ知テ方程式 $x^2 = 30$ ヨリ x

ノ値ヲ發見スヘシ

第三 $c^x = 7x^2$ 上ノ方程式ヨリ已知元ノ常對數ヲ以テ x ノ値ヲ顯ス所ノ式ヲ求ムレハ如何

第四 $ab^x = c$ $\frac{1}{a} = \frac{1}{c}$ 上ノ方程式ヨリ已知元ノ常對數ヲ以テ x ノ値ヲ顯ス所

ノ式ヲ求ムレハ如何

第五 $mx^m = b$ 上ノ方程式ヨリ a, m ノ常對數ヲ以テ x ノ値ヲ顯ス所ノ

式ヲ求ムレハ如何

第六 $ce^x + b^x = 2c, a^x - b^x = 2d$ 上ノ兩方程式ニ合フ所ノ x ノ値ヲ已知

元ノ常對數ヲ以テ顯ス所ノ式ヲ求ムレハ如何

第七 方程式 $7x^2 = 1$ $\frac{1}{3}$ ヨリ x ノ値ヲ發見スヘシ

第八 $216^x = 12$ 上ノ方程式ヨリ六ト十二トノ常對數ヲ以テ x ノ値ヲ顯

ス所ノ式ヲ求ムレハ如何

第九 $516 \frac{2}{3} \parallel 12$ 上ノ方程式ヨリ十二ト四十三トノ常對數ヲ以テ α ノ値
ヲ顯ス所ノ式ヲ求ムレハ如何

第十 $6 \frac{24}{71} \parallel (17)^3$ 上ノ方程式ヨリ二十四十七七十一六ノ常對數ヲ以
テ α ノ値ヲ顯ス所ノ式ヲ作ラハ如何

○連分數

第三百九十九條 連分數ハ繁分數ノ一種ニシテ分母ノ形狀次第ニ混數ヲ

ナスモノヲ云フ設令ハ $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \dots}}}}$ 此ノ如シ

分數 $\frac{1}{b} \frac{1}{c} \frac{1}{d}$ 等ヲ連分數ノ各項ト云フ此項數限リアラハ有限連分數
ト云ヒ限リナキハ無限連分數ト云フ

此書中連分數ヲ顯スノ法ヲ $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \dots}}}}$ 此ノ如ク定ム

第四百條 連分數ヲ生ズルノ例限リナシト雖モ多クハ整數ニアラザル數
ノ略近ノ値ヲ級數ニテ求ルハニアリ若シ斯ル數ヲ a トシ之ニ次ク整數ヲ
 a' トセバ $a' - a$ ナル之ヲ b' トス此數若シ整數ナラザレ
バ之ニ次ク整數ヲ b トセバ $b' - b$ ナリ故ニ又 $\frac{1}{b' - b} \sqrt{1}$ トナル之ヲ c'

トス此數若シ整数ナラザレバ之ニ次グ整数ヲセバ $c' - c$ トナリ故ニ

又 $\frac{1}{c' - c} \wedge$ トナル之ヲ d' トス逐テ此ノ如ク同法ヲ施サバ $\frac{1}{c' - c} = \frac{1}{b'}$ ナル

ガ故ニ $a' - c = \frac{1}{b'}$ ヲ得由テ又 $a' = c + \frac{1}{b'}$ ヲ得又 $\frac{1}{b' - b} = c' - c$ ナルガ故ニ $a'b' - b = \frac{1}{c'}$

ヲ得由テ又 $b' = b + \frac{1}{c'}$ ヲ得又 $\frac{1}{c' - c} = d'$ ナルガ故ニ $a' - c = \frac{1}{d'}$ ヲ得由テ又

$a' = c + \frac{1}{d'}$ ヲ得同理ヲ推シテ $a' = c + \frac{1}{d'}$ 等ヲ求ルヲ得以上求メ得タル b'

c' 等ノ値ヲ順次ニ初ノ式ニ配スレバ左ノ連分數ヲ得

$$a' = a + \frac{1}{b'} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c'}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d'}}}$$

逐テ此ノ如シ此ニ由テ

$$a' = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \dots}}}}$$

ナリ

第四百一條 常分數ヲ連分數ニ改ルヲ得其法分母子ニテ最大公約數ヲ求ルノ法ヲ行フナリ設令バ常分數ヲ $\frac{A}{B}$ トシ順次ニ得ル所ノ除商ヲ a, b

c, d 等トシ之ニ對合スル餘數ヲ C, D, E, F 等トセ $A = aB + C, B = bC + D, C = cD + E, D = dE + F$ 逐テ此ノ如シ由テ $\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}, \frac{C}{B} = b + \frac{D}{C}, \frac{D}{C} = c + \frac{E}{D}, \frac{E}{D} = d + \frac{F}{E}$ 逐テ此ノ如シ故ニ $\frac{C}{B} = 1 + \frac{D}{C}, \frac{D}{C} = 1 + \frac{E}{D}, \frac{E}{D} = 1 + \frac{F}{E}$ 等

ニ是故ニ $\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B} = a + \frac{1}{\frac{B}{C}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{\frac{C}{D}}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{\frac{D}{E}}}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{\frac{E}{F}}}}}$ ヲ得由テ $\frac{A}{B} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \dots}}}}$

ナリ若シ C, D, E, F 等ノ中チ空數ナルモノアラハ連分數ノ尾項茲ニ止リ有限連分數ヲ得ルナリ

例一 分數十一分之二十五ヲ連分數ニ改ムレバ如何

運算

$$\begin{array}{r} 11 \overline{) 25} (2 \\ \underline{22} \\ 3 \end{array} \begin{array}{r} 11 \overline{) 3} (3 \\ \underline{9} \\ 2 \end{array} \begin{array}{r} 3 \overline{) 1} (1 \\ \underline{2} \\ 1 \overline{) 2} (2 \\ \underline{2} \\ 0 \end{array}$$

故ニ $\frac{25}{11} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$ ヲ以テ所要ノ連分數トス

例二 分數三十七之二十五ヲ連分數ニ改ムレバ如何

運算 此分數ハ分子小ナルカ故ニ第一除商ハ空ナリ而シテ他ノ商
 $11 \frac{1}{12}$ ニナリ故ニ $\frac{25}{37} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12}}}$ ヲ以テ所要ノ連分數トス

連分數問題一

第一 十五分之三十七ヲ連分數ニ改ムレバ如何

第二 二十九分之十三ヲ連分數ニ改ムレバ如何

第三 三十五分之一百十一ヲ連分數ニ改ムレバ如何

第四百二條 有限連分數ハ容易ニ常分數ニ還原スルヲ得設令ハ前條ニ
 示ス所ノ第一例ノ連分數ヲ取テ常分數ニ還原スルノ法左ノ如シ

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ 此ニ由テ } \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \text{ ヲ得故ニ } 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\text{ナリ又 } 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{\frac{11}{3}} = 2 + \frac{3}{11} = \frac{25}{11} \text{ ヲ得故ニ常分數ニ還原シ得タリ}$$

第四百三條

常分數ヲ $\frac{U}{V}$ トシ之ヲ等シキ連分數ノ各項ノ分母ヲ a, b, c, d 等トセハ $\frac{U}{V} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \dots}}}$ ナリ此連分數ノ數項ヲ取テ常分數ニ

ニ還原セハ此分數ノ略近ノ値ヲ得ヘシ今 $a, b, c, d, \dots, p, q, r$ ノ各項ニ止
 ル連分數ヲ還原シテ作レル常分數ヲ各々 $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \frac{D}{D'}, \dots, \frac{P}{P'}, \frac{Q}{Q'}$

$$\frac{R}{R'} \text{ トセハ } \frac{A}{A'} = \frac{a}{1}, \frac{B}{B'} = a + \frac{1}{b} = \frac{ab+1}{b}, \frac{C}{C'} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{(ab+1)c+a}{bc+1} \text{ 等ヲ得此諸}$$

分數ヲ各次漸近分數ト云フ

又前所得ノ式ニ依テ $\frac{Q}{Q'} = \frac{Be+A}{Be+A'}$ ナルヲ知ル此ニ由テ各次漸近分數ヲ求ル
 ノ法ヲ定ムルヲ左ノ如シ

任次ノ漸近分數ノ分子ハ此漸近分數ニ對合スル連分數ノ一項ノ分母ヲ前
 次ノ漸近分數ノ分子ニ乘シ所得ノ乘積ニ前二次ノ漸近分數ノ分子ヲ加ヘ
 タル總數ナリ又分母ヲ求ムルモ之ニ同シ唯分子ヲ分母ニ換フルノミ

今四次連續スル漸近分數ヲ $\frac{P}{Q} \frac{R}{R'} \frac{S}{S'} \frac{T}{T'}$ 前法ハ $\frac{R}{R'}$ ヲ求ルニ施シテ錯リナシトシテ更ニ $\frac{S}{S'}$ ヲ求ルハ施シテ錯リナキヲ證明セシトス即チ $\frac{R}{R'} = \frac{Qr+P}{Qr'+P'}$ トシテ $\frac{S}{S'} = \frac{Rr'+Q}{Rr'+Q'}$ ナルヲ證明セントス

漸近分數 $\frac{R}{R'}$ ハ連分數ノ列項チ $\frac{1}{r}$ ニ止ルモノニシテ漸近分數 $\frac{S}{S'}$ ハ連分數ノ列項チ $\frac{1}{s}$ ニ止ルモノナリ由テ $\frac{S}{S'} \frac{R}{R'}$ ニ異ナル所唯 $\frac{1}{s}$ ノ位置

$$\frac{r}{s} + \frac{1}{s} \text{ ヲ有スルノミナリ故ニ } \frac{S}{S'} = \frac{Q(r+\frac{1}{s})+P}{Q(r'+\frac{1}{s})+P'} = \frac{(Qr+P)s+Q}{(Qr'+P')s+Q'} = \frac{Rs+Q}{R's+Q'}$$

ナル由テ前法若シ $\frac{R}{R'}$ ヲ求ルニ施スヘケレハ又 $\frac{S}{S'}$ ヲ求ルニモ施スヘシ然ルニ前法ハ $\frac{C}{C'}$ ヲ求ムルニ施スヘキハ前ニ示ス所ノ如シ由テ前法ハ $\frac{D}{D'}$ ヲ求ルニ施スヘク又推シテ $\frac{E}{E'}$ ヲ求ルニ施スヘシ逐テ此ノ如シ是故ニ前法ハ公法ナルヲ證明ス

例一 分數三十一分之七十一ヲ連分數ニ改テ各次漸近分數ヲ發見スヘシ

運算

$$\frac{71}{31} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$$

故ニ

$$\begin{aligned} \frac{A}{A'} &= \frac{2}{1} \\ \frac{B}{B'} &= 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \\ \frac{C}{C'} &= \frac{2B+A}{2B'+A'} = \frac{2 \times 7 + 2}{2 \times 3 + 1} = \frac{16}{7} \\ \frac{D}{D'} &= \frac{4C+B}{4C'+B'} = \frac{4 \times 16 + 7}{4 \times 7 + 3} = \frac{71}{31} \end{aligned}$$

母	分	ノ	項	各
	2,	3,	2,	4.
數	分	近	漸	
$\frac{1}{0'}$	$\frac{2}{1'}$	$\frac{7}{3'}$	$\frac{16}{7'}$	$\frac{71}{31'}$
輔	第一	第二	第三	第四
分	次	次	次	次
數				

此ニ由テ若シ輔分數 $\frac{1}{0}$ ヲ設クルハ第二次以下各次漸近分數皆同法ニテ求メ得ヘシ其法左ノ如シ

解 輔分數 $\frac{1}{0}$ ハ第二漸近分數 $\frac{B}{B'}$ ヲ前法ニテ求メンガタメ設ルナリ第一漸近分數 $\frac{A}{A'}$ 即チ $\frac{2}{1}$ ハ恆ニ連分數第一項ニ同シ第二漸近分數 $\frac{B}{B'}$ ハ連分數第二項ノ分母 3 ヲ以テ第一漸近分數ノ分子 2 ニ乘シ所得ノ乘積 6 ニ輔分數ノ分子 1 ヲ加ヘ所得ノ和 7 ヲ分子トシ又連分數第二項ノ分母 3 ヲ以テ第一漸近分數ノ分母 1 ニ乘シ所得ノ乘積 3 ニ輔分數ノ分母 0 ヲ加ヘ所得ノ和 3 ヲ分母ト

スルナリ第三漸近分數 $\frac{0}{1}$ ハ連分數第三項ノ分母 2 ナリ以テ第二漸近分數ノ分子 7 ニ乗シ所得ノ乘積 14 ニ第一漸近分數ノ分子 2 ナリ加ヘ所得ノ和 16 ナリ分子トシ又連分數第三項ノ分母 2 ナリ以テ第二漸近分數ノ分母 3 ニ乗シ所得ノ乘積 6 ニ第一漸近分數ノ分母 1 ナリ加ヘ所得ノ和 7 ナリ分母トスルナリ次ニ第四漸近分數 $\frac{1}{1}$ 即チ原分數ヲ求ムルノ法亦前ノ如ク同シ

答 第一次一分之二、第二次三分之七、第三次七分之十六、第四次三十一分之七十一

例二 分數一百二十五分之五十四ヲ連分數ニ改テ各次漸近分數ヲ發見スヘシ

運算 連分數ノ各項ノ分母 0 2 3 5 1 2 ナルガ故ニ第一漸近分數 $\frac{A}{A}$ ハ 0 1 即チ空數ナリ

0, 2, 3, 5, 1, 2, 母分ノ項各數分連

$\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{16}{37}, \frac{19}{44}, \frac{54}{125}$ 數分近漸次各

第一次空、第二次二分之一、第三次七分之三、第四次五十七分之十六、第五次四十四分之十九、第六次百二十五分之五十四

連分數問題二

第一 分數四十分之一百十一ヲ連分數ニ改テ各次漸近分數ヲ發見スヘシ
第二 分數五十七分之十七ヲ連分數ニ改テ各次漸近分數ヲ發見スヘシ
第三 分數八百八十七分之一千百零三ヲ連分數ニ改テ各次漸近分數ヲ發見スヘシ

第四 分數二萬零九百二十九分之八萬六千四百ヲ連分數ニ改テ各次漸近分數ヲ發見スヘシ

第四百四條 連續スル兩漸近分數ヲ取テ前ノ分子ニ後ノ分母ヲ乗シタル乘積ヨリ後ノ分子ニ前ノ分母ヲ乗シタル乘積ヲ減セバ所得ノ餘數恒ニ一箇ナリ然レニ每次必ス正負ヲ變換ス

論 連續スル三漸近分數ヲ $\frac{P}{P'} \frac{Q}{Q'} \frac{R}{R'}$ トシ前兩分數ノ分母子ヲ交互ニ相乗セシ乘積ノ差ヲ $PQ' - P'Q = D_1$ トセバ前條ノ法ニ由テ $\frac{R}{R'} = \frac{Q' + P'}{Q + P'}$ ナルヲ知ル故ニ $QR' - Q'R = Q(Q' + P') - Q'(Q + P) = QP' - PQ = D_2$ ナリ是故ニ $D_1 = -D_2$ ナルヲ明ナリ然ルニ第一漸近分數 $\frac{A}{A'}$ ハ $\frac{a}{a-1}$ ニ第二漸近分數 $\frac{B}{B'}$ ハ $\frac{ab+1}{b}$ ナルガ故ニ此兩分數ノ分母子ヲ交互ニ相乗セシ乘積ノ差ハ $ab - (ab+1) = -1$ トナル此ニ由テ第二第三ノ兩漸近分數 $\frac{B}{B'} \frac{C}{C'}$ ノ分母子ヲ交互ニ相乗セシ乘積ノ差ハ $+1$ ナルヲ知ル由テ又第三第四ノ兩漸近分數 $\frac{C}{C'} \frac{D}{D'}$ ノ分母子ヲ交互ニ相乗セシ乘積ノ差ハ -1 ナルヲ知ル逐テ此ノ如シ是故ニ $PQ' - PQ$ 亦 $+1$ 或ハ -1 ナルヲ明ナリ

第四百五條 連續スル兩漸近分數ノ前分數若シ奇數次號ナレバ此兩漸近分數ノ分母子ヲ交互ニ乗シタル乘積ノ差(前分子後分母ノ乘積ヨリ前)負數一箇ナリ若シ偶數次號ナレバ正數一箇ナリ

前條ノ理ニ由テ第一第二兩漸近分數ノ分母子ヲ交互ニ乗シタル乘積ノ差ハ負數一箇ナリ又第二第三兩漸近分數ノ分母子ヲ交互ニ乗シタル乘積ノ差ハ正數一箇ナルヲ知ル是故ニ P/P' 若シ偶數次號ノ分數ナレバ $PQ' - PQ = +1$ 即チ $D_1 = 1$ ナルヲ知ル然ルニ $D_1 = -D_2$ ナルガ故ニ $D_2 = -1$ ナルヲ明ナリ

今第四百三條ノ例二ノ第三第四兩漸近分數ヲ取テ前條ノ理并ニ本條ノ理ヲ驗明セントス

$$\frac{C}{C'} = \frac{3D}{7D'} = \frac{16}{37} \quad \text{ナリ故ニ} \quad CD' - C'D = 11 - 12 = -1 \quad \text{ヲ得}$$

第四百六條 各次漸近分數ノ倒數亦第四百四條ニ述ル所ノ定理ニ合フ

論 設令ハ兩分數 $\frac{P}{P'}$ ト $\frac{Q}{Q'}$ トヲ取テ分母子ヲ交互ニ乗シ所得ノ乘積ノ差ヲ求ムレハ $PQ - P'Q' = D_1$ ト得然ルニ又兩分數 $\frac{Q}{Q'}$ ト $\frac{R}{R'}$ トヲ取テ分母子ヲ交互ニ乗シ所得ノ乘積ノ差ヲ求ムレハ $QR - Q'R' = D_2$ ト得是故ニ D_1 ト D_2 ト正負ノ號ヲ異ニス

第四百四條ノ D_1 ト D_2 ト正負ノ號ヲ異ニス

第四百七條 各次漸近分數皆分數最簡式ナリ

論 漸近分數 $\frac{P}{P'}$ 若シ偶數次號ナレハ $PQ' - P'Q = +1$ ナリ若シ又漸近分數 $\frac{P}{P'}$ 奇數次號ナレハ $PQ' - P'Q = -1$ ナリ故ニ若シ P/P' ノ兩數ニ公約數アラハ此公約數ハ一箇ヲ約スヘキ數ナラサルヲ得ス此ニ由テ P/P' ノ兩數ハ公約數ヲ有スルヲナシ故ニ P/P' ハ分數最簡式ナリ

第四百八條 連續スル兩漸近分數ノ分子公約數ヲ有スルヲナシ分母亦公約數ヲ有スルヲナシ

論 連續スル兩漸近分數 $\frac{P}{P'}$ ト $\frac{Q}{Q'}$ トニハ $PQ' - P'Q = +1$ ナルガ故ニ P/Q 若シ $\frac{P}{P'}$ ト $\frac{Q}{Q'}$ ノ兩數ニ公約數アラハ此公約數ハ亦必ス一箇ノ約數ナリト

曰ハザルヲ得ズ由テ P/Q ノ兩數及ヒ P'/Q' ノ兩數ハ何レモ公約數ヲ有スル數ニアラズ

第四百九條 連續スル兩漸近分數ヲ取テ前ノ分數ヨリ後ノ分數ヲ減シタル餘數ハ兩分數ノ分母ノ相乘積ヲ分母トシ一箇ヲ分子トスル分數ニシテ前分數若シ奇數次號ナレハ負數トナリ偶數次號ナレハ正數トナル

論 連續スル兩漸近分數 $\frac{P}{P'}$ ト $\frac{Q}{Q'}$ トセハ第四百五條ノ理ニ依テ

$\frac{P}{P'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{PQ' - P'Q}{P'Q'}$ ト得但シ P/P' 若シ奇數次號ノ分數ナレハ負號ヲ

取リ偶數次號ノ分數ナレハ正號ヲ取ル

第四百十條 偶數次號ナル漸近分數ハ次ノ漸近分數ヨリ大ニシテ奇數次號ナル漸近分數ハ次ノ漸近分數ヨリ小ナリ

設令ハ第四百三條第一問ノ第四第五兩漸近分數 $\frac{D}{D'}$ ト $\frac{E}{E'}$ トニハ $\frac{D}{D'} = \frac{25}{9}$ ト $\frac{E}{E'} = \frac{111}{40}$ ト取テハ

$\frac{25}{9} - \frac{111}{40} = \frac{1000 - 999}{360} = \frac{1}{360}$ ト得是故ニ第四漸近分數 $\frac{25}{9}$ 即チ D/D' ハ第五

漸近分數 111
40 即チ $\frac{E}{E'}$ ヨリ大ナリ

第四百十一條 偶數次號ナル漸近分數ハ全分數ヨリ大ニシテ奇數次號ナル漸近分數ハ全分數ヨリ小ナリ而シテ漸近分數ノ値ハ漸次ニ全分數ニ近ツク(但シ全分數トハ連分數ノ値ナリ)

論 連續スル三漸近分數ナ $\frac{P}{P'} \frac{Q}{Q'} \frac{R}{R'}$ トセバ $\frac{P}{R} \parallel \frac{Q}{Q' + P}$ ナリ今 r 以下ナ

ル諸項ニテ作ル連分數ヲ α' トセバ $\frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \dots$ ナリ之ヲ以テ $\frac{R}{R'}$

ノ式中ナル Γ ニ代用セバ

$$\Delta \parallel \frac{Q_1 + P_1}{Q_2 + P_2}$$
ヲ得(但シ $\frac{U}{V}$ ハ全分數ヲ顯スナリ)

$\frac{P}{P'}$ 若シ偶數次號ノ分數ナレバ $PQ - P'Q' = 1$ ナルガ故ニ(第四百五條ヲ視ム)

$$\frac{P}{P'} \frac{U}{V} = \frac{(PQ' - P'Q)^{P'}}{P'(Q^{P'} + P')} = D^{P'} + \frac{Q}{V} = \frac{P}{Q(Q^{P'} + P')} = D^{P'}$$

トナル由テD'ハ正數ニシテD''ハ負數ナルガ故ニ
 $\begin{array}{c} \triangleleft | \triangleleft \\ \vee \\ \odot | \odot \end{array}$ ニシテ
 $\begin{array}{c} \triangleleft | \triangleleft \\ \vee \\ \odot | \odot \end{array}$ ナリ此

由テ偶數次號ナル漸近分數ハ全分數ヨリ大ニシテ奇數次號ナル漸近分

數ハ全分數ヨリ小ナルヲ證明ス

又ハ一箇ヨリ小ナラザルが故ニハ一箇ヨリ大ナリ而シテ又ハ ∞ ナル
ヲ以テ D' ハ必ズ D'' ヨリ大ナリ但シ正負ニ關係モズ數ノ多少ニ就テ云フ此

ニ由テ Q/Q ト U/V トノ差ハ P/P' ト U/V トノ差ヨリ小ナリ又同法ニテ他ノ

第四百十二條 全分數ト漸近分數トノ差ハ前次ノ漸近分數ノ分母ノ自乗

ヲ以テ一箇ヲ除シタル商ヨリ小ナリ

論 前條ノ如クノ意義ヲ定ルキハ、 ∇ ナルガ故ニ $Q \supset P \vee Q$ ナリ是故ニ

ルヲ證明ス又同法ニテ他ノ漸近分數ニテモ此理アルヲ證明スルヲ得

設令ハ第四百三條ノ例一ノ第二第三ノ兩漸近分數 $\frac{7}{3}$ $\frac{16}{7}$ ヲ取テ此理ヲ

$$\begin{aligned} \text{驗スルニ } & U = \frac{71}{31} B = \frac{70}{31} C = \frac{16}{92} D \\ & \quad + \frac{71}{31} E = \frac{70}{31} F \\ & \text{又 } D' = \frac{16}{92} U = \frac{71}{31} V \end{aligned}$$

ナリ此ニ由テ $\frac{7}{3}$ ハ $\frac{71}{31}$ ヨリ大ニシテ $\frac{16}{7}$ ハ $\frac{71}{31}$ ヨリ小ナリ又 $\frac{16}{7}$ ト
 $\frac{71}{31}$ トノ差ハ $\frac{7}{3}$ ト $\frac{71}{31}$ トノ差ヨリ小ナリ又 $\frac{1}{217}$ ハ $\frac{1}{7}$ 即チ $\frac{1}{49}$ ヨリ小
 ナリ

第四百十三條 連續スル兩漸近分數ト全分數トノ差ハ何レモ此兩分數ノ
 分母ノ相乗積ヲ以テ一箇ヲ除タル商ヨリ小ナリ而シテ此兩分數ノ分母
 子ヨリ小ナル分母子ヲ有スル分數ニテ此兩分數ノ間ニ入ルベキ分數アル
 ベカラズ

論 連續スル兩漸近分數ヲ $\frac{P}{P'}, \frac{Q}{Q'}$ トセバ $\frac{P}{P'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{PQ' - P'Q}{P'Q'}$ 第四百九條
 ナ視ヨリ然ルニ全分數 $\frac{U}{V}$ ハ此兩分數ノ間ニ入ルベキ分數ナルガ故ニ第四
 百十一條ヲ視ヨリ此分數ト $\frac{P}{P'}$ 或ハ $\frac{Q}{Q'}$ トノ差ハ D ヨリ小ナラザルヲ得ズ
 又兩漸近分數 $\frac{P}{P'}, \frac{Q}{Q'}$ トノ間ニ入ルベキ分數ヲ $\frac{I}{I'}$ トセバ D ノ分子ニ
 簡ナルガ故ニ $I' > Q'$ ナルニアラザレバ $\frac{P}{P'} - \frac{I}{I'} > \frac{Q}{Q'} - \frac{I}{I'}$ トノ差ハ D ヨリ小ナル能ハ
 ズ又 $I' > P'$ ナルニアラザレバ $\frac{Q}{Q'} - \frac{I}{I'} > \frac{P}{P'} - \frac{I}{I'}$ トノ差ハ D ヨリ小ナル能ハズ故ニ I'

ハ P' ヨリ大ニシテ又 Q' ヨリ大ナルヲ明ナリ又漸近分數ノ分母子ヲ轉倒ス
 ルモ所得ノ倒數猶ホ第四百四條ノ理ニ合フガ故ニ同法ニテ I ハ P ヨリ大
 ニシテ又 Q ヨリ大ナルヲ證明スルヲ得

第四百十四條 兩數ノ比繁位ナル數ナレバ前條ノ定理ニ由テ其略近ノ値
 ナ顯ス所ノ最簡式ヲ求ルヲ得設令ハ圓周ノ圓徑ニ於ル比ヲ小數以下七
 位ヲ求ムレハ $\frac{31415926}{10000000}$ ヲ得之ヲ連分數ニ改ムレハ各項ノ分母 $3, 7, 15, 1, 243$

等ナリ由テ漸近分數ハ $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{86398}{27363}$ 等ナリ此第二次漸近分數 $\frac{22}{7}$

ハ亞幾默德氏定ル所ノ圓周率ノ略近數ナリ第四漸近分數 $\frac{355}{113}$ ハ密迭由新
 氏定ル所ノ圓周率ノ略近數ナリ又最後ノ漸近分數ヨリ更ニ繁位ナル分母
 子ヲ有スル分數ニアラサレハ此等ノ分數ノ如ク近ク眞率ニ合フモノアル
 ヘカラス

第四百十五條 連分數ノ分母數項ノ後チ尙ホ前數項ト同シ項ヲ見ルハ

此種ノ連分數ヲ循環連分數ト云フ設令 $a = \frac{1}{b + \frac{1}{b + \frac{1}{b + \dots}}}$ 此ノ如シ若シ

此連分數ノ値ヲ x トセハ $a = \frac{1}{b + \frac{1}{b + \frac{1}{b + \dots}}}$ トナル故ニ第二項以下ナル

連分數ニ x ヲ代用スルヲ得ヘシ由テ $a = \frac{1}{b + \frac{1}{b + \frac{1}{b + \dots}}}$ ヲ得此式ノ分母ヲ去テ

$b(x-a) + (x-a)^2 = 1$ 即チ $x^2 - (2a-b)x + a^2 + ab = 0$ ヲ得此ニ由テ

$x = \frac{1}{2}(2a-b) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(b^2+4)}$ ヲ得此式ニ於テ $a=1, b=2$ トセハ $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{8}$ ヲ得而シテ

原ノ連分數ノ a, b ニ此數値ヲ配スレハ $\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$ ヲ得是レ

連分數ニテ無窮根數ノ値ヲ顯スノ例ニシテ各項循環ノ法實ニ明ナリ

又 $x = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \dots}}}}$ トセハ第三項以下ナル連分數ニ x ヲ代用スル

ヲ得由テ $x = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \dots}}}}$ ヲ得此方程式ヲ解シテ

$x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{ab(ab+4)}$ ヲ得此式中 a, b ハ任意ナル數ナリ故ニ $a=1, b=4$

トセハ $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot 20} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{80} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} = \frac{1}{2} \pm 2\sqrt{5}$ ヲ得是故ニ

$2\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}$ ナリ

註 連分數ハ無窮根數ノ數値ヲ顯スモノニテ負數ヲ顯スモノニアラス

故ニ方程式ヲ解シテ得ル所ノ正商ニ合ヒ負商ニ合ハス

連分數問題三

第一 連續スル三漸近分數ヲ $P/P', Q/Q', R/R'$ トセハ $(R-P)Q' = (R'-P')Q$ トナル此證ヲ問フ

第二 連續スル四漸近分數ヲ $P/P', Q/Q', R/R', S/S'$ トセハ左ノ式ヲ得此證ヲ問フ

$\left(\frac{S}{Q} - 1\right)\left(1 - \frac{P}{R}\right) = \left(\frac{S}{Q'} - 1\right)\left(1 - \frac{P'}{R'}\right)$

第三 凡ソ連分數ノ値ハ其漸近分數ノ二次相續キタルモノハ平差中項ヨリ大トナリ小トナルヲ前次ノ分數ノ後次ノ分數ヨリ大トナリ小トナル

トニ反ス各次漸近分數皆此理ニ合ハサルハナシ此證ヲ問フ

第四 凡シ連分數ノ値ハ其漸近分數ノ二次相續キタルモノ、同比中項ヨリ大トナリ小トナルコ前次ノ分數ノ後次ノ分數ヨリ大トナリ小トナルトニ反ス各次漸近分數皆此理ニ合ハサルナシ此證ヲ問フ

第五 連分數 $\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{4+\dots}}}}$ ノ値ヲ問フ

第六 連分數 $x = \frac{1}{a+\frac{1}{a+\frac{1}{a+\dots}}}$ ヨリ x ノ値ヲ發見スヘシ

第七 連分數 $x = \frac{1}{b+\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{a+\dots}}}}$ ヨリ x ノ値ヲ發見スヘシ

第八 $\frac{2a+1}{a+\frac{1}{4a+a+\frac{1}{4a+a+\dots}}} = 2\sqrt{1+a^2}$ 上式ノ證ヲ問フ

第九 前問ニ於テ第二漸近分數ト連分數ノ値 $2\sqrt{1+a^2}$ トノ差ハ $\frac{1}{a^2}$ 越ヘス此證ヲ問フ

第十 $\left(\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{a+\frac{1}{b+\dots}}}}\right) \left(\frac{1}{b+\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{a+\dots}}}}\right) = \frac{2}{b}$ 上式ノ證ヲ問フ

○不定方程式

第四百十六條 未知元ノ數方程式ノ數ニ越ルモノヲ不定方程式ト云フ不定方程式ノ未知元ノ値ハ不定ナリト雖モ別ニ題意アツテ大概變數ニ限リアリ變數ヲ限ルノ題意通例未知元ノ值整數ナリト云ヒ又ハ正數ナリト云ヒ又ハ自乘數ナリト云ヒ又ハ三乘數ナリト云フノ類ナリ此書一次不定方程式解法ノ例一二ヲ論ズ

二元一式解法

第四百十七條 設題

$ax+by=c$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整數ナル x ノ値ヲ發見スヘシ但シ a, b, c ハ正數ニテモ負數ニテモ任意ナレモ整數ニ限レリトス

解法 分數式 $\frac{a}{b}$ ナ連分數ニ改メ末ノ漸近分數ヲ $\frac{m}{n}$ トセバ $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ ナリ[第四百四條ヲ視ヨ] bm 若シ an ヨリ大ナレバ所設ノ方程式ヨリ x ノ値 $\frac{c-bm}{a}$ ヲ求メ此式ノ分子ニ m ナ乘ズレバ $\frac{cm-bmq}{a}$ ヲ得此式ノ分母ヲ以テ

分子ヲ除スレバ商 $\frac{d-y}{a}$ 此ノ如シ今 $\frac{d-y}{a} = \frac{p}{q}$ トセバ $ay = d - \frac{p}{q}$ 得之ヲ以テ a ノ値ヲ顯ス所ノ式ノ y ニ代用セバ $a = \frac{p}{q} + by$ 此ノ如キ式ヲ得ヘシ今 a 空數トシ或ハ適當ナル整數トセバ正ノ整數ナル a ノ値ヲ得ヘシ若シ又 an ヨリ大ナル n ハ先ツ y ノ値ヲ發見シテ前同法ヲ施スベシ

若シ方程式ノ形狀 $ax - by = 1$ 此ノ如クナル n ノ最小ナル一種ノ値ヲ知ラバ a ノ此値ニ y ノ段數ヲ累加シテ a ノ他ノ値ヲ得ベク y ノ此値ニ a ノ段數ヲ累加シテ y ノ他ノ値ヲ得ベシ之ヲ再說セバ方程式ノ形狀 $ax - by = 1$ 此ノ如クナル n ノ一種ノ値 p, q ナレバ $a = p + by, y = q + ax$ ナリ但シ p ハ正ノ整數ヲ顯スナリ

若シ又方程式ノ形狀 $ax + by = 1$ 此ノ如クナル n ノ最大ナル値及ヒ之ニ對合スル y ノ値ヲ知ラバ a ノ此値ヨリ y ノ段數ヲ累減シテ a ノ他ノ値ヲ得ベク y ノ此値ニ a ノ段數ヲ累加シテ y ノ他ノ値ヲ得ベシ之ヲ再說セバ方程式ノ形狀 $ax + by = 1$ 此ノ如クナル n ノ一種ノ値 p, q ナレバ

$x = p - by, y = q + ax$ ナリ但シ p ハ正ノ整數ヲ顯スナリ

例一 $13x - 13y = 10$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整數ナル x, y ノ値ヲ求ムヘシ

解法 分數 $\frac{15}{13}$ ヲ連分數ニ改メ末次ノ漸近分數ヲ求ムルキハ $\frac{7}{6}$

ヲ得由テ $\frac{a}{b} = \frac{15}{13}, \frac{m}{n} = \frac{7}{6}$ ニシテ $an - bm = 90 - 91 = -1$ ナリ故ニ bm 大ナルヲ以テ先ツ a ノ値ヲ求ムレハ $a = \frac{13y + 10}{15}$ ヲ得由テ m 即チ 7 ナル

此式ノ分子ニ乘スレバ $\frac{7(13y + 10)}{15} = \frac{70 + 91y}{15} = 4 + 6y + \frac{10 + y}{15}$ ナル故ニ $\frac{10 + y}{15} = r$ トセバ $y = 15r - 10$ ナリ

$x = \frac{10 + 13y}{15} = \frac{10 + 13 \times 15r - 130}{15} = 13r - 8$ トナル今若シ r 空數或ハ負數トセハ x, y ノ値何レモ負數トナル故ニ r ノ値ハ空數ヨリ大ナリ即チ一箇ヲ以テ最小ナル値トス然レモ更ニ大數ヲ之ニ命スルハ任意ナリ若シ $r = 1$ トセハ $x = 5, y = 5$ ナリ若シ $r = 2$ トセハ $x = 18, y = 20$

ナリ若シ $x=3$ トセハ $x=31, y=35$ ナリ逐テ此ノ如シ

若シ $x=5, y=5$ ナリ發見スルノ後ナハ x ノ他ノ値ハ方程式 $x=9+10n, y=q+10r$ 即チ $x=15+13r, y=15+13r$ ヨリ發見スルヲ得若シ $x=0$ トセハ $x=5, y=5$ ナリ若シ $x=1$ トセハ $x=18, y=20$ ナリ若シ $x=2$ トセハ $x=31, y=35$ ナリ若シ $x=3$ トセハ $x=44, y=50$ ナリ若シ $x=4$ トセハ $x=57, y=65$ ナリ若シ $x=5$ トセハ $x=70, y=80$ ナリ若シ $x=6$ トセハ $x=83, y=95$ ナリ逐テ此ノ如シ

例二

$10x+7y=763$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整数ナル x ノ値ヲ求ムヘシ

解法 此式ニテハ $a=10, m=3, b=7, n=2, cm-bm=20-21=-1$ ナリ故ニ bm 大ナ

ルガ故ニ先ツ x ノ値ヲ發見ス乃チ $x=\frac{763-7y}{10}=\frac{76}{10}+\frac{3-7y}{10}$ ナ得

此76ヲ棄ルヲ得然ルキハ x ト76トハ俱ニ整数ナルガ故ニ $\frac{3-7y}{10}$ 亦整数ナラサルヲ得スニ $3-7y$ ナルガ故ニ

$$\frac{3-7y}{10} = \frac{9-21y}{10} = -2y + \frac{9-y}{10} \text{ ナ得今 } \frac{9-y}{10} \equiv 1 \text{ トセハ } y=9-10r$$

$$x = \frac{763-7y}{10} = \frac{763-63+7 \times 10r}{10} = 70+7r \text{ ナ得今若シ } r=10 \text{ トセハ}$$

$x=0$ ナ得若シ又 $r=1$ トセハ $y=1$ トナル由テ x ノ値ハ一箇ト負十箇トノ間ニ在リ即チ x ノ値ハ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ナリ此ニ

由テ x ノ正ノ整数ナル値十種ニ止ル即チ左ノ如シ

若シ $r=0$ トセハ $x=70, y=9$ ナリ若シ $r=1$ ナンハ $x=63, y=19$ ナ

リ若シ $r=2$ ナレバ $x=56, y=29$ ナリ逐テ此ノ如シ

或ハ又 $x=70, y=9$ ナリ發見スルノ後チハ $x=p-10r, y=q+10r$ 即チ

$x=70-10r, y=9+10r$ ヨリ x ノ他ノ値ヲ發見スルヲ得此式ニテハ x ノ値空數ヨリ九箇ニ至ルヲ限リトス若シ $r=0$ トセハ $x=70, y=9$ ナリ若シ $r=1$ トセハ $x=63, y=19$ ナリ若シ $r=2$ トセハ $x=56, y=29$ ナリ若シ $r=3$

例三

トセハ $x=49, y=39$ ナリ 逐テ此ノ如シ若シ $x=7, y=99$ ナリ
 $3x-11y=20$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整数ナル x, y ノ値ヲ求ムヘシ

解法 此式ニテハ $\frac{x}{11} = \frac{3}{4} \frac{y}{11} + \frac{1}{4}$, $4x - 11y = 12 - 11 = 1$ ナリ故ニ $4x$ 大ナ

ルヲ以テ先ツ y ノ値ヲ求ムレハ $y = \frac{3x-20}{11}$ ヲ得之ニ n 即チ 4

ヲ乗スレハ $\frac{4(3x-20)}{11} = \frac{12x-80}{11} = 2 + \frac{x-3}{11}$ ヲ得今 $\frac{x-3}{11} = r$ トセハ

$x = 11r + 3$ ニシテ $y = \frac{3x-20}{11} = \frac{3(11r+3)-20}{11} = 3r + \frac{9-20}{11} = 3r - 1$ トナル若シ

$r=0$ トセハ $y = -1$ トナル是故ニ r ノ値ハ一箇ヨリ小ナラス若シ $r=1$
 トセハ $x=14, y=2$ ヲ得若シ r ノ値ナ 2 3 4 5 等トセハ之ニ從テ未

知元ノ値幾種ヲ得其變數限リナシ

又未知元ノ段數ニ由テ $\frac{x-y}{a}$ 或ハ $\frac{y}{a}$ 此ノ如キ形狀ヲナスヲアリス
 ルキハ之ヲ r ト命スヘシ設令ハ左ノ例ノ如シ

例四

負債二千圓アリ金銀兩種ノ錢ヲ以テ償ハントス金錢ハ每一箇二十
 一圓銀錢ハ每一箇五圓ナリ若シ銀錢ノ數ヲ最モ少フセハ償還スル兩種
 ノ錢各幾何ナルヤ

解法 銀錢ノ數ヲ x トシ金錢ノ數ヲ y トセハ $5x + 21y = 2000$ ヲ得

故ニ $x = \frac{2000-21y}{5} = 400 - 4y - \frac{y}{5}$ トナル由テ $\frac{y}{5} = r$ トセハ $y = 5r$,

$x = 400 - 21r$ ヲ得是故ニ r ニ最大ナル値ヲ配スル時 x ノ値最小ナ
 リ r ノ最大ナル値ハ十九箇ナリ此時 x ノ値ハ一箇 y ノ値ハ九十五
 箇トナル由テ金錢九十五箇銀錢一箇ヲ以テ二千圓ノ負債ニ償フコ
 ヲ得

又 r ノ最小ナル値ハ一箇ナリ其故何トナレハ若シ更ニ小數ヲ r ニ
 配スレハ y ノ値空數或ハ負數トナルガ故ナリ由テ r ノ値ハ一箇ヨ
 リ十九箇ニ至ルヲ限リトス是故ニ配合ノ法十九件アルヲ知ル

第四百十八條 前條ノ解法ハ左ノ理ニ據テ定ルナリ

第一 整数ノ幾倍ハ亦整数ナリ

是故 $\frac{c+by}{a} \parallel$ 若シ整数ナレバ $\frac{m(c+by)}{a}$ 亦整数ナリ

第二 兩數中ノ一數整数ニシテ此兩數ノ和或ハ差整数ナレバ他ノ一數亦整数ナリ

是故 $\frac{m(c+by)}{a} \parallel \frac{d+ay}{a} \parallel$ 若シ整数ナレバ $\frac{d+ay}{a}$ 亦整数ナリ而シテ此數ナリトセバ $\frac{d+ay}{a} \parallel \frac{d+ay}{a} \pm \frac{m(c+by)}{a}$ 得故ニ $\frac{d+ay}{a}$ 空數或ハ任意ナル整数ヲ配スレハ $\frac{d+ay}{a}$ ノ值整数ヲ得又 $\frac{d+ay}{a} \parallel \frac{d+ay}{a} \pm \frac{m(c+by)}{a}$ ニシテ $\frac{d+ay}{a}$ ハ $\frac{d+ay}{a}$ ノ a 倍ニ適當スルガ故ニ

$\frac{d+ay}{a}$ ハ整数ニシテ $\frac{d+ay}{a} \pm \frac{m(c+by)}{a}$ 亦整数ナリ此故ニ $\frac{m(c+by)}{a}$ 亦整数ナリ而

シ a ト m トハ公約數ヲ有セサルガ故ニ「第四百八條ヲ視ヨ」 $\frac{c+by}{a}$ ハ a ノ幾倍ナルヘシ由テ x 亦整数ナルヲ知ル

第四百十九條 第四百十七條ニ示ス所ノ公式 $s \parallel p+br, y \parallel q+ar$ 及ヒ

$s \parallel p-br, y \parallel q+ar$ ナ左ノ如ク證明スルヲ得ヘシ

方程式ナ $ax-by \parallel 1$ トシ x, y ノ一種ノ值ヲ p, q トシ任意ナル他ノ一種ノ值ヲ x', y' トセバ $ax'-by' \parallel 1$ $ax'-by' \parallel 1 \parallel ap-bp$ ヲ得由テ $a(x'-p) \parallel b(q'-q)$ ニシテ

$\frac{x'-p}{q'-q} \parallel \frac{b}{ar}$ トナル但シ ar ハ俱ニ正數トナリ或ハ俱ニ負數トナル

最前ノ分數式中 x', y' ハ x, y ノ對合スル值ノ一種ナルカ故ニ $\frac{x'-p}{q'-q} \parallel \frac{b}{ar}$ トハ各 b, a ニ等シク或ハ b, a ノ幾倍ニ等シ即チ $\frac{x'-p}{q'-q} \parallel \frac{b}{ar}$ ニ等シク $\frac{x'-p}{q'-q} \parallel \frac{b}{ar}$ ニ等シ(但シ r ハ正數ナルトモ負數ナルトモアリト知ルヘシ)故ニ $x' \parallel p+br, y' \parallel q+ar$ ナリ此式中 a, b, p, q ハ已知數ナリ若シ r ニ任意ナル整数ヲ配スルキハ x, y ノ一種ノ值ヲ發見ス若シ r ナリ 1, 2, 3 等トセバ $x \parallel p+br, y \parallel q+ar$ 等ニシテ y ハ $q+a, q+2a, q+3a$ 等ナリ又 r ヲ負數トスルモ可ナリ是故ニ x, y ノ值ハ連續シテ平差級數ヲナス但シ a ノ值ハ平差 b ニシテ y ノ值ハ平差 a ナリ

又方程式 $ax+by \equiv c$ ニテモ前同法ニテ $x \equiv p-b'y=q+ar$ ナルヲ證明スル
 得但シハ正數ナルヲモ負數ナルヲモアリト知ルベシ

第四百二十條 方程式 $ax+by \equiv c$ ニ於テ a, b ノ公約數アツテ此公約數若
 シ c ノ約數ナラサレハ此方程式ノ x, y ノ値借ニ整數ナル能ハス

論 a, b ノ公約數ヲ m トシ此公約數ハ c ノ約數ニアラストシ $a=dm, b=lm$
 トセハ $a'x+b'y \equiv c$ トナル故ニ x, y ノ値若シ整數ナレハ此方程式ノ前節
 ハ整數ニシテ後節ハ分數ヲ帶フ是レ不合理ナリ此ニ由テ x, y ノ値ヲ整數
 ナラシメントセハ a, b ハ公約數ヲ有セサル兩數ナラサルヲ得ス若シ公約
 數ヲ有スルハ此公約數亦 c ノ約數ナラサルヲ得ス

第四百二十一條 正ノ整數ナル x, y ノ値ヲ以テ方程式 $ax+by \equiv c$ ニテ解ス
 ル狀勢ヲ論ス

論 分數 a, b ニ最モ近キ漸近分數ヲ $\frac{m}{n}$ トセハ $an-bm \equiv 1$ ナリ但シ漸
 近分數偶數次號ナレハ負號ヲ取り奇數次號ナレハ正號ヲ取ル(第四百五條

ヲ觀ヨ)

方程式若シ $ax-by \equiv c$ 此ノ如キ形狀ニシテ漸近分數 $\frac{m}{n}$ 奇數次號ナレハ

$am-bn \equiv 1$ ナリ由テ $a, an-b, cm \equiv c$ ナ得故ニ $x \equiv cn, y \equiv cm$ ハ方程式

$ax-by \equiv c$ ノ一商ナリ由テ x, y ノ他ノ値ハ第四百十七條ノ公式

$x \equiv cn+br, y \equiv cm+ar$ ヨリ發見スルヲ得此式中 r 正數ナレハ x, y ノ値恒ニ

正數ナリ又漸近分數偶數次號ナレハ $an-bm \equiv -1$ ナリ由テ

$a(-cn)-b(-cm) \equiv c$ ナ得故ニ $x \equiv -cn, y \equiv -cm$ ハ方程式 $ax-by \equiv c$ ノ一商

ナリ故ニ r, y ノ他ノ値ハ第四百十七條ノ公式 $x \equiv -cn+br, y \equiv -cm+ar$ ヨリ

發見スルヲ得此式中 r ハ x, y ノ値ヲ正數トナスヘキ正數ト知ルヘシ

又同法ニテ若シ $am-bn \equiv -1$ ナレハ c ナ乘シ若シ $an-bm \equiv 1$ ナレハ $-c$ ナ乘

スレハ前ノ如ク方程式 $ax-by \equiv c$ ニ於テモ x, y ノ値ニ正ノ整數ヲ得ヘ

キヲ知ル此ニ由テ方程式ノ形狀 $ax-by \equiv c$ 此ノ如クニシテ a, b, c ノ三

數第四百二十條ニ述ル所ノ理ニ合ハ、此方程式ニ合フヘキ正ノ整數ナル

x の値を得て其變數限リナシ

方程式若シ $ax+by=1$ 此ノ如クニシテ漸近分數 $\frac{m}{n}$ 奇數次號ナレハ

$ax-bm=1$ ナリ由テ $a, m+q(-cm) \equiv 1$ ナリ得故ニ $x \equiv am, y \equiv -cm$ ハ此方程式

ノ一商ナリ由テ x ノ他ノ値ハ第四百十七條ノ公式 $x \equiv cm-br, y \equiv -cm+as$

ヨリ發見スルヲ得故ニ $a, cm-br$ 及ヒ $-cm+as$ ナ正數トナスヘキ數ト

知ルヘシ由テ x ノ値ニ限リアリ而シテ x ノ値ノ變數ハ此方程式解法ノ變

數ナリ又 $am-bm=1$ ナレハ $a(-cm)+bcm \equiv 1$ ナリ得故ニ $x \equiv -cm, y \equiv cm$ ハ

此方程式ノ一商ナリ由テ x ノ他ノ値ハ第四百十七條ノ公式ヨリ發見ス

ルヲ得ヘシ而シテ解法ノ狀勢前ノ如ク同一ナルヲ知ル又 $ax-bm=1$ ナル

キ $-c$ ナ乘シ $ax-bm=1$ ナルキ $+c$ ナ乘スレハ方程式 $ax+by=1$ 此ノ如クナ

ルモ解法ノ狀勢同一ナルヲ知ルヘシ

第四百二十二條 方程式ノ形狀 $ax+by=c$ 此ノ如クナルキ a, b ノ兩數公

約數ナ有セスシテ c ハ $ax+by$ ヨリ大ナレハ此方程式正ノ整數ヲ以テ解

スヘシ此理ニ合ハ、實ニ滿足ナリト雖モ此理恆ニ必要ナルニアラス

第四百二十三條 一未知元ノ段數若シ a 簡ナレハ他ノ未知元ノ値ヲ任意

ナル整數トセハ此方程式解スヘシ

第四百二十四條 方程式 $ax+by=1$ ニ於テ一未知元ノ段數設令ハ b 若シ

c ノ幾分ニ相當セハ設令ハ $c \equiv bm, y \equiv 1-m$ ナリ得故ニ $x \equiv 0, y \equiv 1-m$ ハ此

方程式ノ一商ナリ由テ x ノ他ノ値ハ容易ニ發見スルヲ得ヘシ

第四百二十五條 方程式ノ形狀若シ $ax+by=0$ 此ノ如クナレハ $x \equiv 0, y \equiv 0$

ハ此方程式ノ一商ナリ故ニ x ノ他ノ値ハ $x \equiv br, y \equiv -as$ ナリ

不定方程式問題一

第一 $7x-12y=1$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整數ニシテ最小ナル x ノ値ヲ

發見スヘシ并ニ又解法變數ヲ問フ

第二 $30x-31y=7$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整數ニシテ最小ナル x ノ値ヲ
發見スヘシ

第三 $24x - 13y = 16$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整数ニシテ最小ナル x, y ノ値

ヲ發見スヘシ

第四 $25x - 16y = 12$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整数ニシテ最小ナル x, y ノ値

ヲ發見スヘシ

第五 $8x - 3y = 16$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整数ナル x, y ノ値ヲ發見スヘシ

第六 $7x + 11y = 47$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整数ナル x, y ノ値ヲ發見スヘシ

并ニ又解法變數ヲ問フ

第七 $5x + 7y = 19$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整数ナル x, y ノ値ヲ發見スヘシ

并ニ又解法變數ヲ問フ

第八 $5x + 24y = 109$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整数ナル x, y ノ値ヲ發見スヘシ

并ニ又解法變數ヲ問フ

第九 $29x + 17y = 250$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整数ナル x, y ノ値ヲ發見スヘシ

并ニ又解法變數ヲ問フ

第十 $17x - 49y = -8$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整数ニシテ最小ナル x, y ノ値

ヲ發見スヘシ

第十一 $27x + 16y = 1600$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整数ナル x, y ノ値ヲ發見ス

ヘシ并ニ又解法變數ヲ問フ

第十二 二人偕ニ賣買ヲ談スルアリ物貨價二千圓ナレハ買客ハ每一箇二

十一圓ノ金錢ノミヲ所有シ賣主ハ每一箇五圓ノ銀錢唯四十箇ヲ所有ス

ト云フ由テ問フ支償ノ法如何

第十三 或人每一箇二十一圓ノ大金錢ヲ以テ一圓ノ負債ヲ償還セシト欲

ス然ルニ銀主ハ唯每一箇十七圓ノ小金錢ノミヲ所有セリト云フ由テ問

フ金錢ノ數ヲ最モ少フシテ此負債ヲ償還スルノ法如何

第十四 或人金二百五十七圓ヲ以テ牛羊各若干ヲ買ハントス但シ牛ハ每

一頭價二十圓羊ハ每一頭價一圓七十錢ナリト云フ由テ問フ牛羊各幾何

ヲ買ハ、所有銀過不足ヤキヤ

第十五 英國金錢及西班牙國銀錢ヲ雜ヘテ荷蘭國金錢二十一箇ト交換
セント欲ス但シ英國金錢ハ二十ノ如ク西班牙國銀錢ハ十七ノ如ク荷蘭
國金錢ハ二十一ノ如シト云フ由テ問フ配合ノ法如何

第十六 每一箇二十錢ノ銀錢ト每一箇二十一錢ノ銀錢トヲ以テ三圓七十
九錢ヲ支償スルノ法如何

第十七 每一箇二十錢ノ銀錢ト每一箇二十一錢ノ銀錢トヲ以テ六圓十七
錢ヲ支償スルノ法如何

第十八 茶商アリ斤價五十四錢ノ品ト斤價六十四錢ノ品トヲ混和シテ斤
價六十錢ノ品ヲ製ラントス但シ一斤ニ滿タサル小分ヲ混スルヲ許サス
由テ問フ兩種ノ茶混合ノ法如何

第十九 每一箇五錢ノ銀錢ト每一箇三錢ノ銅錢トヲ以テ價七十八錢ノ品
ヲ買ハント欲ス兩種ノ錢ヲ配合シテ支償スルノ法如何

第二十 十箇ノ幾倍ニ適當スル數アリ此中各位ノ數字ノ和ヲ減スレハ所

得ノ餘數九十九箇ナリト云フ由テ問フ本數幾何

第二十一 十進法ニテ記スル一數アリ其幾何ナルヲ知ラス若シ之ヲ七進
法ニ改ムレハ三位ヲ得テ中位零ナルヲ知リ又之ヲ十一進法ニ改ムレハ
前ト同數字ヲ得ルト雖ヒ列位ノ次序轉倒スルヲ知レリト云フ由テ問フ
本數幾何

第二十二 七分之幾九分之幾ト云ヘル兩分數アリ其和六十三分之五十七
ナリト云フ由テ問フ兩分數各幾何

三元二式解法

第四百二十六條 兩方程式中ニ具有スル三元ヲ消シテ此兩式ヲ連合
シテ一元設令ハシテ消去セハ二ノ二元ヲ具有スル方程式ヲ得此方程式
ヲ第四百十七條ノ解法ニ從テ解シ新未知元ヲ以テ消シテ値ヲ顯ス所フ

整數式ヲ求メ之ヲ以テ原方程式ノ未知元 x, y, z ニ代用シテ x, y, z トナシ具有
スル方程式ヲ求ムレハ此方程式ノ各項皆 z ノ段數ニテ約スヘキ數ナリ故
ニ x, y ヲ以テ z ノ値ヲ顯ス所ノ整數式ヲ得茲ニ於テ新未知元 x, y ニ適當ナル
値ヲ配スレハ三元ノ値一種ヲ得

若シ x, y ヲ以テ z ノ値ヲ顯ス所ノ式整數ナラサレハ x, y, z トナシ具有スル方
程式ヲ第四百十七條ノ解法ニ從テ解シ新未知元 x, y, z ヲ以テ x, y, z トナシノ値ヲ
顯ス所ノ整數式ヲ求メ又 x, y, z ヲ以テ x, y, z ノ値ヲ顯ス所ノ整數式ヲ求ムヘシ
然ル後 x, y, z ニ適當ナル値ヲ配スレハ三元ノ値一種ヲ得ヘシ

例一 $10x - 7y + 5z = 85, 9x + 7y - 8z = 360$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整數ナル x, y, z
ノ値ヲ發見スヘシ

解法 第一式ニ 8 ヲ乘シ第二式ニ 5 ヲ乘シ所得ノ兩式ヲ合スレハ
 $125x - 31y = 2480$ ヲ得第四百十七條ノ解法ニテ此方程式ヲ解スレ
ハ $x = 31y, y = 125x - 80$ ヲ得之ヲ以テ原式中ナル x, y, z ニ代用セ

ハ $904x - 8z = 760$ ヲ得由テ $z = 113x - 95$ ナリ此ニ由テ $x = 1$ ナレ
ハ $x = 31, y = 45, z = 18$ ナリ又 $x = 2$ ナレハ $x = 62, y = 170, z = 131$ ナリ
又 $x = 3$ ナレハ $x = 93, y = 295, z = 244$ ナリ此餘限リナシ

例二 $6x + 7y + 4z = 123, 11x + 8y - 6z = 145$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整數ナル
 x, y, z ノ値ヲ發見スヘシ

解法 先ッ兩式ヲ連合シテ z ヲ消去セハ $80x + 74y = 1312$ 即チ
 $40x + 37y = 656$ ヲ得第四百十七條ノ解法ニテ此方程式ヨリ
 $x = 9 - 37y, y = 8 + 40x$ ヲ得之ヲ以テ第一式ナル x, y, z ニ代用セハ
 $4x + 58y = 12$ 即チ $9x + 29y = 6$ ヲ得由テ $x = 14y + 3 + \frac{1}{2}$ ナリ今
 $\frac{1}{2}y = s + \frac{1}{2}$ ハ $x = 3 + 20s, x = 9 - 74s, y = 8 + 80s$ トナル由テ $z = 0$ トセ
ハ $x = 9, y = 8, z = 3$ ニシテ此他此方程式ヲ解スルノ法ナシ

第四百二十七條 前條解法ノ証ヲ論ス

所設ノ兩方程式ヲ $ax + by + cz = d \dots [1]$ $a'x + b'y + c'z = d' \dots [2]$ トシ z ヲ消

去センカタメ[一]式ニ e' ヲ乗シ[二]式ニ e ヲ乗シ所得ノ兩乘積ノ差ヲ求ムレハ $(ac'-d'e)x+(bc'-b'e)y=d'e-ad'$ ……[三]ヲ得此方程式ニ於テ d ノ對合スル一種ノ値ヲ x' トセハ第四百十七條ノ公式ニ由テ

$$x \parallel x' - (bc' - b'e)y \parallel y' + (ac' - d'e)x \parallel e$$

ヲ得但シ e ハ已知ノ項ヲ顯スナリ此式ヲ改テ $(cb' - a'b)xy + e \parallel e$ ……[四]トナスコト得故ニ e ハ前節ノ約數ナルヲ以テ所設ノ方程式若シ合理ナレハ亦必ス後節 e ノ約數ナラサルヲ得ス由テ $e \parallel cb' - a'b$ トセハ $e \parallel (ab' - ab)x + e$ ヲ得是故ニ e ノ值皆整數式ニテ顯スコト得タリ然レモ[三]式ノ兩節若シ約數アラハ之ヲ去ラサルヲ得ス此時ニアツテハ c [四]式ナル a' ノ段數ノ一乘子ナラサルコトアリ由テ此兩節 c ヲ以テ約スヘカサルコトアリ斯ル時ニアツテハ[四]式ノ形狀 $ax + by \parallel c$ 此式ヨリ新未知元 s ヲ以テ a' ノ值ヲ顯ス所ノ式ヲ求ムヘシ然ルモハ容易ニ s ヲ以テ $ax + by$ ノ值ヲ顯ス所ノ式ヲ得ヘシ然ル後 s ニ適當ナル值ヲ配ス

レハ $ax + by$ ノ對合スル值幾種ヲ得ヘシ

不定方程式問題二

第一 $4x - y + 5z \parallel 127, 2x - 3y + 7z \parallel 131$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整數ナル

$ax + by$ ノ值ヲ發見スヘシ并ニ又解法變數ヲ問フ

第二 $5x - y + 4z \parallel 127, 7x - 3y + 2z \parallel 151$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整數ナル

$ax + by$ ノ值ヲ發見スヘシ并ニ又解法變數ヲ問フ

第三 $4x - 3y + 6z \parallel 157, 9x - 8y + 10z \parallel 311$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整數ナ

ル $ax + by$ ノ值ヲ發見スヘシ

第四 $30x + 12y + 6z \parallel 3600, x \parallel y + z$ 上ノ方程式ニ正ノ整數ノ解法幾種

アリヤ

第五 $21x + 5y + z \parallel 96, x + y + z \parallel 16$ 上ノ方程式ニ正ノ整數ノ解法幾種

アリヤ

第六 三位ノ數アリ其幾何ナルヲ知ラス唯其數字ノ和二十ナルヲ知リ又

本數ヨリ十六箇ヲ減シテ所得ノ餘數ヲ折半セハ所得ノ數恰モ原數ノ列
 數字ノ次序ヲ轉倒セシモノニ同シキヲ知レリト云フ由テ問フ原數如何
 第七 牛羊鷄合セテ一百頭ヲ買フ者アリ其價共ニ五百圓ナリト云フ但シ
 牛ハ每一頭價二十五圓羊ハ每一頭價五圓鷄ハ每一頭價二十五錢ナリト
 云フ由テ問フ牛羊鷄各幾何ナルヤ

三元一式解法

第四百二十八條

方程式ヲ $ax + by + cz = d$ トシ $R - az = 0$ トセハ

$ax + by = d$ 得第四百十七條ノ解法ニ從テ此方程式ヲ解シテ新未知元
 ナ以テ x, y ノ値ヲ顯ス所ノ整數式ヲ求ムヘシ然ルキハ x, y ノ値ニ r 有
 ス故ニ r 適當ナル値ヲ配スレハ x, y ノ對合スル値幾種ヲ得ヘシ

又 x ノ値ハ一箇ヨリ小ナラス而シテ x, y ノ値最小ナルキ x ノ値最大ナリ

y ノ値最小ナルモ一箇ヨリ小ナラス故ニ x ノ値ハ $\frac{d-bx}{c}$ ヨリ大ナラ

ス然レモ x ノ最小ナル値尙ホ一箇ニ越ユルコトアリ x ノ最大ナル値尙ホ

$\frac{d-bx}{c}$ 及ハサルコトアリ是故ニ解法ノ變數ハ x ノ値ノ限界ニ由テ容易

ニ知ルコトヲ得設令ハ x ノ最大ナル値ヲ x_1 トシ最小ナル値ヲ x_2 トセハ解法
 變數ハ $x_1 - x_2 + 1$ ナリ若シ方程式中未知元ノ段數異號ニシテ其數第四百二
 十條ニ述ル所ノ理ニ合ハ、解法變數限リナシ其故何トナレハ方程式ノ形
 狀若シ $ax - by + cz = d$ 即チ $ax - by = d$ 此ノ如クニシテ此式諸段數ノ値能
 ク第四百二十條ノ理ニ合ハ、 x ノ値一種ニ對合スル x, y ノ値限リナシ由
 テ解法變數無限ナリ

註 $x_1 - x_2 + 1$ ニテ示ス所ノ解法變數ハ r ニ一種ノ値ヲ配スルキ x ノ
 値ニ由テ生スル變數ナリ解法總變數ニアラス

設令ハ方程式ノ形狀 $5x + 6y + 20z = 187$ 此ノ如クナレハ

$$5x + 6y = 187 - 20z = c' \quad x = \frac{c' - 6y}{5} = -y + \frac{c' - y}{5} \quad \text{ナ得由テ} \quad \frac{c' - y}{5} = r + 1$$

$$x = y = c' - 5r = 187 - 20z - 5r \quad \text{ナ得故ニ又} \quad x = -187 + 20z + 6r \quad \text{ナ得而シテ}$$

$$z \text{ノ値ノ限リハ} 1 \leq \frac{187 - 5 - 6}{20} = \frac{176}{20} = 8 \frac{4}{5} \quad \text{トナリ若シ} z = 1 \text{ナレバ}$$

$$x = -167 + 6r, y = 167 - 5r \text{ナリ} r \text{ノ値ハ} 28 \text{ヨリ} 33 \text{ニ至ルヲ限リトス故}$$

$$x = 33 - 28 + 1 = 5 + 1 = 6 \text{即チ六種ノ變化アリ此ニ由テ} z = 1 \text{ナルキ} r = 33 \text{ナレ}$$

$$x = 1, y = 27 \text{ナリ若シ又} r = 29 \text{ナレバ} x = 7, y = 22 \text{ナリ若シ又} r = 30 \text{ナレ}$$

$$x = 3, y = 17 \text{ナリ若シ又} r = 31 \text{ナレバ} x = 19, y = 12 \text{ナリ若シ又} r = 32 \text{ナレ}$$

$$x = 25, y = 7 \text{ナリ若シ又} r = 33 \text{ナレバ} x = 31, y = 2 \text{ナリ而シテ} x \text{ノ値ハ}$$

順次ニ六チ増シテノ値ハ順次ニ五チ減ス

又同法ニテ $z = 2$ ナルキハ r ノ値ハ 25ヨリ 29ニ至ルヲ限リトシ解法變數五

ナルヲ知ル其第一ハ $x = 3, y = 22$ ニシテ末ハ $x = 27, y = 2$ ナリ

又同法ニテ $z = 3$ ナルキ解法四變ヲ得 $x = 1$ ナルキ亦解法四變ヲ得 $z = 4$ ナル

キ解法三變ヲ得 $z = 5$ ナルキ解法二變ヲ得 $z = 7$ ナルキ亦解法二變ヲ得 $z = 8$ ナ

ルキ解法一變ヲ得ヘシ此等ノ諸解法ハ學者習練ノタメ自ラ求メテ知ルヘ

シ

又 $z = 8$ ナルキハ $x = 3, y = 2$ ニシテ z ノ値ノ大極ハ $8 \frac{1}{5}$ ナルヲ以テ解法變數爰

ニ底止ス其故何トナレハ若シ $z = 9$ トセハ $x = -1 + 6r, y = 7 - 5r$ トナルヲ以

テ r ノ値ヲ正數トスルモ負數トスルモ r ノ値正數ナル能ハサルガ故ナ

リ

此方程式ニテハ z ノ値偶數ナル能ハス其故何トナレハ z ノ値若シ偶數ナ

リトセハ $6y + 20z$ ハ奇數ナラサルヲ得ス然レバ $5x$ ノ段數偶數ナルガ故ニ

然ル能ハス由テ不合理ナリ是故ニ z ノ値ハ偶數ナル能ハス

又 $5x + 20z = 187 - 6y$ ナルガ故ニ前節ハ五ノ幾倍ニ適當ス由テ後節亦然

ラサルヲ得ス故ニ $6y$ ノ値ハ末位必ス二ナラサルヲ得ス由テ $5x$ ノ値ハ末位

ニ二若シクハ七ヲ有セサルヲ得ス然レモノ値ハ此ノ如キ限界ナシ是レ
 w y ノ段數 5 ト 6 トハ公約數ヲ有セサルガ故ナリ是故ニ w y ノ値ハ連續數
 トスルヲ得由テ z ヲ後節ニ轉スルヲ宜トス
 又方程式 $ax + by \parallel d - cz \parallel e$ ニ於テ a b 兩數公約數ヲ有セサルハ z ノ値
 ナ任意ナル整數トナスヲ得第四百二十條ヲ視ヨ然レモ c ノ値ヲ a b ノ
 和ニ等シク或ハ更ニ大ナラシムルヲ必要トス若シ a b 兩數公約數 m ナ
 有スルハ m 若シ d e ノ公約數ナラサレハ z ノ値ハ c' ノ値ヲ m ノ幾倍ニ適
 當セシムヘキ數ヲ撰マサルヲ得ス故ニ斯ルハ z ノ値連續數ナル能ハス
 由テ斯ルハ cz ヲ後節ニ轉セサルヲ宜トス若シ b c 兩數公約數ヲ有セサ
 ルハ cz ヲ後節ニ轉スルヲ宜トス

不定方程式問題三

第一 $5x + 4y + 3z \parallel 24$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整數ナル w y z ノ値ヲ發見
 スヘシ并ニ又解法變數ヲ問フ

第二 $10x + 3y + 2z \parallel 29$ 上ノ方程式ヨリ正ノ整數ナル w y z ノ値ヲ發見
 スヘシ并ニ又解法變數ヲ問フ

第三 $3x + 7y + 17z \parallel 100$ 上ノ方程式ヲ正ノ整數ニテ解スルハ解法變數
 如何

第四 $30x + 15y + 6z \parallel 171$ 上ノ方程式ヲ正ノ整數ニテ解スルハ解法變
 數如何

第五 三分之幾四分之幾五分之幾ト云ヘル三分數アリ其和六十分分之一百
 三十三ナリト云フ由テ問フ三分數各幾何

第四百二十九條 已定ノ衆數ニテ迭ニ除シテ已定ノ餘數ヲ剩ス所ノ最小
 數ヲ發見スルノ法

所要ノ數ヲ V ト命シ未知ノ除商ヲ w x y z 等ト命シ又已定ノ分母ヲ d d'

$d'' d'''$ 等ト命シ己定ノ餘數ヲ $d'' d'''$ 等ト命スレハ左ノ式ヲ得

$$V = da + r = d'x' + r' = d''x'' + r'' = d'''x''' + r''' = \dots \dots \dots (I)$$

今方程式 $da + r = d'x' + r'$ 即チ $da - d'x' = r' - r \dots \dots (I)$ ナ第四百十七條ノ解法ニ從テ解シテ x' ノ正ノ整數ナル値ヲ求ムヘシ但シ新未知元 p' ナ第四百十七條ノ解法ノ r' ノ如ク命シ之ヲ以テ x' ノ値ヲ顯ス所ノ式ヲ作ルヘシ然ルキハ x' ノ値左ノ如シ

$$x = ap + b, x' = d'p + b' \text{ 由テ } c = d'b + r' \text{ トセハ左ノ式ヲ得}$$

$$V = d'x' + r' = d'd'p + c \quad (II) \quad \text{此ニ由テ方程式 } d'x' + r' = d''x'' + r'' \text{ ハ變シテ}$$

$$d'd'p + c = d''x'' + r'' \text{ 即チ } d'd'p - d''x'' = r'' - c \dots \dots (III) \text{ トナル是故ニ第四百十七條}$$

ノ解法ニテ此方程式ヲ解シテ p'' ノ値ヲ新未知元 p' ナ以テ顯ス所ノ式ヲ求ムヘシ即チ左ノ如シ

$$p = mp' + n, x' = a'p' + b' \text{ 由テ } c' = d'b' + r' \text{ トセハ左ノ式ヲ得}$$

$$V = d'x' + r' = a'd'p' + c' \quad (IV) \quad \text{此ニ由テ方程式 } d'x' + r' = d''x'' + r'' \text{ ハ變シテ}$$

$a'd'p' + c' = d''x'' + r''$ 即チ $a'd'p' - d''x'' = r'' - c' \quad (V)$ トナル是故ニ第四百十七條ノ解法ニテ此方程式ヲ解シテ p''' ノ値ヲ新未知元 p'' ナ以テ顯ス所ノ式ヲ求ムヘシ即チ左ノ如シ

$$p' = mp'' + n, x'' = a''p'' + b'' \text{ 由テ } c'' = d''b'' + r'' \text{ トセハ左ノ式ヲ得}$$

$$V = d''x'' + r'' = a''d''p'' + c'' \quad (VI)$$

是故ニ此四種ノ題意ニ合フ所ノ數ハ玆ニ求メ得タル V ナ正ノ整數トナスヘキ最小數ヲ p'' ニ配スレハ得ル所ノ V ノ値ハ即チ所要ノ數ナリ

第四百三十條 前條ノ設題ヲ解スル別法

己定ノ分母ヲ $d_1 d_2 d_3 \dots d_n$ トシ己定ノ餘數ヲ $r_1 r_2 r_3 \dots r_n$ トシ第一次第二次第三次等ト逐テ第 n 次ニ至ル題意ニ合フ諸數ヲ $N_1 N_2 N_3 \dots N_n$ トシ又 d_1 ノ最小公倍數 L_1 トシ $d_1 d_2 d_3$ ノ最小公倍數ヲ L_2 トシ逐テ此ノ如ク命シ n 分母ノ最小公倍數ヲ L_n トス然ルキハ d_1 ニテ除シテ r_1 ナ剩スヘキ最小數ハ $d_1 + r_1$ ナルヲ明ナリ由テ $N_1 = d_1 + r_1$ ナリ之ニ d_1 ナ累加スルモ餘數變セス由

テ $N_2 \equiv pL_1 + N_1$ ナリ而テ此數 d_2 ナ以テ除シテ r_2 ヲ剩スヘキカ故ニ

$\frac{pL_1 + N_1 - r_2}{d_2}$ 整數ナラサルヲ得ス此狀勢ニ合フヘキ p ノ最小値ヲ定ルキハ

N_2 ヲ求メ得ヘシ又 $N_2 \equiv L_2$ ヲ累加スルモ餘數變セズ由テ $N_2 \equiv pL_1 + N_1$ ナリ而シテ此數 d_2 ナ以テ除シテ r_2 ヲ剩スヘキカ故ニ $\frac{pL_1 + N_1 - r_2}{d_2}$ ハ整數ナラハ

ルヲ得ス此狀勢ニ合フヘキ p ノ最小ナル値ヲ定ルキハ N_2 ヲ求メ得ヘシ逐テ此ノ如ク同法ヲ施サハ N_1, N_2 等ヲ求メ得ヘシ由テ整數ヲ M トセハ p ヲ發見スヘキ公式 $\frac{pL_{n-1} + N_{n-1} - r_{n-1}}{d_n} \equiv M$ 此ノ如シ此式ヨリ p ヲ發見セハ

$N_n \equiv pL_{n-1} + N_{n-1}$ ナリ此法ニ從フキハ N_1, N_2, N_3 等ノ諸數皆前次ノ題意ニ合フ所ノ最小數ナルカ故ニ末次ニ求メ得タル數ハ題意ニ適スル最小數ナルヘシ

例一 設令ハ三除シテ餘數二箇ヲ得五除シテ餘數一箇ヲ得七除シテ餘數

チ

六箇ヲ得ヘキ最小數ヲ問フ

解法 除商チ x, y, z トセハ $V \equiv 3x + 2 \equiv 5y + 1 \equiv 7z + 6$ ヲ得故ニ

$$3x + 2 \equiv 5y + 1 \text{ ヨリ } x \equiv \frac{5y - 1}{3} \text{ ヲ求ム由テ}$$

$$\frac{5(5y - 1)}{3} \equiv \frac{25y - 5}{3} \equiv 8y - 1 + \frac{y - 2}{3} \text{ トナル今 } \frac{y - 2}{3} \equiv r + s \text{ ハ } y \equiv 3r + 2 \text{ ト}$$

$$\text{ナル由テ方程式 } 5y + 1 \equiv 7z + 6 \text{ ハ變シテ } 15r + 11 \equiv 7z + 6 \text{ トナル}$$

$$\text{由テ } z \equiv \frac{15r + 5}{7} \equiv 2r + \frac{r + 5}{7} \text{ ヲ得今又 } \frac{r + 5}{7} \equiv s + t \text{ ハ } r \equiv 7s - 5 \text{ トナ}$$

$$\text{ル故ニ } z \equiv 15s - 10 \text{ ヲ得由テ } V \equiv 7z + 6 \equiv 105s - 64 \text{ ヲ得由テ } s \equiv 1 \text{ ナ}$$

ルキ V ノ値最小ナリ即チ $V \equiv 41$ ヲ得由テ所要ノ數四十一箇ナリ

又餘數負數ナルヲアリ設令ハ十七箇ハ五除シテ商三箇餘數二箇ナリ或ハ商四箇餘數負三箇ナリ由テ $V \equiv 3 \times 5 + 2 \equiv 4 \times 5 - 3$ ナリ

例二 設令ハ三除シテ餘數一箇ヲ得七除シテ餘數四箇ヲ得九除シテ餘數負二箇ヲ得ヘキ最小數ヲ問フ

解法 除商を x とし x トセハ $V = 3x + 1 = 7y + 4 = 9z - 2$ ヲ得故ニ

$$3x + 1 = 7y + 4 \text{ 即チ } x = 2y + 1 \text{ トナル由テ } \frac{1}{3}y = x \text{ トセハ } y = 3x \text{ トナル由テ 方程式 } 7y + 4 = 9z - 2 \text{ ハ變シテ } 21x + 4 = 9z - 2 \text{ 即チ}$$

$$9z - 21x = 6 \text{ 即チ } 3z - 7x = 2 \text{ トナル由テ } z = 2x + \frac{x+2}{3} \text{ ヲ得由テ}$$

$$\frac{x+2}{3} \text{ ントセハ } x = 3s - 2 \text{ ヲ得故ニ } z = 7s - 4 \text{ トナル此ニ由テ}$$

$$V = 9x - 2 = 63s - 38 \text{ ヲ得由テ } s = 1 \text{ ナルキ } V = 25 \text{ トナル是レ所要ノ數ナリ}$$

不定方程式問題四

第一 三除シテ餘數一箇ヲ得五除シテ餘數三箇ヲ得六除シテ餘數四箇ヲ得ヘキ最小數ヲ問フ

第二 五除シテ餘數一箇ヲ得七除シテ餘數一箇ヲ得九除シテ餘數ナキ最小數ヲ問フ

第三 六除シテ餘數三箇ヲ得八除シテ餘數負三箇ヲ得九除シテ餘數ナキ最小數ヲ問フ

第四 二箇ヨリ九箇ニ至ル八種ノ數ヲ以テ迭ニ除シテ餘數ナキ最小數ヲ問フ

第五 二除シテ餘數一箇ヲ得三除シテ餘數二箇ヲ得五除シテ餘數三箇ヲ得七除シテ餘數四箇ヲ得十一除シテ餘數五箇ヲ得ヘキ最小數ヲ問フ

第六 一圓錢若干アリ其幾何ナルヲ知ラス唯二百圓ニ下ラスシテ三百圓ニ滿タサルヲ知レリト云フ若シ六圓チ一封トセハ四圓剩リ八圓チ一封トセハ二圓剩リ九圓チ一封トセハ二圓不足ナリト云フ由テ問フ總數幾何

雜問七

第一 $(x+a) + (s+a+u) + (s+a+2u) + \dots$ 上ノ級數 n 項ニ至ル總數ヲ問フ但 $s = \frac{1}{2}n^2u + (n-1)u$ ナリ

第二 兩數 a, b ノ平差中項若シ同比中項ニ二倍セハ左ノ式ヲ得此作法ヲ問フ $a:b::2+1:3:2-1:3$

第三 一數 $\frac{1}{2}(s+x)$ ナル分シ第一分ヨリ順次ニ同數ヲ遞加セハ各分如何

第四 平差級數アリ首項ヨリ第 n 項ニ至ル總數 $(na - \frac{n+1}{2}u) \frac{n}{a+b}$ ナリ此級數ノ各項ヲ問フ

第五 平差級數ノ第 n 項 $-(3n-1)$ ナルキハ首項ヨリ第 n 項ニ至ル總數 $\frac{1}{2}(3n-1)$ ナリ此證ヲ問フ

第六 平差級數ノ第 m 項及ヒ第 n 項ヲ合スレハ第 m 項ノ二倍ヲ得ヘシ此證ヲ問フ

第七 平差級數 p 種アリ各種級數ノ首項 $1, 2, 3, 4$ 等ニシテ各種級數ノ公差 $1, 2, 3, 4$ 等ナリ由テ問フ各種級數 n 項ニ至ル總數 p 種ノ和ヲ問フ

第八 二五八等ノ級數ト三七十一等ノ級數トアリ各一百項ニ至ル間ニ同數ナル項幾何アリヤ

第九 同比級數ノ首項 a 尾項 b 公比 r 總數 s 項數 n ノ五元中三元ヲ知テハ他ノ二元ヲ求ルヲ得若シ其各元ヲ算スル公式ヲ作ラハ二十式ヲ得ヘシ其公式ヲ作ルノ法如何

第十 $1+2+3+23+61+\dots$ 上ノ級數ノ第 n 項及ヒ首項ヨリ第 n 項ニ至ル總數如何

第十一 $1 - \frac{3}{2} + \frac{7}{4} - \frac{15}{8} + \dots$ 上ノ級數第 n 項及ヒ首項ヨリ第 n 項ニ至ル總數ヲ問フ

第十二 $\{s-a\} + \{s-(a+au)\} + \{s-(a+au+au^2)\} + \dots$ 上ノ級數第 n 項ニ

至ル總數如何但 $\sum_{k=1}^n \frac{a^k - 1}{a - 1}$ ナリ

第十三 前問ノ r 若シ一箇ヨリ小ナレハ前問ノ級數無窮ニ至ル總數如何

第十四 同比無窮級數アリ總數二箇ニシテ各項皆次ノ諸項ノ和ニ等シ此級數ノ各項如何

第十五 同比級數ノ第 m 項ニシテ第 p 項 n 箇ナレハ第 p 項ハ $\frac{1}{n}(m)$ ニシテ第 q 項ハ $\frac{1}{n}(m)$ ナリ此證ヲ問フ

第十六 同比級數ノ第 p 項 P 箇ニシテ第 q 項 Q 箇ナレハ第 n 項如何

第十七 級數アリ其列項ヲ顯ス公式 $m+n$ ナリ但シ a ハ不易數ニシテ n ハ本項排列ノ序次ナリ以テ問フ此級數首項ヨリ第 p 項ニ至ル總數如何

第十八 同比級數 n 種アリ各種級數ノ首項皆一箇ニシテ公比ハ $1, 2, 3, 4$ 等ナリ若シ各種ノ級數 n 項ニ至ル總數 s_1, s_2, s_3 等トセハ左ノ式ヲ得此證ヲ問フ

$$s_1 + s_2 + 2s_3 + 3s_4 + \dots + (n-1)s_n = 1 + 2^n + 3^n + \dots + n^n$$

第十九 諧音級數ノ初列二項 a, b ナレハ此級數ノ第 n 項如何

第二十 三數 a, b, c ハ平差級數ヲナシ a, mb, c ノ三數同比級數ヲナサハ a, m^2b, c ノ三數諧音級數ヲナス此證ヲ問フ

第二十一 平差、同比、諧音ノ三級數アリ首尾ノ兩項皆同シク列項數亦皆 $2n+1$ ナリ此三級數ノ第 $n+1$ 項ヲ求ムレハ順次ニ同比級數ヲナス此證ヲ問フ

第二十二 $\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^4}\right)^2 + \dots$ 上ノ級數 n 項ニ至ル總數如何

第二十三 $5 + 55 + 555 + \dots$ 上ノ級數 n 項ニ至ル總數如何

第二十四 三數 a, b, c ハ平差級數ヲナシ a', b', c' ハ諧音級數ヲナシ aa', bb', cc'

ハ同比級數ヲナサハ $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} + \frac{c}{c'}$ ナリ此證ヲ問フ

第二十五 兩數 a, b ノ間ニ平差中項 n 項ヲ插入シ又諧音中項 n 項ヲ插入

シ平差級數ノ各中項ヲ同次號ナル諧音級數ノ中項ニテ除スレハ所得ノ商新ニ n 項ノ級數ヲナス此總數如何

第二十六 一箇ヲ首項トスル諧音級數 n 項アリ其列項 $n-1$ 項ヲ連乘セシ乘積幾種ヲ求メ變數ヲ尽シテ總計セハ所得ノ總數ノ全項ノ連乘積ニ於ル比ハ $2n$ ノ一ニ於ル比ニ同シト云フ由テ問フ此級數ノ各項如何

第二十七 $\frac{a}{1+x} = \frac{3a^2}{1+x^2} = \frac{5a^3}{1+x^3} = \frac{7a^4}{1+x^4}$ 等ノ級數ノ第 n 項如何

第二十八 $\frac{n}{x^n} = \frac{n-1}{2x^{n-1}} = \frac{n-2}{3x^{n-2}} = \frac{n-3}{4x^{n-3}}$ 等ノ級數ノ第 n 項如何

第二十九 兩數 m 、 n ノ同比中項ヲ g トシ m 、 g ノ平差中項ヲ a_1 トシ諧音中項ヲ a_2 トシ g ノ平差中項ヲ a_3 トシ諧音中項ヲ a_4 トセハ $a_1 a_2 = g^2 = a_3 a_4$ ナリ此證ヲ問フ

第三十 a ヲ首項トシ b ヲ尾項トシテ中間ニ諧音中項 n 項ヲ插入シ又 b ヲ首項トシ a ヲ尾項トシテ中間ニ平差中項 n 項ヲ插入シ兩級數ノ同次

ナル列項ヲ相乘セハ所得ノ乘積新級數ヲナス此級數ノ總數如何

第三十一 兩數 a 、 b ノ間ニ諧音中項 n 項ヲ插入シ中項中ノ首尾兩項ノ差ノ a 、 b ノ差ニ於ル比ハ $n-1$ ノ $n+1$ ニ於ル比ヨリ小ナリ此證ヲ問フ

第三十二 級數アリ其列項ヲ顯ス公式 $\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$ 此ノ如シ此式中 n ハ本項排列ノ序次ナリ由テ問フ此級數 $2n$ 項ニ至ル總數如何但シ p ハ整數ヲ顯スナリ

第三十三 兩數ノ平差中項 A ニシテ同比中項 G ナレハ此兩數ヲ顯ス式 $A \pm \frac{1}{n} \{ (A+G)(A-G) \}$ 此ノ如シ此證ヲ問フ

第三十四 n 元ヲ以テ作ルヘキ各種ノ錯列變數ノ和如何

第三十五 $(1+x)^n$ ニ於テ n 整數ナレハ上式ノ詳式ノ中項 $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{n!} x^n$

此ノ如シ此證ヲ問フ

第三十六 $(a+x)^n$ 上式ノ詳式ノ奇次ノ各項ノ總數ヲ A トシ偶次ノ各項ノ總數ヲ B トセハ $A^2 - B^2 = (a^2 - x^2)^n$ ナリ此證ヲ問フ

第三十七 $(x+a)^n$ 上式ノ詳式ノ列項ヲ t_0, t_1, t_2, t_3 等トセハ

$$(t_0 - t_2 + t_4 - \dots)^2 + (t_1 - t_3 + t_5 - \dots)^2 = (x^2 + a^2)^n \text{ ヲ得此證ヲ問フ}$$

第三十八 $(3a-2x)^{\frac{1}{2}}$ 上式ノ詳式ノ第 r 項ヲ問フ

第三十九 $\left(1+\frac{9}{10}\right)^{\frac{2}{3}}$ 上式ヲ級數ニ詳開セハ第幾項ヨリ歛收ヲ始ルヤ

第四十 $\frac{x^2+px+q}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ 上式ヲ分解シテ一次式ナル分母ヲ有スル三分

數トナスルシ

第四十一 $\frac{1}{x^2-(a+b)x+ab}$ 上式ヲ級數ニ化シ x ノ昇幂ノ順ニ各項ヲ排

列セハ x^n ノ段數如何

第四十二 $\frac{n-1}{n} \cdot x + \frac{n-2}{n} \cdot x^2 + \frac{n-3}{n} \cdot x^3 + \dots$ 上ノ級數 n 項ノ總數ヲ問フ

第四十三 $a^2 + (a+b)^2 + (a+2b)^2 + (a+3b)^2 + \dots$ 上ノ級數 n 項ニ至ル總數ヲ問フ

第四十四 $1-x-7x^2-21x^3-79x^4-241x^5-\dots$ 上ノ級數ノ第 n 項如何

第四十五 $1+4x+12x^2+34x^3+96x^4+274x^5+792x^6+\dots$ 上ノ級數第 n 項ニ至ル總數如何

第四十六 級數九項アリ各項相連續スルノ法ヲ知ラス唯首項ハ一箇尾項ハ七十三箇中項(即チ第五項ナリ)ハ二十一箇ナルヲ知り又推差法ヲ以テ各次ノ逐差ヲ推スニ第三差以下總テ空數ナルヲ知レリト云フ由テ問フ此級數如何

第四十七 海水ノ淺深ヲ測量スル者アリ海水干満アルヲ以テ時々淺深同シカラサルヲ知レリト云フ乃チ一時ニハ三十三尺二寸二時ニハ三十八尺九寸三時ニハ四十五尺二寸四時ニハ五十二尺二寸五時ニハ六十尺一寸ナリト云フ由テ問フ一時半ニハ深幾何ナリシヤ

第四十八 一箇ト四十九箇トノ間ニ整數五項ヲ插入シテ級數ヲ作り推差法ヲ以テ各項ノ逐差ヲ推スニ第三差以下總テ空數ヲ得ント欲ス由テ問

フ挿入スル中項各如何

第四十九 $(1+2x+3x^2+4x^3+\dots)^n$ 上式ノ詳式中 x ノ段數如何

第五十 $x+2(x-1)+3(x-2)+\dots+\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)$ n ヲ偶數トシテ上式ノ

簡式ヲ求ム〔簡式ハ詳式ノ對ナリ〕

第五十一 $1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\dots$ 上ノ級數 n 項ニ至ル總數ヲ問フ

第五十二 二項式ノ幾乘冪ノ詳式第六項ヨリ第九項ニ至ル四項ヲ a, b, c

d トセハ $\frac{b^2-ac}{c-bd} = \frac{4a}{3c}$ ナ得此證ヲ問フ

第五十三 $c^{m^2}=ab^{n^2-1}$ 上ノ指數方程式ヨリ x ノ値ヲ求ムヘシ

第五十四 $a^2x^2+a^2x^2=a^{2n}$ 上ノ指數方程式ヨリ x ノ値ヲ求ムヘシ

第五十五 $x^2=y^2, x^2=y^2$ 上ノ指數方程式ヨリ x, y ノ値ヲ求ムヘシ

第五十六 $y=10^{\frac{1}{1000}}, z=10^{\frac{1}{1000}}$ x, y, z ノ三數上式ノ理ニ合ハハ

$x=10^{\frac{1}{1000}}$ ナリ此證ヲ問フ

第五十七、三種ノ對數底 a, b, c 順次ニ同比級數ヲナスギハ此等ノ底ニ從

フ同數設令ハ n ノ三對數ハ順次ニ諧音級數ヲナス此證ヲ問フ

第五十八 米若干俵アリ其幾何ナルヲ知ラス唯一百俵ニ滿タサルヲ知ル

今下併ヲ五俵トシテ之ヲ幾箇所ニ杉形ニ積マハ五俵剩リ下併ヲ六俵ト

シテ之ヲ幾箇所ニ杉形ニ積マハ十一俵剩ルト云フ但シ杉形ハ下併ヨリ

順次ニ一俵ヲ減シテ積ミ最上段一俵ニ止ルナリ〔由テ問フ此總數幾何

第五十九 $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots$ 上ノ級數 n 項ニ至ル總數及ヒ無窮ニ

至ル總數幾何

解 $\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$

是レ n 項ニ至ル總數ナリ又 $\frac{1}{n+1}$ トセハ $\frac{1}{n+1}$ ヲ得是レ無窮ニ至ル總

數ナリ

第六十 $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.6}+\frac{1}{4.7}+\dots$ 上ノ級數 n 項ニ至ル總數及ヒ無窮ニ

至ル總數ヲ問フ

第六十一 平差級數ノ各項正ノ整數ニシテ項數 n 奇數ナル n 項ニ至ル
總數 n^2 トナルモノ二種アリ此證ヲ問フ

第六十二 平差級數ヲナス三分數アリ〔皆眞分數其分母ハ六ト九ト十八ト
ニシテ此三分數ノ和二箇三分之ニナリト云フ由テ問フ三分數各如何
第六十三 書籍六十冊アリ内五冊ヲ一部トスルモノ三部四冊ヲ一部トス
ルモノ六部三冊ヲ一部トスルモノ七部ナリ今之ヲ三人ニテ平分シテ〔即
チ各二十冊ヲ得ルナリ〕三人ノ所得皆一部ニ滿タサル奇零ナカラシメン
トス此分法幾種アリヤ

第六十四 水星ノ一周天ハ八十七日九六九二五五ナリ之ヲ略近分數ニ改
ムレハ如何但シ分數ハ最簡ニシテ最モ近ク眞數ニ合フモノヲ求ム
第六十五 $\frac{2}{3} \parallel 0$ 上式ノ x ノ値ヲ連分數ニテ顯サハ如何又之ヲ各次漸近
分數ニ化スレハ如何但シ對數ヲ用フルヲ許サス

第六十六 $ax^2 + bx + c \parallel 0$ 上式ノ兩商ヲ m トセハ左ノ式ヲ得ヘシ此

証ヲ問フ

$$\log_e (a - bx + cx^2) = \log_e a + (m + n)x - \frac{u^2 + v^2}{2}x^2 + \frac{u^3 + v^3}{3}x^3 - \dots$$

第六十七 $\log_e 4 = 1 + \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{3.4.5} + \frac{2}{5.6.7} + \dots$ 上式ノ作法ヲ問フ

○高次方程式

方程式之定理

第四百三十一條 各次方程式ヲ顯ス公式ヲ左ノ如ク命ス

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0 \dots\dots\dots [1]$$

此方程式ニ於テ次數ヲ顯ス所ノ m ハ正ノ整數ナリ

方程式ノ形狀此公式ニ合ハサルモ諸項ヲ盡ク前節ニ集テ未知元ノ降幕ノ順ニ排列シ首項ノ段數ヲ以テ普ク列項ヲ除スレハ必ス此公式ニ合フ

此方程式ニ於テ諸段數 A, B, C 等ノ值定リナシ正數ナルモアリ負數ナルモアリ整數ナルモアリ分數ナルモアリ常數ナルモアリ根數ナルモアリ實數ナルモアリ虛數ナルモアリト知ルヘシ

又尾項 U ハ x ノ段數ト視做スヲ得此項ヲ方程式ノ實項ト云フ

第四百三十二條 方程式若シ未知元 x ノ m 乘幕ヨリ順次ニ下テ空數幕ニ至ル各幕數ヲ缺漏ナク具有スルモハ完全式ト云フ若シ未知元 x ノ幕數中

不足ナルモノアラハ不全式ト云フ不全式ト雖モ缺項ノ段數ニ 0 ヲ配附セハ完全式ノ形狀ニ改ルヲ得ヘシ

第四百三十三條 第二百六十八條ニ於テ未知數一元ヲ包容スル二次式ハ總テ一次式ナル(未知元ニ就テ曰フ以下之ニ倣ヘ)兩二項式ノ相乘積ニ改ルヲ得其各乘子ノ首項ハ未知元ニシテ尾項ハ本式ヲ空數ト比較シテ作レル二次方程式ノ兩商ノ正負ヲ變換セシモノナリト曰ヘリ此理三次以上各次式ニ通ス若シ一次式ナル二項式三式ヲ連乘セハ詳式三次式トナル設令ハ左ノ如シ

$$(x-2)(x+3)(x-5)=x^3-4x^2-11x+30.$$

$$(x-2+\sqrt{-3})(x-2-\sqrt{-3})(x+\frac{7}{4})=x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{49}{4}.$$

$$(x+1-\sqrt{-3})(x+1+\sqrt{-3})(x-2)=x^3-8.$$

此理ヲ推シテ m 次式ハ總テ一次二項式 m 式ノ連乘積トナスヘキヲ知ル

此論未ダ盡サス然レモ學者第四百三十九條ヲ讀ムノ後チハ此理ノ正シ

キヲ知ルヘシ故ニ爰ニ贅セズ

第四百三十四條 未知元 x ヲ包含セシ多項式ヲ空數ト比較シテ方程式ヲ作リ其前節ノ二項式乘子 $x-a$ 此ノ如キモノヲ發見スルヲ得ハ此 a ハ此方程式ノ一商ナリ其故何トナレハ $x-a$ ヲ代用セハ前節空數トナリテ兩節適等ナルカ故ナリ

是故ニ方程式ノ前節ノ一次二項式乘子ヲ盡ク發見スルヲ得ハ其各式ヲ一々空數ト比較シテ作レル方程式ノ商ハ皆原式ノ x ノ値トナスヘシ方程式ノ前節ヲ一次二項式乘子ノ連乘積ニ改ルノ法ハ方程式ノ次數増加スルニ從テ漸ク難シ古ヨリ未ダ四次以上ナル高次方程式ヲ解スルノ公法ヲ發見セシ者ナシ然レハ數字方程式ニテハ未ダ公法トナス能ハスト雖モ商ヲ求ルノ法アリ其商若シ可度數ナレハ正值ヲ得ヘシト雖モ若シ不可度數ナレハ畧近ノ值ヲ得ルナリ

第四百三十五條 $x+a$
 $x+b$
 $x+c$ 等ノ如ク首項同一ニシテ尾項不同ナル二項式乘

子ノ連乘積ヲ作ルノ法ヲ定メンカタメ此等ノ諸乘子ヲ連乘セハ左ノ如シ

$$\begin{array}{r} x+a \\ x+b \\ \hline x^2+a(x+b) \\ \hline \end{array} = (x+a)(x+b),$$

$$\begin{array}{r} x+a \\ x+b \\ x+c \\ \hline x^2+a(x+b) \\ \quad +bc \\ \hline \end{array} = (x+a)(x+b)(x+c),$$

$$\begin{array}{r} x+a \\ x+b \\ x+c \\ x+d \\ \hline x^2+a(x+b) \\ \quad +bc \\ \quad \quad +cd \\ \hline \end{array} = (x+a)(x+b)(x+c)(x+d).$$

以上ノ連乘積ヲ看テ左ノ定理アルヲ知ル

第一 首項ナル x ノ指數ハ二項式乗子ノ連乗次數ニ等シク是ヨリ順次ニ

一ヲ減シ竟ニ尾項ニ至テ空トナツテ止ム

第二 首項ノ段數ハ一、第二項ノ段數ハ二項式乗子ノ尾項ノ和、第三項ノ段數ハ二項式乗子ノ尾項兩數相乗積ノ和、第四項ノ段數ハ二項式乗子ノ尾項三數連乗積ノ和、逐テ此ノ如シ尾項即チ實項ハ二項式乗子ノ總尾項ノ連乗積ナリ

是故ニ二項式乗子ノ數増加スト雖モ連乗積ノ詳式第 $n+1$ 項ノ段數ハ二項式乗子ノ尾項 n 式連乗積ノ和ナルヲ知ル

前ノ定理ハ二項式乗子 m 式ノ連乗積ニ適ヘリトシテ更ニ二項式乗子一式ヲ乘スルモ所得ノ乗積ノ各項尙ホ此理ニ合フヲ証明セハ此理公理ナルヲ知ルヘシ

今二項式乗子 m 式ヲ $x+a$
 $x+b$
 $x+c$
 \vdots
 $x+p$ トシ此連乗積ノ詳式ヲ(一)式トシ其各項皆前ノ理ニ合フトシ更ニ一式 $x+q$ ヲ乘スレハ(二)式ヲ得

$$\begin{aligned}
 & x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Mx^{m-n+1} + Nx^{m-n} + \dots + Px + U \dots \dots (一) \\
 & x + q \\
 & \hline
 & x^{m+1} + A'x^m + B'x^{m-1} + \dots + N'x^{m-n+1} + U'x \\
 & + q' + M'q + \dots + P'q + U'q \dots \dots (二)
 \end{aligned}$$

今所得ノ新連乗積(二)ヲ看テ指數ノ法尙ホ前理ニ適ヘルヲ知ル

又各項ノ段數ヲ考フルニ首項ノ段數ハ尙ホ一箇ナルヲ見ル又第二項ノ段數ハ $A+q$ ナルヲ見ル而シテ A ハ憶定ニ由テ m 乗子ノ尾項ノ和ナルカ故ニ $A+q$ ハ $m+1$

乗子ノ尾項ノ和ナリ又第三項ノ段數ハ $B+Ay$ ナルヲ見ル而シテ B ハ憶定ニ由テ m 乗子ノ尾項兩式相乗ノ和、 Ay ハ新乗子 $x+q$ ヨリ生スル新增積ノ總數ナリ此ニ由テ $B+Ay$ ハ $m+1$ 乗子ノ尾項兩式相乗ノ和ナリ又第 $n+1$ 項ノ段數ハ $N+Mq$ ナルヲ見ル而シテ N ハ憶定ニ由テ m 乗子ノ尾項 n 式ノ連乗積ノ總數

M ハ憶定ニ由テ m 乗子ノ尾項 $n-1$ 式ノ連乗積ナルカ故ニ Mq ハ新乗子 $x+q$ ヨリ生スル尾項 n 式連乗ノ新增積ナリ

前定理ハ二項式乗子四式ノ連乘積ニ適ヘルヲハ實乘法ニテ前ニ証明セリ
故ニ一乗子ヲ増シテ五乗子ノ連乘積トナルモ猶ホ此理アルヲ推知ス既ニ
五乗子ノ連乘積猶ホ此理ニ適ヘルヲ知ラハ又推シテ六乗子ノ連乘積亦此
理アルヲ知ル逐テ此ノ如シ是故ニ此定理ノ公理ナルヲ証明ス

第四百三十六條 方程式ノ諸商ヲ以テ各項ノ段數ヲ作ル法

二項式乗子 $x-a$ $x-b$ $x-c$ \dots $x-p$ $x-q$ 此ノ如キモノ m 式ヲ設ケ之ヲ連乘シ乘積ノ詳
式ノ各項ヲ x ノ降幕ノ順ニ排列セハ第四百三十五條ニ據テ所得ノ式
 $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots + Sx^2 + Tx + U$ 此ノ如クニシテ此式中各項ノ
段數左ノ如クナルヲ知ル

$$A = -a - b - c - \dots - p - q,$$

$$B = +ab + ac + bc + \dots + ap + aq,$$

$$C = -abc - bcd - acd - \dots - abp - aq,$$

$$\dots$$

$$S = +abcd \dots pq_{m-2} + bcde \dots pq_{m-3} + \dots,$$

$$T = +abcde \dots pq_{m-1} + bcdef \dots pq_{m-1} + \dots,$$

$$U = +abcd \dots pq_m$$

但シ末ノ三式ニ於テ q ノ右傍ノ下ニ $m-2$ 及ヒ m ト記スルハ幾乗子ノ連乘
次數ヲ顯ナリ

此ニ由テ左ノ兩同式ヲ得

$$(x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-p)(x-q) = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Sx^2 + Tx + U \quad (1)$$

此後節ヲ空數ト比較セハ左ノ方程式ヲ得

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Sx^2 + Tx + U = 0 \quad (2)$$

ナリ其故何トナレハ此等ノ諸數ヲ順次ニ (1) 式ノ前節ナル x ニ代フレハ前
節空數トナル此ニ由テ後節亦空數トナルカ故ナリ

(二) 式ノ諸項ノ段數 A B C 等ト諸商トノ關係ヲ左ノ如ク述ルヲ得

第一 第二項ノ段數ハ正負ヲ變換セシ諸商ノ和ナリ

第二 第三項ノ段數ハ兩商ノ相乘積ノ總數ナリ
 第三 第四項ノ段數ハ正負ヲ變換セシ三商ノ連乘積ノ總數ナリ
 第四 第十項ノ段數ハ正負ヲ變換セシ九商ノ連乘積ノ總數ナリ
 第五 實項ハ正負ヲ變換セシ諸商ノ連乘積ナリ
 右定理ニ依テ已定ノ幾商ヲ有スル方程式ヲ作ルヲ得而シテ作り得タル方程式(二)ハ(一)式ノ形狀ヨリ已定數 a, b, c, \dots, p, q ノ外ニ一商ヲモ有セサルヲ知ル其故何トナレハ此等ノ諸商ノ外ニ(一)式ノ前節ヲ空數トナスヘキモノアラサルカ故ナリ
 第四百三十七條 一元各次方程式ハ總テ有商ノ式ナリトセハ後節空數ナル m 次方程式ノ前節ハ一次二項式乘子 m 式ノ連乘積ト視ルヲ得
 論 今先ツ方程式 $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Tx + U = Q(x-a) + R$ ノ一商ヲ a トセハ此式ノ前節ハ $x-a$ ニテ約スヲ得ヘキヲ証明セントス
 若シ $x-a$ ニテ(一)式ノ前節ヲ除スレハ末ノ餘數 R ナキトナルニ至ルヘシ是

レ除商一項ヲ得ル毎ニ實ノ次數減スルカ故ナリ
 今除商ヲ Q トシ餘數ヲ R トセハ左ノ兩同式ヲ得

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Tx + U = Q(x-a) + R \quad (1)$$

若シ $x = a$ ナ代用セハ此式ノ前節空數トナリ後節ノ前項亦空數トナル此ニ由テ $R=0$ ナ得是故ニ餘數ナシ由テ(一)式ノ前節ハ $x-a$ ニテ約スヲ得
 第四百三十八條 前條ニ述ル定理ノ還原亦合理ナリ

方程式 $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0$ ノ前節若シ $x-a$ ナ以テ除シテ餘數ナケレハ a ハ此方程式ノ一商ナリ

論 除商ヲ Q トセハ兩同式 $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Tx + U = Q(x-a) + R$ ナ得今若シ $R=0$ トセハ此方程式ノ後節空數トナル由テ前節モ空數トナル是故ニ a ハ原方程式ニ合フ

第四百三十九條 一元各次方程式ハ總テ商ノ變數次數ニ等フシテ更ニ多カラス

方程式 $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0$ 一商 a 有ストセハ a 前節ノ一乘子ナラサルヲ得ス(第四百三十七條ヲ觀ミ)故ニ a 以テ多項式 $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Tx + U$ ヲ除スルハ所得ノ商 $x^{m-1} + A'x^{m-2} + \dots + T'x + U'$ 此ノ如クナルヘシ此ニ由テ左ノ兩同式ヲ得

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Tx + U = (x-a)(x^{m-1} + A'x^{m-2} + \dots + T'x + U')$$

此式ノ後節ハ x ノ値此後乘子ヲ空數トナスル空數トナル今又方程式

$$x^{m-1} + A'x^{m-2} + \dots + T'x + U' = 0 \text{ ノ一商ヲ } b \text{ ーセハ}$$

$$x^{m-1} + A'x^{m-2} + \dots + T'x + U' = (x-b)(x^{m-2} + A''x^{m-3} + \dots + T''x + U'') \text{ ヲ得逐テ}$$

此クノ如ク同法ヲ施サハ第三第四等ノ兩同式ヲ求メ得ヘシ而シテ竟ニ第一次ニ至レハ後節ノ後乘子一次式トナル玆ニ於テ末次ノ兩同式ヲ取リ前次ノ兩同式ノ後節ノ後乘子ニ代用ス逐テ此ノ如ク同法ヲ施シテ竟ニ原式ニ還ラハ止ム然ルルハ所得ノ兩同式左ノ如シ

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Tx + U = (x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-p)(x-q).$$

今 $x=a$
 $x=b$
 $x=c$
 $x=p$
 $x=q$ ノ中チ何レヲ以テ此式ノ後節ノ x ニ代用スルモ皆之ヲ

空數トナスヘシ是故ニ此 m 種ノ數皆方程式 $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0$

ノ商ナリ而シテ此 m 種ノ數ノ外此方程式ニ合フヘキ x ノ値アルヘカラス其故何トナレハ前ノ兩同式ノ後節ナル一乘子ヲ空數トナスヘキモノハ此 m 種ノ數ノ外ニ得ヘカラス一乘子空數トナルニアラサレハ連乘積空數トナルヲナシ是故ニ此ノ方程式 m 種ノ商ヲ有ス然レモ更ラニ多商ヲ有スヘラカス

第四百四十條 前述ノ理ニ依テ左ノ定理アルヲ知ル

- 第一 第二項ヲ缺ク方程式ハ諸商ノ和空數ナリ
- 第二 實項ヲ缺ク方程式ハ最少ナルモ一商必ス空數ナリ
- 第三 實項ハ諸商ノ連乘積ナルカ故ニ各商ヲ以テ之ヲ約スヲ得
- 第四 已定ノ商ヲ有スル方程式ヲ作ルヲ得
- 第五 一商ヲ知ルヲ得ハ方程式ノ次數一次ヲ減スルヲ得

方程式定理之問題

- 第一 正數二箇負數三箇ノ兩商ヲ有スル方程式ヲ問フ
- 第二 正數一箇負數二箇負數四箇ノ三商ヲ有スル方程式ヲ問フ
- 第三 正數三箇負數二箇負數一箇正數五箇ノ四商ヲ有スル方程式ヲ問フ
- 第四 四商 $1 + \sqrt{-5}, 1 - \sqrt{-5}, +\sqrt{5}, -\sqrt{5}$ ヲ有スル方程式ヲ問フ
- 第五 五商 $1, -2, +3, 2 + \sqrt{-3}, 2 - \sqrt{-3}$ ヲ有スル方程式ヲ問フ
- 第六 方程式 $x^5 - 5x^3 + 13x - 21 = 0$ ノ一商正數三箇ナルヲ知レリ由テ問フ減次ノ方程式如何
- 第七 方程式 $x^7 + 2x^6 - 34x^5 + 12x + 35 = 0$ ノ一商負數七ナルヲ知レリ由テ問フ減次ノ方程式如何
- 第八 方程式 $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 30x - 36 = 0$ ノ兩商正數二箇ト負數三箇ナルヲ知レリ由テ問フ減次ノ方程式及ヒ他ノ各商如何
- 第九 方程式 $x^5 - 4x^2 + x + 6 = 0$ ノ一商正數三箇ナルヲ知レリ由テ問フ他ノ

各商及ヒcノ値如何

第十 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 上ノ方程式ノ三商ヲ a, b, c トセハ三商 a^2, b^2, c^2 ヲ有スル方程式如何

第十一 前問ノ方程式ヨリ三商 $\frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a}$ ヲ有スル方程式ヲ作ラハ如何

去分母法

第四百四十一條 方程式ノ列項ノ段數若シ分數ヲ帶ルハ之ヲ消去シテ諸段數ヲ盡ク整數トナシ首項ノ段數ハ故ノ如ク一箇ナラシムルヲ得其法左ノ如シ

方程式ノ首項ノ段數一箇ナラサルハ之ヲ以テ普ク諸項ヲ除シテ之ヲ一箇トナスヘシ然ルハ所得ノ方程式 $ax^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0$ 此ノ如シ此式ノ諸項ノ段數ABC等ノ中チ或ハ二三ノ段數ヲ分數トシ或ハ盡

分數トス

今 $x = \frac{y}{a}$ ト命ス(但シ a ハ任意ノ數ナリ)之ヲ以テ方程式ノ x ニ代フレハ

$$\frac{y^m}{a^m} + A \frac{y^{m-1}}{a^{m-1}} + B \frac{y^{m-2}}{a^{m-2}} + \dots + T \frac{y}{a} + U = 0 \text{ ヲ得此式ノ諸項ニ普ク } a^m \text{ ヲ乗スレハ}$$

$$y^m + Aa y^{m-1} + Ba^2 y^{m-2} + \dots + Ta^m y + Ua^m = 0 \text{ ヲ得然ルニ } a \text{ ハ任意ノ數ナル}$$

カ故ニ其值ヲ撰テ原式ノ各項ノ段數ノ分母ヲ乘子中ニ包容スルモノトナ
スヲ得又或ハ a ノ冪數中ニ各分母ヲ包容スルモノトナスヲ得

去分母法問題

第一 $x^2 + \frac{ax^2}{m} + \frac{bx}{n} + \frac{c}{p} = 0$ 上ノ方程式ノ各項ノ分母ヲ消去シ首項ノ段數

ヲ故ノ如ク一箇トナサハ所得ノ方程式如何

運算 $x = \frac{y}{mnp}$ トシ之ヲ以テ x ニ代用セハ

$$\frac{y^2}{m^3 n^3 p^3} + \frac{ay^2}{m^2 n^3 p^3} + \frac{by}{m n^3 p^3} + \frac{c}{m n^3 p^3} = 0 \text{ ヲ得此式ノ諸項ニ普ク } m^3 n^3 p^3 \text{ ヲ乗ス}$$

レハ $y^2 + ampy^2 + bn^2 np^2 y + cn^2 n^2 p^2 = 0$ ヲ得故ニ此式ヲ以テ問ニ答

フ

方程式ノ諸項ノ段數ノ分母若シ公約數ヲ有スルハ各分母ノ最小公倍數
ヲ以テリヲ除シタル式ヲ x ニ代用スヘシ

第二 $x^2 + \frac{ax^2}{pm} + \frac{bx}{n} + \frac{c}{p} = 0$ 上ノ方程式ノ各項ノ分母ヲ消去シテ首項ノ段

數ヲ故ノ如ク一箇トナサハ所得ノ方程式如何

運算 $x = \frac{y}{pm}$ トシ之ヲ以テ x ニ代用セハ $\frac{y^2}{p^3 m^3} + \frac{ay^2}{p^3 m^3} + \frac{by}{p^3 m^3} + \frac{c}{p^3 m^3} = 0$ ヲ

得此式ノ諸項ニ普ク $p^3 m^3$ ヲ乗スレハ $y^2 + ay^2 + bp^3 my + cp^3 m^3 = 0$ ヲ得故

ニ此式ヲ以テ問ニ答フ

第三 $x^2 + \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{24}x + \frac{1}{12} = 0$ 上ノ方程式ノ各項ノ分母ヲ消去シテ首

項ノ段數ヲ故ノ如ク一箇トナサハ所得ノ方程式如何

分數ノ段數アル方程式ヨリ分數ヲ消去シ他ノ未知元ノ方程式トナシ所得

ノ變式ノ諸段數ヲ最小ナラシメテヲ要スルハ諸分母ノ最小公倍數
未タ所要ノ方程式ヲ作ルニ必要ナル a ノ値トナスヘカラス斯ル題ニ逢ハバ
各分母ヲ盡ク元乘子ニ分開シテ各乘子ノ指數ヲ看テ容易ニ a ノ値ヲ定ル
ヲ得左ニ一例ヲ載テ此法ヲ示サントス

第四
$$x^3 - \frac{3}{35}x^2 + \frac{13}{2450}x - \frac{17}{68600} = 0$$
 上ノ方程式ヲ變換シテ整數ニシテ最小

ナル段數ヲ有スル方程式トナサハ如何但シ首項ノ段數ハ故ノ如ク一箇ナ
ラントヲ要ス

運算 先ツ方程式ノ x ヲ y ニ代ヘ第二項ニ a ヲ乘シ第三項ニ a^2 ヲ
乘シ第四項ニ a^3 ヲ乘シ然ル後チ各分母ヲ元乘子ニ分開ス

$$y^3 - \frac{3}{35}ay^2 + \frac{13}{2450}a^2y - \frac{17}{68600}a^3 = 0,$$

$$35 = 7 \cdot 5, 2450 = 7 \cdot 5^2 \cdot 2, 68600 = 7^3 \cdot 5^3 \cdot 2^3, a = 7 \cdot 2 \cdot 5,$$

$$y^3 - \frac{3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2}{7^3 \cdot 5^3 \cdot 2^3}y^2 + \frac{13 \cdot 7^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2}{7^3 \cdot 5^3 \cdot 2^3}y - \frac{17 \cdot 7^3 \cdot 5^3 \cdot 2^3}{7^3 \cdot 5^3 \cdot 2^3} = 0.$$

ヌ

此ニ由テ答式左ノ如シ

答
$$y^3 - 6y^2 + 26y - 85 = 0.$$

此例ニテハ諸分母ノ最小公倍數 $7^3 \cdot 5^3 \cdot 2^3$ ナリ若シ之ヲ以テ a ノ値トセハ所
得ノ變式必ス前所得ノ方程式ヨリ各項ノ段數大ナリサルヲ得ス

若シ變換シテ得ル所ノ方程式ヨリ一商ヲ發見シ得ハ之ニ對合スル原方程

式ノ一商ハ $\frac{y}{x}$ ヨリ容易ニ求メ得ヘシ

第五
$$x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{24}x - \frac{1}{256} = 0$$
 上ノ方程式ノ各項ノ分母ヲ消去シ首項ノ段

數ヲ故ノ如ク一箇トナサハ如何

第六
$$x^4 - \frac{5}{12}x^3 + \frac{7}{288}x^2 - \frac{11}{1728} = 0$$
 上ノ方程式ノ各項ノ分母ヲ消去シ首項ノ

段數ヲ故ノ如ク一箇トナサハ如何

可度商

第四百四十二條 數基ノ幾倍或ハ幾分ニ相當スル諸數ヲ可度數ト云ヒ否
ラサル諸數ヲ不可度數ト云フ

第四百四十三條 方程式ノ首項ノ段數一箇ニシテ他ノ諸項ノ段數皆整數
ナレハ斯ル方程式ノ可度商ハ整數ナリ

此理方程式ノ論ニ於テ緊要ナルカ故ニ學者能ク此題意ニ通スルヲ要ス此
種ノ方程式整數ノ外ニ猶ホ幾種ノ商ヲ有スヘシト雖モ三分之二、九分之七、
四分之十一、等ノ如キ定分數ナル可カラス然レモ二箇ノ平方根、三箇ノ立方
根、等ノ如キ不可度數ナリ即チ無窮根數、不定小數或ハ虛數ナルヘシ

論 右定理ヲ証明センカタメ可度數ニシテ最簡ナル分數ヲ $\frac{a}{b}$ トシ之ヲ
方程式 $ax^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0$ ノ一商トス但シ A, B 等ノ諸段數ハ
皆整數ナリトス

今所設ノ商ヲ以テ此方程式ノ x ニ代用セハ

$$\frac{a^m}{b^m} + A \frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} + B \frac{a^{m-2}}{b^{m-2}} + \dots + T \frac{a}{b} + U = 0 \quad \text{ヲ得茲ニ於テ首項ノ外ヲ悉ク後節}$$

ニ轉シ普ク b^{m-1} ヲ乘スレハ $\frac{a^m}{b} = -(Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Tbx + Ub^{m-1})$ ヲ得

然ルニ憶定ニ由テ a, b トハ公約數ヲ有セサルカ故ニ b ヲ以テ a ヲ約ス
ヘカラス又 a ノ幾乘竊ヲモ約スヘカラス其故何トナレハ $\frac{a}{b}$ ハ既ニ最簡
式ナルカ故ニ $\frac{a}{b} \times a$ モ亦最簡式ナラサルヲ得ス由テ $\frac{a^2}{b}$ ハ整數ナラス逐テ
此ノ如ク同理ヲ推論セハ $\frac{a^m}{b}$ モ亦整數ナラサルヲ知ル然ルニ後節ナル各
項皆整數ナルカ故ニ最簡ナル分數式ヲ斯ル方程式ノ一商トセハ整數幾種
ヲ合シテ分數ヲ得ヘシト曰ハサルヲ得ス是レ不合理ナリ是故ニ首項ノ段
數一箇ニシテ他ノ諸項ノ段數皆整數ナル方程式ハ分數ナル商ヲ有スヘカ
ラス

第四百四十四條 第四百四十一條ニ於テ方程式ノ各項ノ段數ニ分數アル
モハ之ヲ變換シテ各項ノ分母ヲ消去シ首項ノ段數ヲ故ノ如ク一箇トナス

ノ法アルヲ示シタリ且又前條ニ於テ各項ノ段數皆整數ナル方程式ノ可
度商ハ整數ナルヲ示セリ然ルニ第四百四十條ニ於テ方程式ノ各商ハ實
項ノ約數ナルヲ論ス是故ニ實項ノ約數多カラスシテ容易ニ之ヲ發見ス
ルヲ得ハ之ヲ以テ試ニ方程式ノ未知元ニ代用シテ適等ヲ檢シ以テ商ニ
相當スルモノヲ發見スルヲ得然レハ通例左ノ法ニ從ハ運算ノ勞甚シ
方程式 $ax^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0$ ノ可度商ヲ a トシ之ヲ以テ $x =$

代用シ實項ノ外ヲ盡ク後節ニ轉シ a ナ以テ所得ノ式ヲ除スレハ

$$\frac{U}{a} = -a^{m-1} - Aa^{m-2} - \dots - Ra^2 - Sa - T$$
 ナ得然ルニ a ハ方程式ノ一商ナルカ
故ニ $\frac{U}{a}$ ハ整數ナリ今此式ノ尾項 $-T$ ナ前節ニ轉シ $\frac{U}{a} + T = 0$ ト命セハ a ナ

以テ所得ノ式ノ兩節ヲ除スルハ $\frac{N}{a} = -a^{m-2} - Aa^{m-3} - \dots - Ra - S$ ナ得此方程

式ノ後節ノ列項ヲ看ルニ皆整數ナルカ故ニ前節亦整數ナルヲ知ル今又 $-S$

ナ前節ニ轉シテ $\frac{N}{a} + S = 0$ ト命セハ a ナ以テ所得ノ式ノ兩節ヲ除スルハ
$$\frac{N}{a} = -a^{m-3} - Aa^{m-4} - \dots - Ra^2 - Sa - T$$
 ナ得此式ノ後節ヲ看ルニ皆整數ナルカ故ニ前節

亦整數ナルヲ知ル逐テ此ノ如ク同法ヲ施スハ竟ニ $\frac{N}{a} = -a^{m-2} - Aa^{m-3} - \dots - Ra - S$ 以上ノ狀

勢ニ合フヘシ此ニ由テ方程式ノ可度商ヲ求ル法則ヲ定ルヲ左ノ如シ

法則一 實項ノ約數ヲ盡ク一列ニ排列シ其各數ヲ以テ實項ヲ約シ所得ノ
商ヲ法ノ下ニ置クヘシ

法則二 所得ノ各商ニ尾次ノ項ノ段數ヲ加フヘシ

法則三 所得ノ各總數ヲ之ト對合スル實項ノ約數ニテ除シ分數ヲ帶ル商
ヲ棄テ整數ナル商ヲ取テ又其下ニ排列ス

法則四 所得ノ各商ニ末ノ第三項ノ段數ヲ加ヘ前ノ如ク之ト對合スル實
項ノ約數ヲ以テ之ヲ除ス逐テ此ノ如ク同法ヲ施シ竟ニ第二項ノ段數ヲ

加ヘタル各總數ヲ之ト對合スル實項ノ約數ニテ除スルキ商負數一箇トナルモノアラハ之ト對合スル實項ノ約數ヲ取テ方程式ノ商トスルナリ註 未知元ノ某幕若シ缺ルモノアラハ其段數ニ0ヲ配附シテ之ヲ補フ

可度商問題

第一 $x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 8x - 10 = 0$ 上ノ方程式ニ可度商アラハ之ヲ發見ス

ル

解法 10, 5, 2, 1, -1, -2, -5, -10;

-1, -2, -5, -10, 10, 5, 2, 1;

7, 6, 3, -2, 18, 13, 10, 9;

-2, -18, -2;

-5, -21, -5;

-3, 21, 1;

-1, 25, 5;

-1, -25, -1;

是故ニ末ノ除商負數一箇トナルモノニアリ之ト對合スル實項ノ約數ハ正數一及ヒ負數五ナリ此ニ由テ所設ノ方程式ニ兩可度商アリ即チ正數一ト負數五トナリ

若シ $a - 1)(a + 5)$ 即チ $a^2 + 4a - 5$ ナテ所設ノ方程式ノ前節ヲ除スレハ商 $a^2 - 2$ ナ得此ニ由テ $a^2 - 2 = 0, a = \pm \sqrt{2}$ ナ得是故ニ此方程式ノ

四商 $\pm \sqrt{2}$ 此ノ如シ

第二 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 上ノ方程式ノ可度商如何

第三 $x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = 0$ 上ノ方程式ノ可度商如何

第四 $x^4 - 6x^2 - 16x + 21 = 0$ 上ノ方程式ノ可度商如何

第四問ノ方程式ハ缺項ヲ補フキ $x^4 + x^3 - 6x^2 - 16x + 21 = 0$ トナル而シテ解法ノ運算ニ於テ此補段數0ヲ添入スルノ術ヲ廢スル勿レ

第五 $x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 10 = 0$ 上ノ方程式ノ各商ヲ問フ

各次裔式

第四百四十五條 多項式 $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Sx^2 + Tx + U$ ナ取テ各項ニ帶ル x ノ指數ヲ其項ニ乘シ x ノ指數一次ヲ減セハ

$mAx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} + (m-2)Cx^{m-3} + \dots + 2Sx + T$ 得又此式ニ前同法ヲ施サハ $m(m-1)Ax^{m-2} + (m-1)(m-2)Bx^{m-3} + (m-2)(m-3)Cx^{m-4} + \dots + 2S$ 得ヘシ逐テ此ノ如ク同法ヲ施スルハ每次所得ノ式原式ニ比フレハ次數一次ヲ減スルカ故ニ竟ニ x ナ包容セサル式ヲ得ヘシ

今原式ヲ X_1 トシ第二次所得ノ式ヲ X_2 トシ之ヲ第一裔式ト云ヒ第三次所得ノ式ヲ X_3 トシ之ヲ第二裔式ト云フ逐テ此ノ如ク命セハ X_1 ハ X ノ第一裔式 X_2 ハ X_1 ノ第一裔式 X_3 ハ X_2 ノ第一裔式ナリ逐テ此ノ如シ

設令ハ多項式ノ $3x^3 + 5x^2 - 9x^3 + 7x^2 - 8x + 5$ 各次裔式ヲ求ムレハ左ノ如シ

第一裔式 $5, 3x^2 + 4, 5x^2 - 3, 9x^2 + 2, 7x - 8,$

第二裔式 $4, 5, 3x^2 + 3, 4, 5x^2 - 2, 3, 9x + 2, 7,$

第三裔式 $3, 4, 5, 3x^2 + 2, 3, 4, 5x - 2, 3, 9,$

第四裔式 $2, 3, 4, 5, 3x - 2, 3, 4, 5,$

第五裔式 $2, 3, 4, 5, 3,$

各次裔式ノ構造ヲ論ス

第四百四十六條 一次二項式乘子

$x-a \quad x-b \quad x-c \quad \dots \quad x-m \quad x-n$ ノ連乘積ノ詳式ヲ

$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Tx + U = (x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-m)(x-n)$

$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Tx + U = (x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-m)(x-n)$

此式 x ノ値ノ變化ニ係ラス兩節恆ニ適等ナリ今 $x = y$ ナ代用セハ

$(y+a)^m + A(y+a)^{m-1} + \dots = \{y+(x-a)\} \{y+(x-b)\} \dots \{y+(x-m)\} \{y+(x-n)\}$ ナ得此式

ニ於テ a, x, b, c, \dots 等ヲ一項ト視做スルハ後節ノ各乘子ハ皆二項式ナリ今此式ノ前節ヲ解テ所得ノ詳式ノ各項ヲ y ノ昇降ノ順ニ排列セハ左ノ如シ

$X + Xy + \frac{X^2}{2}y^2 + \dots + \frac{X^{m-1}}{1, 2, \dots, (m-1)}y^{m-1} + y^m$

若シ又後節ヲ解テ同法ニ排列セハ第四百三十六條第五ノ理ニ依テ g ノ段數ハ $(a-c)(a-b)\cdots(a-m)(a-n)$ ナル \wedge 又 g ノ段數ハ $a-a, a-b,$ 等ノ如キ二項式乘子 $m-1$ 式ノ連乘積ノ總數ナル \wedge 又 g ノ段數ハ斯ル乘子 $m-1$ 式ノ連乘積ノ總數ナル \wedge 逐テ此ノ如シ乃チ此等ノ諸段數ハ二項式乘子ノ連乘積ヲ作ルノ法ニ依テ求ルヲ得ルナリ

然ルニ第三百五十五條第三定理ニ據テ此兩詳式ノ g ノ同幕ノ段數等シキヲ知ル此ニ由テ $X \parallel (x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-m)(x-n)$ ヲ得又二項式乘子 m 式中 $m-1$ 式ヲ取テ連乘セシ各種乘積ノ總數ハ乘子ノ連乘積ヲ各乘子ニテ迭ニ除シテ得ル所ノ各種除商ノ總數ニ等シキカ故ニ

$$X = \frac{X}{x-a} + \frac{X}{x-b} + \cdots + \frac{X}{x-m} + \frac{X}{x-n} \quad \text{ヲ得又二項式乘子 } m \text{ 式中 } m-2 \text{ 式ヲ取テ連}$$

乘セシ各種乘積ノ總數ハ m 乘子ノ連乘積ヲ兩乘子ノ乘積ニテ迭ヒニ除シテ得ル所ノ各種除商ノ總數ニ等シキカ故ニ

$$\begin{aligned} \frac{X}{2} &= \frac{X}{(x-a)(x-b)} + \frac{X}{(x-a)(x-c)} + \cdots + \frac{X}{(x-a)(x-n)} \quad \text{ヲ得又同理ニ依テ} \\ \frac{X}{2.3} &= \frac{X}{(x-a)(x-b)(x-c)} + \cdots + \frac{X}{(x-a)(x-m)(x-n)} \quad \text{ヲ得逐テ此ノ如シ} \end{aligned}$$

等商

第四百四十七條 第四百三十九條ニ述ル所ノ理ニ由テ a, b, c, \dots, m, n ノ諸數皆方程式 $X = ax^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + T_0 + T_1 = 0$ ノ商ナレハ此式ヲ改テ $X = (a-a)(a-b)(a-c)\cdots(a-m)(a-n) = 0$ トナス \wedge 今此方程式ニ於テ a ニ等シキ商 p 段アリトシ b ニ等シキ商 q 段アリトシ c ニ等シキ商 r 段アリトセハ前ニ示ス所ノ方程式ノ形狀 $X \parallel (x-a)^p(x-b)^q(x-c)^r\cdots(x-m)(x-n)$ トナル此 X 式ハ乘子 a ニ p 式包容シ乘子 b ニ q 式包容シ乘子 c ニ r 式包容スルカ故ニ此式ノ第一裔式ハ不等商ニ對合スル諸項 $\frac{X}{x-a}, \frac{X}{x-b}, \frac{X}{x-c}, \dots, \frac{X}{x-m}, \frac{X}{x-n}$ 等ノ外ニ等商ニ對合スル項ヲ包容ス即チ X 此ノ如キ項 p 項 X 此ノ如キ

項 q 項 X $\frac{X}{x-c}$ 此ノ如キ項 q 項ヲ包容ス此ニ由テ

$$X_1 = \frac{pX}{x-a} + \frac{qX}{x-b} + \frac{rX}{x-c} + \dots + \frac{X}{x-m} + \frac{X}{x-n} \quad \text{ナ得此 } X_1 \text{ 式ノ各項ハ首項ノ外總テ}$$

$(x-c)^{n-1}$ 此ノ如キ乗子ヲ包容ス然レモ首項ハ $(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}(x-c)^{n-1}$ ニテ除シタルカ故ニ此項ニ帶ル此種ノ乗子ノ最高冪ハ $(x-c)^{n-1}$ ニシテ此乗子ハ X_1 式ノ各項ニ通スルナリ同理ニ由テ X_1 式ノ各項ニ通スル $(x-b)^{m-1}$ 及ヒ $(x-a)^{m-1}$ ノ最高冪ハ $(x-b)^{m-1}(x-c)^{n-1}$ ナルヲ知ル此ニ由テ三式 $(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}(x-c)^{n-1}$ ノ連乘積ハ即チ原方程式ノ前節ト其第一裔式トノ最大公約數ナリ是故ニ方程式若シ等商幾種ヲ有スルキハ後節ヲ空數トセシ前節ト其第一裔式トニ最大公約數アルヲ知ル之ニ反シテ X_1 式ト X_2 式トニ公約數アラハ此方程式ニ等商アルヲ知ルヘシ其故何トナレハ最大公約數ノ一乗子ヲ $(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}(x-c)^{n-1}$ トセハ X_1 ノ作法ニ由テ $(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}(x-c)^{n-1}$ ハ X 式ノ乗子ナルヲ知ル是故ニ a ハ方程式 $X \equiv 0$ ノ等商ニシテ其段數 $t+1$ ナリ此ニ由テ左ノ兩定理アリ

第一 後節空數ナル一元方程式ノ前節 X_1 ト其第一裔式 X_1 トニ未知元 a ヲ包容スル公約數アラハ此方程式幾種ノ等商ヲ有ス

第二 X_1 ト X_2 トノ最大公約數 D ハ等商ニ對合スル一次二項式ノ乗子連乘積ナリ但シ其各乗子ノ指數等商ノ段數ヨリ一次少シ

是故ニ方程式ノ等商ノ有無ヲ檢スルノ法及ビ等商アルヲ知ラハ之ヲ發見スルノ法左ノ如シ

法則一 方程式ノ等商ヲ檢スル法

方程式ノ前節 X (後節空數ナル式) ノ其第一裔式 X_1 トノ最大公約數ヲ求ムヘシ若シ之ヲ得サレハ等商ナシ若シ之ヲ得ハ幾種ノ等商アリ

法則二 方程式ノ等商ヲ發見スル法

最大公約數 D ヲ空數ト比較シテ方程式ヲ作ルヘシ所得ノ方程式 $X \equiv 0$ ノ一商ハ原方程式 $X \equiv 0$ ノ兩等商ナリ又 $X \equiv 0$ ノ兩等商ハ $X \equiv 0$ ノ三等商ナリ逐テ此ノ如シ

最大公約數 D 若シ乘子 $(s-s')$ (但シ t ハ一箇ニ越ル正ノ整數アリ) チ包含セ
 ハ D ト其第一裔式 D_1 トノ最大公約數ヲ D' トス然ルキハ此 D' ハ其乘子ニ
 $(s-s')$ 有スヘシ又 D' ノ第一分式ヲ D'_1 トシ此兩式 D' D'_1 ノ最大公約數ヲ D''
 トセハ此 D'' ハ其乘子ニ $(s-s')$ 有スヘシ此ノ如ク同法ヲ累ヌルキハ
 $(s-s')$ ノ指數毎回一次ヲ減ス此ニ由テ最大公約數ノ次數亦毎回一次ヲ減
 ス故ニ若シ方程式 $D=0$ ノ次數高クシテ未ダ解スヘカラサルコアルモ猶ホ
 此ノ如キ方法ヲ以テ更ニ低次ナル方程式ヲ求メ竟ニ之ヲ解スヘキ式ヲ得
 テ等商ヲ發見スルコトヲ得
 設令ハ方程式 $X=0$ ヲ $D=(a-a')(a-a'')(a-a''') \dots (a-a^{(n-1)})$ チ發見シ得タリトセハ
 $D'=(a-a')^{n-1}(a-a'')^{n-2}(a-a''')^{n-3} \dots (a-a^{(n-1)})$ ニ
 方程式 $D^{(n-1)}=(a-a')(a-a'') \dots (a-a^{(n-1)})=0$ ハ解スルコトヲ得ヘシ即チ商 $s=a$ $s=a''$ $s=a'''$ \dots $s=a^{(n-1)}$ チ得而
 シテ $(s-a)^{n-1}, (s-a'')^{n-2}, (s-a''')^{n-3} \dots (s-a^{(n-1)})^1$ ハ X 式ノ乘子ナリ由テ a b トハ倍ニ
 ノ等商ニシテ c ハ兩等商ナリ

若シ $(x-a)^{n+1}(x-b)^{m+1}(c-d)^2$ チ以テ原方程式ノ前節 X チ除スレハ次數
 $2n+1$ 次ヲ減ス

等商方程式解法問題

第一 $x^4-2x^3-7x^2+20x-12=0$ 上ノ方程式ニ等商アラハ之ヲ發見ス

解法 前節ノ第一裔式ハ $4x^3-6x^2-14x+20$ ナリ而シテ之ト原方
 程式ノ前節トノ最大公約數ヲ求ムレハ $s=1$ チ得是故ニ正數二箇
 ハ所設ノ方程式ノ兩等商ナリ

又 $s=2$ チ以テ $x^4-2x^3-7x^2+20x-12$ チ除スルコト二次ナレハ(或ハ
 $(x-2)^2=x^2-4x+4$ チ以テ除スルコト一次ナレハ)所得ノ商 x^2+2x-3

此ノ如シ故ニ所設ノ原式ヲ $(x^2-4x+4)(x^2+2x-3)=0$ トナスコト
 得ヘシ此方程式ハ兩乘子ヲ空數ト比較シテ作レル各方程式ニ適合
 スル各商ヲ商トスルナリ今前乘子ヨリ $s=2, s=1$ 得後乘子ヨリ

$x^2 - 1 = 0$ 得此ニ由テ所設ノ原式ノ四商1223ナルヲ知ル

第二 $x^5 + 2x^4 - 11x^3 - 8x^2 + 20x + 16 = 0$ 上ノ方程式ノ等商如何

第三 $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 8x - 3 = 0$ 上ノ方程式ノ等商如何

第四 $x^5 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 = 0$ 上ノ方程式ノ等商如何

第五 $x^7 - 5x^6 - 2x^5 + 38x^4 - 31x^3 - 61x^2 + 96x - 36 = 0$ 上ノ方程式ノ等商如何

解法 $X = x^7 - 5x^6 - 2x^5 + 38x^4 - 31x^3 - 61x^2 + 96x - 36 = 0,$

$$X_1 = 7x^6 - 30x^5 - 10x^4 + 152x^3 - 93x^2 - 122x + 96,$$

$$D = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6,$$

$$D_1 = 4x^3 - 9x^2 - 6x + 11,$$

$$D' = x - 1,$$

是故 $\frac{X}{D} = 1 + \frac{D_1}{D} = 0$ ノ兩等商ニシテ原方程式ノ三等商ナリ

今 $D' = x^2 - 2x + 1$ ナリテ $D = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$ ナ除スレハ

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) \text{ ナ得是故 } D = (x - 3)(x + 2)(x - 1)^2 \text{ ニシテ}$$

$$X = (x - 3)^2(x + 2)^2(x - 1)^3 \text{ ナリ此ニ由テ } \frac{X}{D} = \frac{(x - 3)^2(x + 2)^2(x - 1)^3}{(x - 3)^2(x + 2)(x - 1)^2} = (x - 1) \text{ トハ何レモ兩等商ニシテ}$$

1ハ三等商ナリ

此題ノ如ク等商ノ數多シト雖モ皆其數ヲ同フニサルモハ此解法ノ如ク末次ノ公約數解スヘキ方程式トナル然レモ三等商以上ノ等商アルモ皆其數ヲ同フセハ末次ノ公約數猶ホ三次以上ノ高次式トナルナリ

方程式變換法一

第四百四十八條 所設ノ定數ヲ以テ一元各次方程式ノ各商ヲ増減シテ方程式ノ形狀ヲ變換スル法

方程式ヲ $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots + Tx + U = 0$ トシ新未知元ヲ y トシ

新故兩元ノ差ヲ x トセハ $x = y + a$ トナル今之ヲ以テ所設ノ方程式ノ x ニ代用セハ $(y + a)^m + A(y + a)^{m-1} + B(y + a)^{m-2} + C(y + a)^{m-3} + \dots + T(y + a) + U = 0$

ヲ得二項法ニ依テ此式ノ各項ノ詳式ヲ求メ所得ノ式ノ各項ヲ y ノ昇降ノ

順ニ排列セハ左ノ如シ

$$\begin{array}{c}
 x'^m \\
 + Ax'^{m-1} \\
 + Bx'^{m-2} \\
 + Cx'^{m-3} \\
 + \dots \\
 + Tx' \\
 + U
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 y^0 \\
 + A(n-1)x'^{m-2} \\
 + B(n-2)x'^{m-3} \\
 + C(n-3)x'^{m-4} \\
 + \dots
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 y^1 \\
 + A(n-1)\frac{y^{n-2}}{2}x'^{m-3} \\
 + B(n-2)\frac{y^{n-3}}{2}x'^{m-4} \\
 + \dots
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 y^2 + \dots + y^{n-2} \\
 + A(n-1)x'^1 \\
 + B \\
 + mAx' \left| y^{n-1} + y^n \right| \\
 + A \left| \dots \right| \quad (1)
 \end{array}$$

是故ニ左ノ定理アリ

第一 新式ノ實項即チ y^n ノ段數ハ原式ノ前節ノ x ニ x' ヲ代用シテ得ル所ノ數ナリ

第二 新式ノ未知元一乘算 y ノ段數ハ原式ノ前節ノ第一裔式ノ x ニ x' ヲ代用シテ得ル所ノ數ナリ

第三 新式ノ未知元二乘算 y^2 ノ段數ハ原式ノ前節ノ第二裔式ノ x ニ x' ヲ代用シテ得ル所ノ數ノ半ナリ

第四 新式ノ未知元 m 乘算 y^m ノ段數ハ原式ノ前節ノ第 m 次裔式ノ x ニ x' ヲ代用シテ得ル所ノ數ナリニテ除シテ得ル所ノ商ナリ

今原式ノ前節及ヒ其各次裔式ノ x ニ x' ヲ代用シテ得ル所ノ數ヲ順次ニ X'
 X' 等トシハ變換シ得タル新式左ノ如シ

$$X' + X'y + \frac{X'}{1 \cdot 2} y^2 + \dots + \frac{X'}{(m-2)} y^{m-2} + \frac{X'}{(m-1)} y^{m-1} + y^m = 0 \quad \text{此式ノ列項ノ序次}$$

ヲ轉倒セハ左ノ如シ

$$y^m + \frac{X'}{(m-1)} y^{m-1} + \frac{X'}{(m-2)} y^{m-2} + \dots + X'y + X' = 0 \quad (2)$$

第四百四十九條 前條ニ掲ケタル [一] 兩式ヲ比較シテ左ノ式ヲ作ル

$$\frac{X'}{(m-1)} = mAx' + A \quad (3) \quad \frac{X'}{(m-2)} = m \frac{y^{n-1}}{2} x' + A(n-1)x' + B \quad (4) \quad \text{逐テ此ノ如シ}$$

[一] 式ノ諸段數ハ尾項ヨリ順次ニ次數ヲ増シ (x) ニ就テ曰フ「實項ニ至レハ m 次式トナル

又 w の値ハ任意ナルカ故ニ之ヲ撰テ或ル定則ニ合フモノトナスヲ得ヘシ
 設令ハ w ナ未知元ト視做シ諸段數ノ一ヲ取テ空數ト比較シテ方程式ヲ
 作り之ヲ解シテ所得ノ各商ヲ〔一〕式ノ x' ニ代用セハ新式ノ一項ヲ消去スル
 一ヲ得

若シ $mx' + A = 0$ トセハ $x' = -\frac{A}{m}$ ナ得之ヲ以テ〔二〕式ノ x' ニ代用セハ所得ノ新

式 $y^m + \frac{X_1}{m-2}y^{m-2} + \dots + X_1'y + X_1'' = 0$ 此ノ如シ是ニ由テ方程式ノ第二項ヲ
 消去スルノ法左ノ如シ

方程式ノ次數ヲ以テ第二項ヲ除シ所得ノ商ヲ新未知元ヨリ減シタル式ヲ
 以テ原未知元ニ代用スヘシ

第四百五十條 方程式ノ第三項ヲ消去スルノ法ハ方程式

$\frac{m-1}{2}x^2 + A(m-1)x + B = 0$ ノ一商ヲ以テ x' ニ代用スルナリ然レモ若シ m A
 B ノ關係 $x' = -\frac{A}{m}$ 此ノ如キ理ニ合ハシ第二第三ノ兩項偕ニ消去スルナリ

今此關係ヲ知ランカタメ $\frac{A}{m}$ ナ以テ前ノ方程式ノ x' ニ代用セハ

$$\frac{m-1}{2}x^2 - (m-1)\frac{A}{m}x + B = 0 \text{ ナ得之ヲ變化シ } \frac{m-1}{2}x^2 - (m-1)\frac{A}{m}x + B = 0;$$

$(m-1)A^2 - 2(m-1)A^2 + 2mB = 0, (m-1)A^2 = 2mB, A^2 = \frac{2mB}{m-1}$ ナ得是故ニ m A B ノ値此式ノ

理ニ合ハシ新方程式第二第三ノ兩項偕ニ消去スルヲ得ヘシ總テ第三項
 ナ消去スヘキ x' ノ値ヲ求メントセハ二次方程式ノ解法ヲ要シ第四項ヲ消
 去スヘキ x' ノ値ヲ求メントセハ三次方程式ノ解法ヲ要ス逐テ此ノ如クニ
 シテ竟ニ實項ヲ消去セント欲セハ原式ノ解法ヲ要スルモノナリ

方程式變換法一問題

第一 $x^2 + 2px - q = 0$ 上ノ方程式ヲ變換シテ第二項ヲ缺ク方程式ヲ作ラ
 ハ如何

運算 第四百四十九條ニ由テ $x = y - \frac{2p}{2} = y - p$ ナ然ルハ第四百四十八
 條ニ由テ $X' = (-p)^2 + 2p(-p) - q = -p^2 - q, X_1' = 2(-p) + 2p = 0, \frac{X_2'}{2} = \frac{2}{2} = 1$

ヲ得故ニ所要ノ方程式 $y^2 - q - p^2 = 0$ 此ノ如シ此ニ由テ $y = \pm \sqrt{(q+p^2)}$ ナ發見ス然ルニ $x = y - p$ ナルカ故ニ x ノ値 $x = -p \pm \sqrt{(q+p^2)}$ ナ得乃チ

二次方程式ノ解法ニ依テ求ルモノト同一ナリ
第二 $x^2 + px^2 + qx + r = 0$ 上ノ方程式ヲ變換シテ第二項ヲ缺ク方程式ヲ作ラハ如何

運算 $x = y - \frac{p}{3}$ ナス $X' = \left(-\frac{p}{3}\right)^2 + p\left(-\frac{p}{3}\right) + q\left(-\frac{p}{3}\right) + r = \frac{2p^2}{27} - \frac{pq}{3} + r$,
 $X' = 3\left(-\frac{p}{3}\right)^2 + 2p\left(-\frac{p}{3}\right) + q = -\frac{p^2}{3} + q$, $\frac{X'_2}{2} = \frac{2 \cdot 3 \left(-\frac{p}{3}\right)}{2} + \frac{2p}{2} = 0$, $\frac{X'_3}{2 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3} = 1$.

故ニ所要ノ方程式 $y^2 - \left(\frac{p^2}{3} - q\right)y + \frac{2p^2}{27} - \frac{pq}{3} + r = 0$ 此ノ如シ

第三 $x^3 - 12x^2 + 17x^2 - 9x + 7 = 0$ 上ノ方程式ヲ變換シテ第二項ヲ缺ク方程式ヲ作ラハ如何

運算 $x = y + \frac{-12}{3}$, $x = 3 + y$, $x^2 = 3$, $xy = 4$;

$$\begin{aligned} X' &= (3)^3 - 12(3)^2 + 17(3)^2 - 9(3) + 7, & \text{即チ} & X' = -11, \\ X'_1 &= 4(3)^3 - 36(3)^2 + 34(3) - 9, & \text{即チ} & X'_1 = -123, \\ \frac{X'_2}{2} &= 6(3)^2 - 36(3) + 17, & \text{即チ} & \frac{X'_2}{2} = -37, \\ \frac{X'_3}{2 \cdot 3} &= 4(3)^2 - 12, & \text{即チ} & \frac{X'_3}{2 \cdot 3} = 0, \end{aligned}$$

故ニ所要ノ方程式 $y^3 - 37y^2 - 123y - 110 = 0$ 此ノ如シ

第四 $x^3 - 6x^2 + 13x - 12 = 0$ 上ノ方程式ヲ變換シテ第二項ヲ缺ク方程式ヲ作ラハ如何

運算 $x = 2 + y$, $X' = (2)^3 - 6(2)^2 + 13(2) - 12$, 即チ $X' = -2$,
 $X'_1 = 3(2)^3 - 12(2) + 13$, 即チ $X'_1 = +1$,
 $\frac{X'_2}{2} = 3(2)^2 - 6$, 即チ $\frac{X'_2}{2} = 0$,
 $\frac{X'_3}{2 \cdot 3} = 1$, 即チ $\frac{X'_3}{2 \cdot 3} = 1$.

故ニ所要ノ方程式 $x^2 + y^2 - 3 = 0$ 此ノ如シ

第五 $x^2 + 4x^3 - 8x^2 + 33 = 0$ 上ノ方程式ヲ變換シテ各商ノ値二箇ヲ減スル

方程式ヲ作ラハ如何

運算 $x = 2 + y$ トシテ前ノ如ク同法ヲ施サハ $y^4 + 4y^3 - 24y = 0$ ヲ得

此方程式ハ各項皆未知元 y ヲ帶ルカ故ニ $y = 0$ ハ此方程式ノ一商ナリ

此ニ由テ $x = 2$ ハ原式ノ一商ナルヲ知ル

第六 $x^4 + 16x^3 + 99x^2 + 228x + 144 = 0$ 上ノ方程式ヲ變換シテ各商ノ値三箇ヲ

増加スル方程式ヲ作ラハ如何

第七 $x^4 - 8x^3 + x^2 + 82x - 60 = 0$ 上ノ方程式ヲ變換シテ第二項ヲ缺ク方程式

ヲ作ラハ如何

第八 方程式ノ第二項ヲ消去シテ變式ヲ作ルハ第四項亦自ラ消去スルハ
ハ諸段數相關係スル狀勢如何

方程式變換法二

第四百五十一條 第四百四十八條ノ(二)式

$$y^m \cdot \frac{N'_m}{m-1} y^{m-1} + \dots + \frac{N'_3}{2} y^2 + \frac{N'_2}{2} y + N'_1 = 0 \text{ 於テ } y \text{ ヲ } x - a' \text{ ニ還原セハ}$$

$$(x-a')^m + \frac{N'_m}{m-1} (x-a')^{m-1} + \dots + \frac{N'_3}{2} (x-a')^2 + \frac{N'_2}{2} (x-a') + N'_1 = 0$$

ヲ得此方程式ノ前節ヲ解キ所得ノ式ヲ x ノ降幕ノ順ニ排列セハ再ヒ原式
ヲ得ヘキヲ明ナリ此ニ由テ左ノ兩同式ヲ得

$$ax^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + 8x^2 + 1x + 1 =$$

$$(x-a')^m + \frac{N'_m}{m-1} (x-a')^{m-1} + \dots + \frac{N'_3}{2} (x-a')^2 + \frac{N'_2}{2} (x-a') + N'_1 \quad \left. \vphantom{\frac{N'_m}{m-1}} \right\} (1)$$

任意ナル一數ヲ以テ此式ノ前節ヲ除シテ得ル所ノ商ト餘數トハ何レモ同
數ヲ以テ後節ヲ除シテ得ル所ノ商ト餘數トニ同一ナルヘシ今此兩同式ノ
後節ヲ $x - a'$ ニテ除スレハ餘數ハ N' ニシテ除商ハ

方程式變換法二問題

運算 $x = y + z, y = x - z$

$$\begin{array}{r}
x^1-4x^2-8x+32 \\
x^1-2x^2 \\
-2x^3-8x \\
-2x^3+4x^2 \\
-4x^3-8x \\
-4x^3+8x \\
-16x+32 \\
-16x+32 \\
0=X'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
x-2 \\
x^3-2x^2-4x+16 \\
x^3-2x^2-4x+16 \\
x^3-2x^2 \\
-4x-16 \\
-4x^2-8 \\
-24=X'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
x-2 \\
x^2-4
\end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2-4 \quad | \quad x-2 \\ x^2-2x \quad | \quad x+2 \\ \hline 2x-4 \\ 2x-4 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x+2 \quad | \quad x-2 \\ x-2 \quad | \quad 1 \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} N_1' \\ 1.2 \\ \hline 0 \end{array}$$

是故ニ所要ノ變式 $y^4+4y^3+6y^2+4y+1=0$ 即チ $y^4+4y^3-24y=0$ 此ノ如シ

第二 $x^4-12x^3+17x^2-9x+7=0$ 上ノ方程式ノ各商ヨリ三箇ヲ減シテ變式ヲ作ラハ如何

運算 $x=y+3, y=x-3:$

$$\begin{array}{r} x^4-12x^3+17x^2-9x+7 \\ x^4-3x^3 \\ \hline -9x^3+17x^2 \\ -9x^3+27x^2 \\ \hline -10x^2+27x^2 \\ -10x^2-9x \end{array} \quad \begin{array}{r} x-3 \\ x^3-9x^2-12x-39 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -10x^2+30x \\ -39x+7 \\ \hline -39x+117 \\ -110=N_1' \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2-6x-28 \quad | \quad x-3 \\ x^2-3x \\ \hline -3x-28 \\ -3x+9 \\ \hline -37=N_2' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3-9x^2-10x-39 \\ x^3-3x^2 \\ \hline -6x^2-10x \\ -6x^2+18x \\ \hline -28x-39 \\ -28x+84 \\ \hline -123=N_1' \end{array} \quad \begin{array}{r} x-3 \quad | \quad x-3 \\ x-3 \quad | \quad 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} N_1' \\ 2.3 \\ \hline 0 \end{array}$$

是故ニ所要ノ變式 $y^4+0y^3-37y^2-123y-110=0$ 此ノ如シ

是故ニ四次方程式ニ此術ヲ施スルハ餘數四項ヲ得ヘシ五次方程式ニ此術ヲ施スルハ餘數五項ヲ得ヘシ乃チ n 次方程式ニ此術ヲ施スルハ餘數 n 項ヲ得ヘシ

右變換法ヲ行フニ常除法ニ從フルハ迂遠ナリ若シ歟合除法ト號スル箇除

法ニ從ハヤ更ニ便ナリ今此除法ヲ論スルノ豫備トシテ段數ノミヲ取テ乗除スルノ法ヲ示サントス

段數乗除法

第四百五十二條 前既ニ兩多項式若シ同次式ナレハ其相乗積亦同次式ニシテ其次數ハ兩乘子ノ次數ノ和ニ等シキヲ示セリ是故ニ此兩多項式若シ兩元ヲ包容スルハ同元ノ昇降幕ノ順ニ各項ヲ排列セハ相乗積ノ各項亦同元ノ昇降幕ノ順ニ排列スルモノナルヲ明ナリ

今乘法ヲ考フルニ法ノ各項ヲ以テ實ノ各項ニ乗スルハ乗積ノ各項ノ段數ハ字乘子ノタメニ變スヘカラサルヲ知ル是故ニ段數ヲ分離シ其排列ノ次序ヲ亂サス其正負號ヲ省カス恰モ字乘子ヲ有スルカ如ク之ヲ排列シ兩多項式ヲ相乗スル常法ノ如ク乘法ヲ施シ然ル後テ所得ノ各項ニ字乘子ヲ配附セハ常法ニテ算スル所ノ乗積ト同式ヲ得ヘシ

段數乘法問題

第一 $a^2+2ax+x^2, a+x$ 上ノ兩式ノ相乗積ヲ問フ

$$\begin{array}{r} \text{運 算} \\ 1+2+1 \\ 1+1 \\ 1+2+1 \\ 1+2+1 \\ 1+3+3+1 \end{array}$$

上ニ筭シ得タル乗積ノ各項ノ段數ニ各相當ナル字乘子ヲ配附シテ左ノ答式ヲ作ル

答 $a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$

兩多項式若シ一元ヲ有スルモ猶ホ此法ヲ施スヲ得其例左ノ如シ

第二 $3x^2-2x-1, 3x+2$ 上ノ兩式ノ相乗積ヲ問フ

$$\begin{array}{r} \text{運 算} \\ 3-2-1 \\ 3+2 \\ 9-6-3 \\ +6-4-2 \\ 9+0-7-2 \end{array}$$

是故ニ答式左ノ如シ

答 $9x^3+0x^2-7x-2$, 即 $9x^3-7x-2$

若シ字乘子ノ最高幕ト最低幕トノ間ニ缺ルモノアラハ其缺ル所ノ幕數ニ空數ヲ段數トシテ此缺項ヲ補フヘシ其例左ノ如シ

第三

x^2+2x-1, x^2+2 上ノ兩式ノ相乗積ヲ問フ

運算 此題ノ兩乘子皆缺項アリ之ヲ補フニハ $x^3+2x^2+0x-1,$

x^2+0x+2 此ノ如シ此ニ由テ運算左ノ如シ

$$1+2+0-1$$

$$1+0+2$$

$$1+2+0-1$$

$$2+4+0-2$$

$$1+2+2+3+0-2$$

是故ニ答式左ノ如シ

答 $x^5+2x^4+2x^3+3x^2+0x-2$ 即 $x^5+2x^4+2x^3+3x^2-2$

第四

$3x^2-2x-1, 4x+2$ 上ノ兩式ノ相乗積ヲ問フ

第五

$3x^2-5x-10, 2x-4$ 上ノ兩式ノ相乗積ヲ問フ

第六

x^2+xy+y^2, x^2-xy+y^2 上ノ兩式ノ相乗積ヲ問フ

第七

x^2-4x^2+5x-9, x^2+4x-3 上ノ兩式ノ相乗積ヲ問フ

カ

第四百五十三條

段數ノミチ取テ乘法ヲ行フヲ得ハ亦之ヲ以テ除法ヲ行フヲ得ヘシ若シ實法俱ニ同次式ナレハ商ノ次數ハ實ノ次數ヨリ法ノ次數ヲ減シタル餘數ナリ

段數除法問題

第一 $a^2-2ax-2x^2$ ナ以テ $a^4-3a^3x-8a^2x^2+18ax^3+16x^4$ ナ除スレハ所得ノ商如何

運算

$$\begin{array}{r} 1-3-8+18+16 \quad | \quad 1-2-2 \\ 1-2-2 \quad \quad \quad | \quad 1-1-8 \\ \hline -1-6+18 \\ -1+2+2 \\ -8+16+16 \\ -8+16+16 \end{array}$$

是故ニ答式左ノ如シ

答 $a^2-ax-8x^2$

第二 $a^3-3ab^2+b^3$ ナ以テ $a^5-5a^3b^2+a^2b^3+6ab^4-9b^5$ ナ除スレハ所得ノ商如何

此題ニテハ實ニ $0.6b$ ナ補ヒ法ニ $0.6b$ ナ補ハサルヲ得ス由テ運算左ノ如シ

$$\begin{array}{r} \text{運} \\ 1+0-5+1+6-2 \\ 1+0-3+1 \\ 0-2+0+6-2 \\ -2+0+6-2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1+0-3+1 \\ 1+0-2 \\ \text{是故ニ答式左ノ如シ} \end{array}$$

答 $a^2+0.6b-2b^2$ 即チ a^2-2b^2

第三 x^2+3x+2 ナ以テ $x^2-4x^2-17x^2-13x^2-11x-10$ ナ除スレハ所得ノ商如何

$$\begin{array}{r} \text{運} \\ 1-1-17-13-11-10 \\ 1+3+2 \\ -7-19-13-11-10 \\ -7-21-14 \\ +2+1-11-10 \\ +2+6+4 \\ -5-15-10 \\ -5-15-10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1+3+2 \\ 1-7+2-5 \\ \text{是故ニ答式左ノ如シ} \end{array}$$

答 x^2-17x^2+2x-5

以上ノ問題ハ段數ノミヲ取テ除法ノ術ヲ行フノ方法ヲ示サシメカケタメニ設ルモノニテ段數ヲ整數トシ法ノ首項ノ段數ヲ一箇トス然レトモ諸段數ノ狀勢此ノ如クナラサルモ此法猶ホ行フヘシ若シ法ノ首項ノ段數一箇ナラサルハ之ヲ以テ實法兩式ノ諸段數ヲ除スレハ法ノ首項ノ段數一箇トナル法ノ首項ノ段數一箇ナルハ前設問ノ運算ニ於テ見ルカ如ク商ノ各項ノ段數ハ之ニ對合スル各次ノ實ノ首項ナリ此理ニ依テ斂合除法ト號スル一種ノ簡除法ヲ得

斂合除法

第四百五十四條 茲ニ斂合除法ヲ示シテ其法則ヲ定メシメ前條第一題ヲ取テ再ヒ考究スルニ若シ法ノ第二項ト第三項トノ正負ヲ一變セハ此兩項ト商ノ各項トノ相乘積ヲ以テ之ニ對合スル實ノ各項ニ加ヘテ各次餘數ヲ得ヘキヲ知ル而シテ法ノ首項一箇ナルカ故ニ法ノ首項ト商ノ各項

ノ乘積ハ恆ニ各次ノ實ノ首項ト同一ナリ由テ商ノ各項ハ皆各次ノ實ノ首項ニ同シ此ニ由テ運算左ノ如シ

運算

$$\begin{array}{r} 1-3-8+18+16 \quad | \quad 1+2+2 \\ 2-2-16 \\ 2-2-16 \\ 1-1-8, 0 \quad 0 \end{array}$$

法 實ノ各項ノ段數ヲ原ノ如ク排列シ法ノ第二項以下ナル各項ノ正負ヲ變換シテ實ノ右方ニ置キ實ノ下ニ數字兩級ヲ記スヘキ間隙ヲ隔テ、横線一條ヲ作り其下ヲ商級トス先ツ實ノ首項ヲ商級ニ下シテ商ノ首項トシ之ヲ以テ法ノ第二第三兩項ニ乘シ所得ノ兩乘積中前ノ乘積ヲ上級ニテ實ノ第二項ノ下ニ置キ後ノ乘積ヲ下級ニテ實ノ第三項ノ下ニ置キ然ル後チ第二行ノ和ヲ求メテ之ヲ商ノ第二項トシ之ヲ以テ法ノ第二第三兩項ニ乘シ所得ノ兩乘積中前ノ乘積ヲ上級ニテ實ノ第三項ノ下ニ置キ後ノ乘積ヲ下

級ニテ實ノ第四項ノ下ニ置キ然ル後チ又第三項ノ和ヲ求メテ商ノ第三項トシ之ヲ以テ法ノ第二第三兩項ニ乘シ所得ノ兩乘積中前ノ乘積上級ニテ實ノ第四項ノ下ニ置キ後ノ乘積ヲ下級ニテ實ノ第五項ノ下ニ置キ然ル後チ又第四行ノ和ヲ求ムレハ空數ヲ得ス第五行ノ和ヲ求ルモ空數ヲ得此ニ由テ商ノ各項ノ段數前條ニ求ル所ノ如シ故ニ除商亦前ノ如シ
又前條第三題ヲ取テ此法ヲ施スルハ左ノ如シ

$$\begin{array}{r} 1-4-17-13-11-10 \quad | \quad 1-3-2 \\ -3+21-6+15 \\ -2+14-4+10 \\ 1-7+2-5 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

是故ニ除商前ノ如ク 3^3-7a^2+2a-5 トナル

是故ニ左ノ法則ヲ定ム

法則一 法各項排列ノ次序已ニ整フモノノ首項ノ段數若シ一箇ナラサル片ハ之ヲ以テ實法兩式ノ各項ヲ偏ク除スヘシ

法則二 法ノ第二項以下ナル諸項ノ正負ヲ變換シ然ル後チ常除法ノ如ク
實法兩式ノ段數ヲ排列シ實ノ下ニ數字幾級ヲ記スヘキ間隙ヲ隔テ、層級
ノ數ハ法ノ列項數ヨリ一ヲ減ス横線一條ヲ作り其下ヲ商級トス

法則三 實ノ首項ヲ商級ニ下シテ商ノ首項トシ之ヲ以テ法ノ第二項以下
ナル各項ニ乘シ所得ノ各乘積ヲ順次ニ各級ニ置テ斜メニ實ノ第二項第三
項等ト行ヲ合スヘシ

法則四 第二行ノ和ヲ求メテ商ノ第二項トシ之ヲ以テ法ノ第二項以下ナ
ル各項ニ乘シ所得ノ各乘積ヲ前ノ如ク順次ニ各級ニ置テ斜メニ實ノ第二
項第三項等ト行ヲ合ス逐テ此ノ如シ

法則五 一行ノ和空數トナルヒ之ニ次ク各行ノ和皆空數トナラハ則チ止
ム此時ニ在テハ餘數ナシ否ヲサレハ則チ猶ホ同法ヲ施サハ漸次ニ略近ノ
商ニ近ツク此ノ如ク求メ得タル諸段數ニ各相當ナル字乘子ヲ配附ス

此法ニ於テ法ノ首項ハ用フル所ナシ故ニ運算中之チ省クモ可ナリ

敵合除法問題

第一 $1+8$ ナ以テ $1-8$ ナ除スレハ所得ノ商如何

第二 $1+8$ ナ以テ 1 ナ除スレハ所得ノ商如何

第三 $x^2-2ax+1a^2$ ナ以テ $a^2-5ax+10a^2x^2-10a^3x^3+5a^4x^4-x^5$ ナ除スレハ所得
ノ商如何

第四 $x^4-2x^3+4x^2-2x+1$ ナ以テ $x^5-5x^4+13x^3-24x^2+27x-13$ ナ除スレ
ハ所得ノ商如何

第五 x^2-y^2 ナ以テ x^2-y^2 ナ除スレハ所得ノ商如何

方程式變換法三

第四百五十五條 所設ノ定數ヲ以テ方程式ノ各商ヲ増減シテ新變式ヲ作
ルキ敵合除法ニ從ハゞ更ニ便ナリ

方程式變換法三問題

第一

ヲハ如何

此題ノ方程式ハ $x^3 - 4x^2 - 8x + 32 = 0$ 上ノ方程式ノ各商ヨリ二箇ヲ減シテ變式ヲ作
 補フ

一第

$$\begin{array}{r} 1-4\pm 0-8+32 \quad | \quad 2 \\ 2-4-8-32 \\ \hline 1-2-4-16, 0=X' \end{array}$$

二第

$$\begin{array}{r} 1-2-4-16 \quad | \quad 2 \\ 2\pm 0-8 \\ \hline 1\pm 0-4,-24=X' \end{array}$$

三第

$$\begin{array}{r} 1\pm 0-4 \quad | \quad 2 \\ 2+4 \\ \hline 1+2, 0=\frac{X'_2}{2} \end{array}$$

四第

$$\begin{array}{r} 1+2 \quad | \quad 2 \\ 2 \\ \hline 1, 4=\frac{X'_3}{2.3} \end{array}$$

是故ニ變式

$$y^4 + 4y^3 - 24y = 0$$

ナリ

此ノ如ク各次除法ヲ別ニ運算セス左ノ如ク之ヲ合スレハ更ニ便ナ
 リ但シ各次除法ノ法即チ除數ナリ及ヒ實ノ首項ハ皆同一ナルカ故
 ニ始メニ之ヲ置キ他ハ之ヲ零ス

第二

作
ラハ如何

$$\begin{array}{r} 1-4\pm 0-8+32 \quad | \quad 2 \\ 2-4-8-32 \\ \hline -2-4-16, 0=X' \\ 2\pm 0-8 \\ \hline 0-4,-24=X' \\ 2+4 \\ \hline 2, 0=\frac{X'_2}{2} \\ \frac{2}{4}=\frac{X'_3}{2.3} \end{array}$$

上ノ方程式ノ各商ヨリ三箇ヲ減シテ變式ヲ

算 運

$$\begin{array}{r} 1-12+17-9+7 \quad | \quad 3 \\ + 3-27-30-117 \\ \hline -9-10-39-110=X'_1 \\ + 3-18-84 \\ \hline -6-28-123=X'_2 \\ + 3-9 \\ \hline -3-37=\frac{X'_3}{2} \end{array}$$

$$\frac{+ 3}{0}=\frac{X'_4}{2.3}$$

故ニ變式
此ノ如シ

$$y^4 - 37y^3 - 123y^2 - 110y = 0$$

第三 $x^3 - 12x^2 + 36x - 36 = 0$ 上ノ方程式ノ各商ヨリ四箇ヲ減シテ變式ヲ作ラ
ハ如何

算	運	
10	-12	-28 (4)
$\frac{4}{4}$	$\frac{+16}{4}$	$\frac{+16}{-12} = X'$
$\frac{4}{8}$	$\frac{32}{36}$	$= X'$
$\frac{4}{12}$	$= \frac{X'_2}{2}$	

是故ニ變式

$$y^3 + 12y^2 + 36y - 12 = 0$$

此ノ如シ

第四 $x^3 - 10x^2 + 36x - 6946 = 0$ 上ノ方程式ノ各商ヨリ二十箇ヲ減シテ變式ヲ

作リ所得ノ變式ノ各商ヨリ更ニ三箇ヲ減シテ變式ヲ作ラハ如何

左ノ算草ニ於テ二重線ノ上ニ在ルモノ各次ノ餘數ナリ

算	運	
3	-6946 (20)	
200	4060	
203	-2886	
600		
803		
803	-2886 (3)	
159	+2886	
962	0	
168		
1130		

故ニ變式

$$y^3 + 59y^2 + 1130y = 0$$

此ノ如シ而

シテ $x \parallel 0$ ハ必ス此方程式ニ合フ此ニ由テ $x \parallel 10 + 3 \parallel 13$ ハ原
方程式ノ一商ナリ

第五 $x^3 - 12x^2 + 13x - 34 = 0$ 上ノ方程式ヲ變換シテ第二項ヲ缺ク方程
式ヲ作ラハ如何

第六 $x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$ 上ノ方程式ヲ變換シテ第三項ヲ缺ク方程式ヲ
作ラハ兩式ヲ得ヘシ由テ問フ兩變式各如何

第七 $x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 15x + 14 = 0$ 上ノ方程式ヲ變換シテ第三項ヲ缺ク
方程式ヲ作ラハ兩式ヲ得ヘシ由テ問フ兩變式各如何

反號ノ商ヲ有スル方程式ヲ作ル法

第四百五十六條 未知數一元ヲ有スル完全式ノ列項ノ正負ヲ隔次ニ變換
シハ各商ノ正負皆變換ス

論 $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0 \dots [1]$ 方程式ノ公式ヲ上ノ如ク
命シ第二項ヨリ隔次列項ノ正負ヲ變換セハ左ノ如シ
 $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \dots + Tx + U = 0 \dots [2]$ 若シ又首項ヨリ隔次列項ノ正

負ヲ變換セハ左ノ如シ

$$-x^m + Ax^{m-1} - Bx^{m-2} + \dots - Tx + U = 0 \dots [3]$$

今〔一〕式ノ一商ヲ a トシハ之ヲ〔一〕式ノ x ニ代用スルハ前節空數トナル此ニ
由テ此時正數諸項ノ和ト負數諸項ノ和ト同數ナリ然ルニ又 $-a$ ヲ以テ〔二〕式
或ハ〔三〕式ノ x ニ代用セハ m 偶數ナルハ〔二〕式ノ各項ハ〔一〕式ノ各項ト同號同
數ニシテ〔三〕式ノ各項ハ〔一〕式ノ各項ト異號同數ナルヲ明ナリ m 奇數ナルハ
此理轉倒ス是故ニ a 若シ〔一〕式ノ一商ナレハ $-a$ ハ〔二〕式或ハ〔三〕式ノ一商ナリ

反號商問題

第一 方程式 $x^3 - 7x^2 + 13x - 3 = 0$ ノ三商 $3, 2, 1, 3, 2, 1, 3$ ナレハ方程式
 $x^3 + 7x^2 + 13x + 3 = 0$ ノ三商各如何

第二 方程式 $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 17x - 13 = 0$ ノ四商 $1, -3, 2, 1, (-3), 2, 1, (-3)$
ナレハ方程式 $x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 17x - 13 = 0$ ノ四商各如何

虚商對合之理

第四百五十七條 一元方程式ノ各項ノ段數及ヒ實項皆實數ナルキ虚數ナル商アラハ其數偶數ニシテ兩々交互ニ對合ス

論 方程式ノ公式ヲ $ax^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0$ (一) トシ此式

A, B, ..., T, U ハ皆實數ナリトシ此方程式ノ一商ヲ $a + \sqrt{-b}$ トセハ $a - \sqrt{-b}$

亦此方程式ノ一商ナルヲ証明セントス

今 $a + \sqrt{-b}$ ヲ以テ所設ノ方程式ノ x ニ代用セハ左ノ如シ

$$\{a + \sqrt{-b}\}^m + A\{a + \sqrt{-b}\}^{m-1} + B\{a + \sqrt{-b}\}^{m-2} + \dots + T\{a + \sqrt{-b}\} + U = 0 \quad (1)$$

二項法ニ據テ此式ノ各項ノ詳式ヲ求ムレハ左ノ如シ

$$a^m + m a^{m-1} \sqrt{-b} + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} (-b) + \dots + m a \sqrt{-b} + \{(-b)\}^{\frac{m}{2}},$$

$$A a^{m-1} + A(m-1) a^{m-2} \sqrt{-b} + A(m-1) \frac{m-2}{2} a^{m-3} (-b) + \dots + A \sqrt{-b}^{m-1},$$

$$B a^{m-2} + B(m-2) a^{m-3} \sqrt{-b} + B(m-2) \frac{m-3}{2} a^{m-4} (-b) + \dots$$

$$T a + T \sqrt{-b},$$

U,

此詳式ハ實數分ト虚數分トノ兩項ニ括ルヲ得其實數分ハ (一) ノ空數
 及ヒ偶次ノ冪數ヲ乘子ニ帶ル諸項ナリ今之ヲ M ト命ス又虚數分ハ (二)
 ノ奇次ノ冪數ヲ乘子ニ帶ル諸項ナリ今之ヲ N ト命ス是レ (一) ノ奇次
 ノ冪數公式ハ $\{(-b)\}^{\frac{m}{2}+1}$ ニシテ (二) ハ實數ナルヲ以テ虚數ナル諸項ハ合
 シテ N $\sqrt{-b}$ 此ノ如ク命スルヲ得但シ N ハ實數ナリルカ故ナリ而セテ
 $a + \sqrt{-b}$ (一) 式ノ一商ナルカ故ニ (一) 式ヨリ $M + N \sqrt{-b} = 0$ (三) ヲ得此ニ由
 テ $M = 0, N = 0$ ナルヲ知ル(第二百三十八條ヲ視ヨ)故ニ又 $M - N \sqrt{-b} = 0$ (四)
 ヲ得然ルニ還テ $a - \sqrt{-b}$ ヲ以テ (一) 式ノ x ニ代用セハ前節ノ形狀 $M - N \sqrt{-b}$
 此ノ如クナルヘシ是レ (二) ノ偶次ノ冪數ハ皆 $+$ (一) ノ偶次ノ冪數ト交
 互ニ等シシ (一) ノ奇次ノ冪數ハ皆 $+$ (二) ノ奇次ノ冪數ト交互ニ異號同

數ナルヲ以テナリ是故ニ(一)式ノ一商ナルヲ知ル

第四百五十八條 前條ノ理及ヒ第四百三十九條ノ理ニ由テ左ノ定理アルヲ知ル

奇次ノ一元方程式ハ最少ナルモ一商必ス實數ナリ

第四百五十九條 第四百五十七條ノ論ノ如ク同法ニテ左ノ定理ヲ證明スルヲ得ヘシ

一元方程式ノ各項ノ段數及ヒ實項皆常數ナルキ根數ナル商アラハ其數偶數ニシテ兩々交互ニ對合ス

對合商之問題

第一 $x^3 - x^2 + 3x + 5 = 0$ 上ノ方程式ノ一商 $1 - 2$ (一) ナレハ他ノ各商如何

第二 $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5 = 0$ 上ノ方程式ノ一商 $1 - 2$ ナレハ他ノ各商如何

第三 $x^4 + x^3 - 25x^2 + 41x + 6 = 0$ 上ノ方程式ノ一商 $3 + 1$ (一) ナレハ他ノ各商如何

第四 $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x + 4 = 0$ 上ノ方程式ノ一商 $1/2$ ナレハ他ノ各商如何

第五 $x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 6x + 3 = 0$ 上ノ方程式ノ一商 $2 + 1/3$ ナレハ他ノ各商如何

デスカート氏正負號之法

第四百六十條 完全式ニテモ不全式ニテモ正ノ實商ノ數ハ列項異接ノ數ヨリ多カラス又完全式ニテモ負ノ實商ノ數ハ列項同接ノ數ヨリ多カラス

註 多項式ノ各項ヲ未知元ノ降幕ノ順ニ排列スルキ同號ナル兩項相接

スルノ數ヲ同接ノ數ト云ヒ異號ナル兩項相接スルノ數ヲ異接ノ數ト云フ設令ハ多項式 $x^3-3x^2+4x^2+7x^3+3x^4+2x^5-x^6-x+1$ 在テハ同接ノ數四異接ノ數亦四ナリ

論 方程式 $X=0$ (一)ノ正ノ實商チ a, b, c 等トシ是等ノ諸商ニ對合スル諸乘子 $a-b, a-c, b-c$ 等ノ連乘積ヲ以テ (一)式ノ前節ヲ除シ所得ノ方程式チ $X=0$ (二)ト命ス此方程式ニ正ノ實商アルヘカラス

今正ノ實商ニ對合スル一乘子 $a-b$ (二)式ニ乘セハ所得ノ方程式ノ異接ノ數最少ナルモ必ス一ヲ増加スルヲ証明セントス

第一 先ツ (二)式ヲ完全式トシ其列項ノ正負チ $+ + + + +$ トセハ之ニ乘スル乘子ノ正負ハ $+ -$ ナルカ故ニ相乘積ノ正負左ノ如シ

複號ハ正負ノ判シ難キ所ヲ顯スナリ
今複號ヲ任意ニ單號ニ定メテ相乘積ノ列項ノ異接ノ數ヲ算フルニ原式ノ列項ノ異接ノ數ヨリ多ク又複號ヲ帶フル所消

去スルモ此理猶ホ變セサルヲ知ル

第二 次ニ又 (二)式若シ不全式ナレハ其缺項ノ段數ニ空數ヲ配シテ完全式トナサハ所得ノ式ニ有スル異接ノ數ハ (二)式ニ有スル異接ノ數ヨリ少カラス缺項若シ同接ノ間ニアラハ補項チ之ト同號トセハ異接ノ數故ノ如シ補項チ之ト異號トセハ異接ノ數ニチ増加ス若シ又缺項異接ノ間ニアラハ補項ノ正負ニ係ラス異接ノ數故ノ如シ故ニ若シ所得ノ完全式ニ $x-a$ チ乘スレハ前論ニ由テ相乘積ノ異接ノ數ハ原式ノ異接ノ數ヨリ増加スルヲ知ル而シテ此ノ如クシテ求メ得タル相乘積ハ X_1 ト $x-a$ トノ相乘積ニ同シ是故ニ X_1 ト $x-a$ トノ相乘積ノ異接ノ數ハ X_1 ノ異接ノ數ヨリ多シ

是故ニ (二)式ニ一乘子 $x-a$ チ乘スレハ所得ノ方程式ノ異接ノ數ハ (二)式ノ異接ノ數ヨリ最少ナルモ一ヲ増加スルヲ知ル又同理ニテ此所得ノ方程式ニ $x-b$ チ乘スレハ最少ナルモ異接ノ數一ヲ増加スルヲ明ナリ逐テ此ノ如シ

此ニ由テ方程式 $X=0$ ノ正ノ實商ノ數ハ列項ノ異接ノ數ニ越ルコナシ

又一式ヲ完全式トシ其列項ノ正負ヲ隔次ニ變換セハ各商ノ正負皆變換ス
 第四百五十六條ヲ視ミ而シテ故ノ同接ハ今ノ異接トナリ故ノ異接ハ今ノ
 同接トナル然ルニ此變換シ得タル方程式ノ正ノ實商ノ數ハ列項ノ異接ノ
 數ヨリ多カラス此ニ由テ原方程式ノ負ノ實商ノ數ハ原方程式ノ列項ノ同
 接ノ數ニ越ルコナシ

第四百六十一條 正ノ實商一箇ヲ増加セハ異接ノ數一ヲ増加スト雖モ方
 程式ノ列項ノ異接ノ數ヲ以テ正ノ實商アルコトヲ証明スルコトヲ得ス設令ハ
 方程式 $x^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$ ハ異接ノ數一ト同接ノ數一ナリ然ルニ商ハ $2 + \sqrt{-1}$
 $2 - \sqrt{-1}$ -1 -3 ニシテ正商ナシ然レモ各商皆實數ナルモ正商ノ數ハ異
 接ノ數ニ同シク負商ノ數ハ同接ノ數ニ同シ

三次方程式解法

第四百六十二條 第四百四十九條ニ於テ各次方程式ノ第二項ヲ消去スル
 ノ法ヲ示セリ是故ニ三次方程式ノ公式ヲ $x^3 + px + q = 0$ ト命スルコトヲ得此
 種ノ三次不全式ヲ解スルノ法ハ三次完全式ヲ解スルヨリ簡便ナリ今迦但
 氏解法ト號スル三次方程式之解法ヲ左ニ示サントス然レモ其法一數ノ立
 方根三様ノ變化アルノ理ニ關係ス由テ先ツ下條ニ於テ此理ヲ示サントス
 第四百六十三條 一數ヲ a^3 トシ此數ノ立方根ヲ x トセハ $x^3 = a^3$ ヲ得故ニ
 $x - a = 0$ トナル此ニ由テ $x = a$ ニテ此式ノ前節ヲ除スレハ $x^3 + px + q = 0$ ヲ得
 是故ニ二次方程式ノ解法ニテ $x = a$ $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ ヲ得此ニ由
 テ一數 a^3 ノ立方根ハ三様ノ變化アリ即チ $a, a\omega, a\omega^2$ $\left\{ \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \right\}$ $\left\{ a, a\omega, a\omega^2 \right\}$ 此
 ノ如クナルヲ知ル是故ニ一箇ノ立方根ハ $1, \omega, \omega^2$ $\left\{ 1, \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \right\}$ ト
 ナリト云フコトヲ得今 $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ トセハ一箇ノ立方根ハ $1, \omega, \omega^2$ トナ

リト云フヲ得

第四百六十四條 方程式 $x^3 + qx + r = 0$ 之解法

先ツ $x = y + z$ ト命シ之ヲ以テ所設ノ方程式ノ x ニ代用セハ左ノ如シ

$$(y+z)^3 + q(y+z) + r = 0 \text{ 即チ } y^3 + z^3 + (3yz + q)(y+z) + r = 0$$

還タ y 及 z ハ x ナ兩分セシ各分ニテ其分法定リナシ故ニ任意ナリ此ニ由テ

yz ノ關係ヲ $3yz + q = 0$ 此ノ如キ理ニ合フモノトセハ左ノ方程式ヲ得

$$y^3 + z^3 + r = 0 \text{ 今 } y \text{ ヲ以テ } z \text{ ナ顯ス代數式ヲ作り此方程式ノ } z \text{ ニ代用セハ左}$$

ノ如シ

$$y^3 + \left(-\frac{y}{3q}\right)^3 + r = 0, y^3 + \frac{y^3}{-27} - \frac{y^3}{27} = 0 \text{ 此ニ由テ二次方程式ノ解法ニテ } y \text{ ノ値ヲ}$$

$$\text{求ムレハ } y^3 = -\frac{r}{2} + 1 \left(\frac{y^2}{4} + \frac{q^2}{27} \right) \text{ ヲ得故ニ又 } z = -\frac{y}{3} - y^3 = -\frac{y}{3} + 1 \left(\frac{y^2}{4} + \frac{q^2}{27} \right) \text{ ヲ}$$

得然ルニ $x = y + z$ ナルカ故ニ y^3 ノ値ヲ顯ス式中根數號ノ正負ハ倍ニ上號ヲ用フルモ倍ニ下號ヲ用フルモ x ノ値同一ノ式ヲ得此ニ由テ x ノ値ハ

兩式 $\frac{y}{2} + 1 \left(\frac{y^2}{4} + \frac{q^2}{27} \right) - \frac{y}{2} - 1 \left(\frac{y^2}{4} + \frac{q^2}{27} \right)$ ノ兩立方根ノ和ナリ然ルニ立方根ハ三様ノ變化ヲナスカ故ニ今 $\frac{y}{2} + 1 \left(\frac{y^2}{4} + \frac{q^2}{27} \right)$ ノ立方根ノ一ヲ m ト命セハ他ノ

兩根數ハ ms ms^2 ナリ前條ヲ視ヨ又 $\frac{y}{2} - 1 \left(\frac{y^2}{4} + \frac{q^2}{27} \right)$ ノ立方根ノ一ヲ n ト命セ

ハ他ノ兩根數ハ ns ns^2 ナリ是故ニ x ノ値ヲ顯ス式中立方根ナル式々三種ノ

値ヲ有ス由テ x ノ値ハ九種ノ變化ヲナス然レモ三次方程式ノ商ハ三箇ヨ

リ多カラス(第四百三十九條ヲ視ヨ故ニ x ノ値九種アリト雖モ原式ニ合フ

モノ三種ナラサルヲ得ス此ニ由テ原式ニ合フヘキ x ノ値ヲ考フルニ此解

法ニ於テ y 及 z ノ値ハ $y^3 = -\frac{r}{2} + 1 \left(\frac{y^2}{4} + \frac{q^2}{27} \right)$ 此ノ如キ關係アリ今 m 及 n ヲ以テ此理ニ合フ

所ノ立方根トセハ $y = ms$ $z = ns$ ハ yz ノ對合スル一種ノ値ナリ而シテ又

$y = ms^2$ $z = ns^2$ 及ヒ $y = ns$ $z = ms$ ハ何レモ yz ノ對合スル一種ノ値トナス

ヲ得是レ $yz = mns^3 = mn$ トナルカ故ナリ若シ他ノ配合ヲ取ラハ yz ノ値

$-\frac{q^3}{3}$ 或ハ $\frac{q^3}{3}$ トナル故ニ yz ノ對合スル値ハ此三種ニ止ル此ニ由テ x ノ

三種ノ値左ノ如シ

$$\begin{aligned}
 x &= \left\{ \frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^2}{27}\right)} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^2}{27}\right)} \right\}^{\frac{1}{3}} \dots\dots\dots (-1) \\
 x &= \left\{ \frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^2}{27}\right)} \right\}^{\frac{1}{3}} \left(\frac{-1 + \sqrt{(-3)}}{2} \right) + \left\{ \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^2}{27}\right)} \right\}^{\frac{1}{3}} \left(\frac{-1 - \sqrt{(-3)}}{2} \right) \quad (1) \\
 x &= \left\{ \frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^2}{27}\right)} \right\}^{\frac{1}{3}} \left(\frac{-1 - \sqrt{(-3)}}{2} \right) + \left\{ \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^2}{27}\right)} \right\}^{\frac{1}{3}} \left(\frac{-1 + \sqrt{(-3)}}{2} \right) \quad (2)
 \end{aligned}$$

此三式ヲ以テ第二項ヲ缺ク三次方程式ノ三商ヲ顯ス公式トス

例一 $x^3 - 7x^2 + 14x - 20 = 0$ 上ノ方程式ノ三商ヲ問フ

解法 第四百四十九條ノ法ニテ所顯ノ方程式ノ第二項ヲ消去セン

トス 由テ $x = y + \frac{7}{3}$ トシ變式ヲ作ラン $y^3 - \frac{7}{3}y - \frac{344}{27} = 0$ 得此ニ由テ

前公式ニ從テ此變式ノ三商ヲ求ム

$$y = -\frac{7}{3}, \quad y = -\frac{344}{27}, \quad y = \sqrt{\left\{ \left(\frac{172}{27}\right)^2 - \left(\frac{7}{9}\right)^3 \right\}} = \frac{171}{27},$$

$$\begin{aligned}
 \left\{ \frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^2}{27}\right)} \right\}^{\frac{1}{3}} &= \left\{ \frac{172}{27} + \frac{171}{27} \right\}^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{343}{27} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{7}{3}, \\
 \left\{ \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^2}{27}\right)} \right\}^{\frac{1}{3}} &= \left\{ \frac{172}{27} - \frac{171}{27} \right\}^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{27} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3},
 \end{aligned}$$

$$y = \frac{7}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \quad \text{或ハ又}$$

$$y = \frac{7}{3} \cdot \frac{-1 + \sqrt{(-3)}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-1 - \sqrt{(-3)}}{2} = \frac{-8 + 6\sqrt{(-3)}}{6} = \frac{-4 + 3\sqrt{(-3)}}{3} \quad \text{或ハ又}$$

$$y = \frac{7}{3} \cdot \frac{-1 - \sqrt{(-3)}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-1 + \sqrt{(-3)}}{2} = \frac{-8 - 6\sqrt{(-3)}}{6} = \frac{-4 - 3\sqrt{(-3)}}{3}$$

$$\text{是故ニ原方程式ノ三商ハ } \frac{8}{3}, \frac{7}{3}, \frac{15}{3} = 5, \frac{-4 + 3\sqrt{(-3)}}{3}, \frac{7}{3} = 1 + \sqrt{(-3)},$$

$$\frac{-4 - 3\sqrt{(-3)}}{3}, \frac{7}{3} = 1 - \sqrt{(-3)} \quad \text{ナリ}$$

或ハ又已ニ一商ヲ發見スルノ後チハ⁵ニテ以テ所題ノ方程式ノ前

節ヲ除シテ二次方程式トナシ然ル後チ他ノ兩商ヲ求ルモ可ナリ

例二 $x^3+6x-20=0$ 上ノ方程式ノ三商ヲ問フ

解法 $q=6, r=-20$ 故ニ公式ニ從テ左ノ三式ヲ得

$$x=\{10+\sqrt[3]{108}\}^{\frac{1}{3}}+\{10-\sqrt[3]{108}\}^{\frac{1}{3}},$$

$$x=\{10+\sqrt[3]{108}\}^{\frac{1}{3}}\left\{\frac{-1+\sqrt[3]{-3}}{2}\right\}+\{10-\sqrt[3]{108}\}^{\frac{1}{3}}\left\{\frac{-1-\sqrt[3]{-3}}{2}\right\},$$

$$x=\{10+\sqrt[3]{108}\}^{\frac{1}{3}}\left\{\frac{-1-\sqrt[3]{-3}}{2}\right\}+\{10-\sqrt[3]{108}\}^{\frac{1}{3}}\left\{\frac{-1+\sqrt[3]{-3}}{2}\right\},$$

此題ニテハ $10+\sqrt[3]{108}$ 及 $10-\sqrt[3]{108}$ ノ立方根ノ値ヲ正シク求ル能ハス唯略近數ヲ得ルノミ然レモ探索法ニテ或ハ根數二項式トナスヲ得即チ左ノ如シ

$$10+\sqrt[3]{108}=10+6\sqrt[3]{3}=1+3\sqrt[3]{3}+9+3\sqrt[3]{3}=1+\sqrt[3]{3}^3,$$

$$10-\sqrt[3]{108}=10-6\sqrt[3]{3}=1-3\sqrt[3]{3}+9-3\sqrt[3]{3}=1-\sqrt[3]{3}^3,$$

是故ニ $x=1+\sqrt[3]{3}+(1-\sqrt[3]{3})=2,$

$$x=\{1+\sqrt[3]{3}\}^{\frac{1}{3}}\left\{\frac{-1+\sqrt[3]{-3}}{2}\right\}+\{1-\sqrt[3]{3}\}^{\frac{1}{3}}\left\{\frac{-1-\sqrt[3]{-3}}{2}\right\}=-1+3\sqrt[3]{-1},$$

$$x=\{1+\sqrt[3]{3}\}^{\frac{1}{3}}\left\{\frac{-1-\sqrt[3]{-3}}{2}\right\}+\{1-\sqrt[3]{3}\}^{\frac{1}{3}}\left\{\frac{-1+\sqrt[3]{-3}}{2}\right\}=-1-3\sqrt[3]{-1}.$$

然レモ若シ $10+\sqrt[3]{108}$ 及 $10-\sqrt[3]{108}$ ノ立方根ノ略近ノ値ヲ求ルハ左ノ如シ

$$\{10+\sqrt[3]{108}\}^{\frac{1}{3}}=2.732\dots\dots, \{10-\sqrt[3]{108}\}^{\frac{1}{3}}=-.732\dots\dots\dots \text{是故ニ又} x=2$$

ヲ得然レモ此法ニテハ x ノ値正シク2ナリト云フヲ得ス又虛商

$$\text{ヲ求ルハ } x=2.732\dots\dots\left\{\frac{-1+\sqrt[3]{-3}}{2}\right\}-.732\dots\dots\left\{\frac{-1+\sqrt[3]{-3}}{2}\right\} \text{ 即チ}$$

$$x=-1\pm 1.732\dots\dots\sqrt[3]{-3} \text{ ヲ得}$$

第六百六十五條 前條ノ解法ニ於テ x ノ値九種ノ變化ヲナスト雖モ原方程式ニ合フモノ三種ニ止ルヲ知ル然レモ未タ九種ノ變化ヲナス所以ヲ論セス由テ爰ニ此理ヲ論セントス

前條ノ解法ニ於テ q, r ノ値ノ必要ナル關係ハ $\frac{q^3}{27}=-\frac{r}{3}$ ナリ然レモ之ヲ用フルキ之ヲ三乗シテ $q^3r^3=-\frac{q^3}{27}$ トセリ此理 q^3 或ハ q^3r^3 ニ代フルモ變ス

ルヲナシ(但シ \$s\$ ハ第四百六十三條ニ定ル所ノ意義ニ從フ是故ニ三次方程式 \$s^3 + qs + r = 0\$ ナ解シテ得ル所ノ九種ノ商ハ本式ニ合フモノ三種ニシテ \$s^3 + qsc + r = 0\$ ニ合フモノ三種又 \$s^3 + q^2s + r = 0\$ ニ合フモノ三種ナリ

第四百六十六條 三次方程式 \$s^3 + qs + r = 0\$ ニ於テ \$q, r\$ ナ實數トシテ各商ノ狀勢ヲ論ス

第一 先ツ \$q\$ 及ヒ \$r\$ ノ値ヲ實數トシ其立方根ノ數值ヲ順次ニ \$m, n, t\$ セハ一商ハ必ス實數ナリ即チ \$m=n\$ 此ノ如シ而シテ他ノ兩商ハ \$ms + ns^2 + rs\$ ナリ今 \$s\$ ナ $\frac{-1 \pm \sqrt{1(-3)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ ニ改ムレハ $\frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{2} \sqrt{-3} = \frac{m+n}{2} - \frac{m-n}{2} \sqrt{-3}$ トナル此兩商ハ \$m=n\$ ナルニアラサレハ虛數ナリ若シ \$m \neq n\$ ナレハ此兩商何レモトナル此時ニ於テハ三商ノ形 $2m, -m, -m$ 此ノ如シ即チ兩等商ヲ有スル方程式ナリ而シテ此時ニ於テハ $m=n$ 即チ $y = z$ ナルカ故ニ $\frac{y^2}{4} + \frac{q^3}{27} = 0$ ナラサルヲ得ス是故ニ段數及ヒ實項ノ關係此理ニ合ハシ兩等商アルヲ知ル

第二 次ニ \$q\$ 及ヒ \$r\$ ノ値ヲ虛數トシ即チ $\frac{y^2}{4} + \frac{q^3}{27}$ ナ負數トシ二項法ニ從テ $\left\{ -\frac{y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{y^2}{4} + \frac{q^3}{27} \right)} \right\}^{\frac{1}{3}}$ ノ詳式ヲ求ムレハ詳式ノ列項隔次ニ實數トナリ隔次ニ

虛數トナル即チ $\sqrt[3]{\left(\frac{y^2}{4} + \frac{q^3}{27} \right)}$ ノ空數幕及ヒ偶次ノ幕數ヲ乘子ニ有スル諸項ハ皆實數ニシテ此根數式ノ奇次ノ幕數ヲ乘子ニ有スル諸項ハ皆虛數トナルナリ而シテ根數號ノ正負ニ依テ詳式兩様ヲ得ルト雖ヒ奇次ノ列項異號ナルノ外全シ同シ此ニ由テ實數諸項ノ和ナルトシ虛數諸項ノ段數ノ和ヲ \$v\$ トセハ $ms = u + v\sqrt{-1}, n = u - v\sqrt{-1}$ ナ得此時ニ於テハ三商皆實數トナル即チ左ノ如シ

$$\begin{aligned} m+n &= u+v\sqrt{-1} + u-v\sqrt{-1} = 2u, \\ ms+ns^2 &= \{u+v\sqrt{-1}\} \left\{ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \right\} + \{u-v\sqrt{-1}\} \left\{ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \right\} = -u-v\sqrt{-3}, \\ m^2s+ns^2 &= \{u+v\sqrt{-1}\} \left\{ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \right\} + \{u-v\sqrt{-1}\} \left\{ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \right\} = -u+v\sqrt{-3}, \end{aligned}$$

是故ニ三次方程式ノ兩商虛數ナルキ或ハ兩商等シキハ第四百六十四條ノ解法ニテ容易ニ三商ヲ求ルヲ得ヘシト雖モ三商皆實數ニシテ不等ナルキハ第四百六十四條ノ解法虛數二項式ノ立方根ヲ求ルノ法ヲ要ス然ルニ虛數二項式ハ形狀ニ據テ或ハ其立方根ヲ亦虛數二項式ニテ顯スヘキアリト雖モ探索シテ知ルノミ公法ニアラス故ニ通例二項法ニ據テ根數ノ詳式ヲ求メテ略近ノ値ヲ得ルノミ由テ此時ニ於テハ商ヲ有根式ニテ顯スヲ得ス

三次方程式ノ三商實數ニシテ不等ナル題ヲ不能化之題ト云フ此時ニ於テ

ハ迦但氏ノ解法便ナラス別ニ簡便ナル解法アリト雖モ三角術ニ關係スルカ故ニ爰ニ載セス

例三 $x^3 - 15x - 4 = 0$ 上ノ方程式ノ三商ヲ問フ

解法 $p = -4, q = -15$ 此ニ由テ

$$u = \sqrt[3]{2+1} \sqrt[3]{(-121)} = \sqrt[3]{2+1} \sqrt[3]{(-1)} = \sqrt[3]{2+1} \sqrt[3]{(-1)}$$

$$u = \sqrt[3]{2-1} \sqrt[3]{(-121)} = \sqrt[3]{2-1} \sqrt[3]{(-1)} = \sqrt[3]{2-1} \sqrt[3]{(-1)} \text{ 是故ニ } u = \sqrt[3]{2}, v = 1 \text{ ナリ故}$$

$$5. \quad x = 2u = \sqrt[3]{2} = -u - v = -\sqrt[3]{2} - 1 \quad 3 = -2 + 1 \quad 3 \text{ ナリ}$$

例四 $x^3 - 6x - 5.6 = 0$ 上ノ方程式ノ三商ヲ商フ

解法 $p = -6, q = -5.6$ 此ニ由テ

$$u = \sqrt[3]{2.8 + \sqrt{(7.84 - 8)}} = \sqrt[3]{2.8 + 4\sqrt{(-1)}} = \sqrt[3]{2.8} \sqrt[3]{1 + \frac{4}{\sqrt[3]{2.8}} \sqrt{(-1)}} = \sqrt[3]{2.8} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2.8}} \sqrt{(-1)}}$$

$$u = \sqrt[3]{2.8 - \sqrt{(7.84 - 8)}} = \sqrt[3]{2.8 - 4\sqrt{(-1)}} = \sqrt[3]{2.8} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2.8}} \sqrt{(-1)}}$$

$$\text{今 } \frac{1}{\sqrt[3]{2.8}} \sqrt{(-1)} = b + \text{命セバ } \left\{ 1 \pm \frac{1}{\sqrt[3]{2.8}} \sqrt{(-1)} \right\}^{\frac{1}{3}} = (1 \pm b)^{\frac{1}{3}} \text{ ナリ是故ニ}$$

$$(1 \pm b)^{\frac{1}{3}} = 1 \pm \frac{1}{3}b - \frac{2}{3.6}b^2 + \frac{2.5}{3.6.9}b^3 - \frac{2.5.8}{3.6.9.12}b^4 \pm \dots$$

$$= 1 \pm \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2.8}} \sqrt{(-1)} + \frac{2}{3.6} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2.8}} \right)^2 + \frac{2.5}{3.6.9} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2.8}} \right)^3 \sqrt{(-1)} - \frac{2.5.8}{3.6.9.12} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2.8}} \right)^4 \pm \dots \right)$$

$$= \left\{ 1 + \frac{2}{3.6} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2.8}} - \frac{2.5.8}{3.6.9.12} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2.8}} + \dots \right\} \pm \left\{ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2.8}} - \frac{2.5}{3.6.9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2.8}} + \dots \right\} \sqrt{(-1)}$$

$$\text{故ニ } u = \sqrt[3]{2.8} (1.002250), v = \sqrt[3]{2.8} (0.47440) \text{ 此ニ由テ}$$

$$x=2u=2\sqrt[3]{(2.8)(1.002250)}=2\times 1.409459\times 1.002250$$

$$=2.825260.$$

$$x=-u+vi/3=-\sqrt[3]{(2.8)(1.002250)}+\sqrt[3]{(2.8)(.047440)}/3$$

$$=-\sqrt[3]{(2.8)(1.002250-.047440/3)}=-\sqrt[3]{(2.8)(.920082)}$$

$$=-1.296817,$$

$$x=-u-vi/3=-\sqrt[3]{(2.8)(1.002250)}-\sqrt[3]{(2.8)(.047440)}/3$$

$$=-\sqrt[3]{(2.8)(1.002250+.047440/3)}=-\sqrt[3]{(2.8)(1.084418)}$$

$$=-1.528442.$$

第四百六十七條 不能化之題ニ逢フモ虚數二項式 $a+bi/(1-i)$ ノ立方根ヲ二項法ニテ級數ニ改ルキハ各商ノ値ヲ實數ナル級數ニテ顯スヲ得ルナリ然レモ a 若シ b ヨリ大ナレハ級數ノ列項ヲ虚數分ノ昇冪ノ順ニ排列スルヲ宜シトス否ヲサレハ級數發級數トナリ商ノ畧近數ヲ得ル能ハス又 a 若シ b ヨリ小ナレハ虚數二項式ヲ $a+bi/(1-i)=1/(1-i)(1+bi/(1-i))$ トス

ヘシ然ルキハ $1/(1-i)=1/(1-i)(1-i)$ ナルカ故ニ

$(a+bi/(1-i))^3=1/(1-i)(1+bi/(1-i))^3$ トナル由テ前ノ如ク此式ノ後乗子ヲ級

數ニ改メ虚數分ノ昇冪ノ順ニ各項ヲ排列セハ斂級數ヲ得ヘシ故ニ商ノ畧近數ヲ求ルヲ得

第四百六十八條 三次完全式ニテ兩等商ヲ有スルキノ諸段數及ヒ實項相關係スルノ理ヲ論ス

論 三次完全式ヲ $Ax^3+3Bx^2+3Cx+D=0$ トシ又 $x=y-\frac{B}{A}$ トミテ新變式ヲ作ラハ $y^3+qy+r=0$ 此ノ如クナルヘシ但シ此式ノ段數及ヒ實項左ノ如シ

$$q=\frac{3C}{A}-\frac{3B^2}{A^2}, r=\frac{D}{A^2}+\frac{2B^3}{A^3}.$$

所設ノ原式若シ兩等商ヲ有スルキハ新變式亦兩等商ヲ有スヘシ此ニ由テ原式ニ兩等商アラハ新變式ノ段數及ヒ實項相關係スルノ理 $\frac{y^3+qy+r}{4}=\frac{q^2+27r}{27}=0$ 此ノ如クナルヲ知ル第四百六十八條ヲ視ヨ此式ノ B ヲ變換セハ

$(2B^2-3ABC+A^2D)^2+4(AC-B^2)^2=0$ を得之ヲ變化セハ

$(AD-BC)^2-4(B^2-AC)(C^2-BD)=0$ を得是故ニ三次完全式ノ諸段數及ヒ實項相

關係スルノ理此ノ如クナレハ兩等商アリトス

三次方程式解法問題

左ノ各方程式ノ三商各如何

第一 $x^3-3x-2=0$.

第二 $x^3-9x-28=0$.

第三 $x^3-x+6=0$.

第四 $x^3-6x-6=0$.

第五 $x^3+9x-6=0$.

第六 $x^3-15x^2-33x+847=0$.

第七 $x^3+6x^2-13x+24=0$.

第八 $x^3-3(a^2+b^2)x=2a(a^2-3b^2)$.

第九 $x^3-11x+21/3=0$.

四次方程式解法

代加德氏之解法

第四百六十九條 第四百四十九條ノ法ニ依テ方程式ノ第二項ヲ消去スル
ヲ得ルカ故ニ四次方程式ノ公式ヲ $x^4+qx^2+rx+s=0$ ト命スルヲ得此ニ
由テ此ノ如キ形狀ナル方程式ヲ解スルノ法ヲ論セントス
先ツ $x^4+qx^2+rx+s=(x^2+ex+f)(x^2-ex+g)$ ト命シ e, f, g ノ三數ヲ發見シ得ヘ
キヲ示サントス

後節ナル兩棄子ヲ相乘シテ前節ナル列項ニ照ラシテ同ノ冪數ノ段數ヲ
比較シテ方程式 $g+f-e^2=q, e(g-f)=r, gf=s$ 即チ $g+f=q+e, g-f=e, gf=s$ ヲ得
是故ニ初ノ兩式ヨリ e ヲ用ヒテ g ト f トノ値ヲ顯ス式ヲ作り以テ末ノ式
ノ $gf=s$ 代用セハ $(q+e+\frac{r}{e})(q+e-\frac{r}{e})=4s$ ヲ得之ヲ變化シテ $e^2+2qe^2+(q^2-4s)$
 $e-\frac{r}{e}=0$ トナルヲ得此方程式ハ e ノ三次方程式ナリ故ニ e ノ値ハ最少ナ
ルモ實數一箇アリ(第四百五十八條ヲ視ヨ)是故ニ e ノ値未知ル已ニ e ノ値

ヲ知ラハ e ノ値ハ容易ニ發見スルヲ得ヘシ已ニ e ノ値ヲ知ラハ f ノ値亦容易ニ發見スルヲ得此ニ由テ多項式

x^4+qx^3+rx+s ハ一次式ナル兩乘子ニ分開スルヲ得是故ニ兩二次方程式
 $x^2+ex+f=0, x^2-cx+y=0$ ヨリ四商ヲ發見スルヲ得ヘシ

論 兩乘子ノ一ニ一項 ex ヲ插入シ他ノ乘子ノ一項ニ $-cx$ ヲ插入スルモノハ此兩乘子ノ乘積中 x^3 ヲ帶ル一項ヲ消去センカタメナリ又 e ハ前ニ示ス所ニ後ノ二次方程式ノ兩商ノ和ニ等シキカ故ニ亦原四次方程式ノ兩商ノ和ナリ而シテ原四次方程式ノ四商中兩商ヲ配合スルノ法^{4.3}_{1.2}即チ六變アリ是レ e ヲ發見スヘキ方程式六次式トナル所以ナリ然ルニ第二項ヲ缺ク四次方程式ノ四商ノ和ハ空數ナルヲ以テ第四百三十六條第二定理ヲ觀ヨ兩商ノ和ハ他ノ兩商ノ和ト異號同數ナリ兩商配合ノ法ニ係ラズ此理恒ニ變セス是レ e ヲ發見スヘキ方程式 e ノ偶次ノ冪數ノミヲ具有スル所以ナリ是故ニ e^2 ハ三次方程式ノ解法ニテ發見スルヲ得ルナリ

三次方程式ノ解法ニテ e^2 ノ値ヲ發見スルノ後チ之ヲ平方ニ開テ e ノ値ヲ求ルキ之ヲ正トスルモ之ヲ負トスルモ任意ナリ其故何トナレハ e ノ正負變換スルモ f ト g トヲ對換セハ四次方程式ノ商變セサルカ故ナリ

例 $x^4-10x^3-20x-16=0$ 上ノ方程式ノ四商各如何

解法 $q=-10, r=-20, s=-16$ 故ニ e^2 ノ三次方程式左ノ如シ

$e^3-20e^2+164e-40=0$ 第四百六十四條ノ法ニ由テ e^2 ヲ發見ス

故ニ $e=2$ 又 $e=3$ $f=2, g=-3$ ナリ此ニ由テ

$x^4-10x^3-20x-16=(x^2+2x+2)(x^2-2x-8)$ ナリ是故ニ原四次方程式ノ四

商 $4, -2, -1+1, (-1)-1-1(-1)$ ナルヲ知ル

第四百七十條 是故ニ四次方程式ハ三次式ナル輔式ノ一商ヲ發見スルヲ得ルニアラサレハ解スルヲ得ス此ニ由テ此輔式ノ不能化之式第四百六十六條ヲ觀ヨトナル狀勢ヲ知ルヲ必要ナリ

註 以下往々輔式ト云ヘル名稱ヲ用フル所尠カラス是レ四次方程式ノ

解法ニ要スル三次方程式ヲ指スナリ

第二項ヲ缺ク四次方程式ノ兩商實數ニシテ兩商虛數ナルキハ輔式不能化之式トナルヲナシ

論 第二項ヲ缺ク四次方程式ノ兩虛商ヲ $a+bi$ 、 $a-bi$ 、 $a+bi$ 、 $a-bi$ トセハ四商ノ和空數ナルカ故ニ兩實商 $a+c$ 、 $a-c$ 此ノ如クナルヘシ由テ四商中兩商ノ和六種ヲ求ムレハ $+2a$ 、 $+{c+b\sqrt{-1}}$ 、 $+{c-b\sqrt{-1}}$ 、 $+{c-b\sqrt{-1}}$ 、 $+{c+b\sqrt{-1}}$ 、 $+2a$ 種ノ値 $(2a)^2$ 、 ${c+b\sqrt{-1}}^2$ 、 ${c-b\sqrt{-1}}^2$ 此ノ如シ是故ニ c 若シ空數ナラサルキハ a ノ三種ノ値中ノ末ノ兩式虛數トナル若シ又 c 空數ナレハ a ノ三種ノ値皆實數トナル然レモ末ノ兩式相等シ是故ニ輔式不能化之式ニアラサルナリ(第四百六十六條ヲ視ヨ)

第四百七十一條 第二項ヲ缺ク四次方程式ノ四商皆實數ナレハ輔式ノ三商亦皆實數ナリ若シ又四商皆虛數ナレハ其形 $a+bi$ 、 $a-bi$ 、 $a+ci$ 、 $a-ci$ 此ノ如クナルヘシ此四商中兩商ノ和六種ヲ求ムレハ $+2a$ 、 $+{b+ci}$ 、 $+{b-ci}$ 、 $+{b-ci}$ 、 $+{b+ci}$ 、 $+2a$

$\sqrt{-1}$ ヲ得故ニ a ノ三種ノ値 $4a^2$ 、 $-(b+ci)^2$ 、 $-(b-ci)^2$ 此ノ如シ是故ニ輔式ノ三商皆實數ナリ

是故ニ第二項ヲ缺ク四次方程式ノ四商皆實數ナルキ或ハ四商皆虛數ナルキハ輔式通例不能化之式トナル唯輔式ノ兩商等シキキ不能化之式ニアラサルナリ

第四百七十二條 前兩條ニ於テ第二項ヲ缺ク四次方程式ノ商ノ各種ノ狀勢ニ對合スル輔式ノ商ノ狀勢ヲ論シタルカ故ニ今又之ニ反シテ輔式ノ商ノ各種ノ狀勢ニ對合スル原四次方程式ノ商ノ狀勢ヲ論セントス
輔式ノ實項負數ナルカ故ニ三商皆正數ナルカ或ハ一商正數兩商負數ナルニアラサレハ一商正數兩商虛數ナリ(第四百三十六條第五定理及ヒ第四百五十七條ヲ視ヨ)是故ニ第四百七十條及ヒ第四百七十一條ニ由テ左ノ三定理アルヲ知ル

第一 輔式ノ三商皆正ノ實數ナレハ原四次方程式ノ四商皆實數ナリ

第二 輔式ノ一商正ノ實數ニシテ兩商負ノ實數ナレハ原四次方程式ノ兩商實數ニシテ兩商虛數ナルニアラサレハ四商皆虛數ナリ

第三 輔式ノ一商正ノ實數ニシテ兩商虛數ナレハ原四次方程式ノ兩商實數ニシテ兩商虛數ナリ

第四百七十三條 輔式ノ三商ヲ以テ原四次方程式ノ四商ヲ容易ニ顯スヲ得ヘシ今輔式 $c^2+2qc+(q^2-4s)^2-r^2=0$ ヨリ發見シ得タル c ノ三種ノ値ヲ c^2 c トセハ第四百三十六條ニ由テ左ノ兩式ヲ得

$$a^2bc^2-2q=a^2+b^2+c^2 \quad \text{是故} \quad r=abc \text{ ナリ}$$

今 c ノ値 a ナ取ラハ左ノ式ヲ得

$$a^2+a+f=a^2+ax+\frac{1}{2}\left(q+a^2-\frac{r}{a}\right)=a^2+ax+\frac{1}{4}(a^2-b^2-c^2-2bc)$$

是故ニ方程式 $a^2+a+f=0$ ヲ解スルキハ $x=\frac{1}{2}(-a-b-c)$ $x=\frac{1}{2}(-a+b+c)$ ヲ得

又方程式 $x^2-x+a+s=0$ ヲ解スルキハ $x=\frac{1}{2}(a-b+c)$ $x=\frac{1}{2}(a+b-c)$ ヲ得ヘシ是

故ニ原四次方程式ノ四商 $\frac{1}{2}(-a-b-c)$ $\frac{1}{2}(-a+b+c)$ $\frac{1}{2}(a-b+c)$ $\frac{1}{2}(a+b-c)$ 此ノ如シ

又原四次方程式ニ兩等商アラシメシムハ輔式亦兩等商ヲ有セサルヲ得ス其故何トナレハ $\frac{1}{2}(-a-b-c)=\frac{1}{2}(-a+b+c)$ トセハ $b+c=0$ ヲ得故ニ $b^2=c^2$ トナルヲ以テナリ又同法ニテ他ノ商ニテモ猶此理アルヲ知ルヘシ

此ニ由テ原四次方程式ニ兩等商アラシメシム

$(27r^2-72qs+2q^2)=4(q^2+12s)^2$ 此ノ如キ關係ヲ必要トシ(第四百六十八條ヲ視ヨ)又原四次方程式ニ三等商アラシメシムハ $27r^2-72qs+2q^2=0$ $q^2+12s=0$ 此ノ如キ關係ヲ必要トスルナリ其故何トナレハ

$$X=x^4+qx^2+rx+s \quad \text{ハ} \quad X'=4x^3+2qx+r, X''=12x^2+2q \quad \text{ナルカ故ニ} \quad X''=0 \quad \text{ヨ}$$

$$r^2=-\frac{q}{6} \quad \text{〔一〕ヲ求メ之ヲ以テ} \quad X'=0, X=0 \quad \text{ノ中ニ包容スル} \quad s \quad \text{ニ代用セハ}$$

$$-\frac{5q^2}{36}+rx+s=0 \quad \text{〔二〕} \quad x\left(-\frac{2q}{3}+2q\right)+r=0 \quad \text{〔三〕ヲ得此〔三〕式ヨリ}$$

$\frac{3x^2}{4y}$ [四]ヲ求メ之ヲ以テ [二]式ナル x ニ代用セハ $\frac{3x^2}{4y} - \frac{5y^2}{36} = 0$ [五]ヲ得

又 [四]兩式ヲ連合シテ $\frac{8y^2}{27}$ [六]ヲ得之ヲ以テ [五]式ヲ變換セハ $\frac{8}{27} + \frac{q^2}{12}$

〇ヲ得ルカ故ナリ

右ノ關係ヲ四次完全式ニ就テ知ルノ必要ナリ由テ左ニ之ヲ示サントス

四次完全式ヲ $Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E = 0$ トシ $x = y - \frac{B}{A}$ トセバ

$y^4 + qy^3 + ry^2 + sy = 0$ ヲ得但 \therefore 此式中 $q = \frac{6C}{A} - \frac{6B^2}{A^2}$, $r = \frac{4D}{A} - \frac{12BC}{A^2} + \frac{8B^3}{A^3}$,

$s = \frac{E}{A} - \frac{4BD}{A^2} + \frac{6B^2C}{A^3} - \frac{3B^3}{A^4}$ 是故 $\therefore q^2 + 12s = \frac{12}{A^2} (AE - 4BD + 3C^2)$,

$27r^2 - 72qs + 2q^3 = \frac{16 \times 27}{A^3} (AD^2 + B^2E + C^3 - ACE - 2BCD)$ トナル此ニ由テ $(AE - 4BD$

$+ 3C^2) = 27(AD^2 + B^2E + C^3 - ACE - 2BCD)^2$ ヲ以テ兩等商ヲ有スルニ必要ナル關

係トシ又 $AE - 4BD + 3C^2 = 0$, $AD^2 + B^2E + C^3 - ACE - 2BCD = 0$ ヲ以テ三等商ヲ有

スルニ必要ナル關係トス

第四百七十四條 各家互ニ相類スル式ヲ以テ四次方程式ヲ解スル他ノ法ヲ造ルアリ是ヲ以テ或ハ佛拉利氏之解法ト云ヒ或ハ物林氏之解法ト云ヒ或ハ聖普宋氏之解法ト云フ今左ニ此解法ヲ示サントス

四次方程式ヲ $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ トシ此式ノ兩節ニ $lx^2 + mx + n$ ヲ加ヘテ

m ノ値ニ兩節ヲ自乗數トナスヘキモノヲ撰ムナリ乃チ

$x^4 + px^3 + (q+l)x^2 + (r+m)x + s+n = lx^2 + mx + n$ ヲ得此式ノ後節ハ $m^2 = 4n$ ナレハ自

乗數トナル今前節ヲ $(x^2 + \frac{px}{2} + l)^2$ ニ等シトシテ之ヲ解キ x ノ同シ冪數ノ段

數ヲ比較シテ $\frac{p^2}{4} = q + l$, $pk = r + m$, $k^2 = s + n$ ヲ得是故 $\therefore k$ ヲ用ヒテ l m n

ノ値ヲ顯スヲ得由テ之ヲ $m^2 = 4n$ ニ代用セハ

$(pk - r)^2 = 4(2k + \frac{p}{4} - q)(k^2 - s)$ ヲ得此三次方程式ヨリ k ノ値ヲ發見セハ l m n

ノ値皆發見シ得ヘシ然ルキハ $(x^2 + \frac{px}{2} + k)^2 = lx^2 + mx + \frac{m^2}{4}$ ヲ得是故 $\therefore x^2 + \frac{px}{2} +$

$$k = \frac{2lx+m}{2\sqrt{l}} \quad \text{ヲ得此ニ由テ兩二次方程式 } x^2 + \frac{px}{2} + k + \frac{2lx+m^2}{2\sqrt{l}} = 0, x^2 + \frac{px}{2} + k - \frac{2lx+m^2}{2\sqrt{l}} = 0 \quad \text{ヲ得}$$

第四百七十五條 此解法ニ要スル三次方程式ハ四次方程式ニ兩實商兩虛商アルニアラサレハ通例不能化之式トナル

論 原四次方程式ノ四商ヲ a, b, c, d トセハ $k + \frac{m}{2\sqrt{l}}$ ハ兩商ノ相乘積ニ等シテ $k - \frac{m}{2\sqrt{l}}$ ハ他ノ兩商ノ相乘積ニ等シカラサルヲ得ス第四百三十六條第五定理ヲ視ヨ今 $k + \frac{m}{2\sqrt{l}} = ab, k - \frac{m}{2\sqrt{l}} = cd$ トセハ $k = \frac{1}{2}(ab+cd)$ ヲ得又同

理ニテ k ノ他ノ兩種ノ値ハ $\frac{1}{2}(ac+bd), \frac{1}{2}(ad+bc)$ ナルヲ知ル是故ニ a, b, c, d 皆實數ナレハ k ノ三種ノ値皆實數ナリ又 a, b, c, d 皆虛數ナルモ k ノ三種ノ値皆實數トナル其故何トナレハ原四次方程式ノ第二項空ナルカ故ニ四商皆虛數ナレハ其形狀 $a = u + v\sqrt{-1}, b = u - v\sqrt{-1}, c = -u + v\sqrt{-1}, d = -u - v\sqrt{-1}$ 此ノ如シ故ニ $ab + cd = 2u^2 + v^2 + u^2 + v^2 + ad + bc = -2u^2 + 2vn, ac + bd = -2u^2 - 2vn$

トナルカ故ナリ是故ニ四商皆實數ナルト或ハ四商皆虛數ナルトハ輔式通例不能化之式トナル然レモ四商中兩商實數ニシテ他ノ兩商虛數ナレハ k ノ値一ハ實數ニシテ他ノ二ハ虛數トナリ或ハ三種ノ値皆實數ナレハ中チ兩種ノ値適等數トナル其故何トナレハ a, b 實商トシ c, d 虛商トシ $c = u + v\sqrt{-1}, d = u - v\sqrt{-1}$ トセハ $ab + cd = ab + u^2 + v^2, ad + bc = (a+b)u - (a-b)v$ $v\sqrt{-1}$ $a, c - b, d = (a+b)u + (a-b)v\sqrt{-1}$ トナル故ニ a, b 等シカラサレハ一商實數ニシテ兩商虛數ナリ a, b 若シ等シケレハ三商皆實數ナレモ兩等商トナル是故ニ兩商實數ニシテ兩商虛數ナルトハ不能化之式トナラス

尤拉氏解法

第四百七十六條

四次方程式 $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$ なる $x = y + z + u$ とセハ $x^2 = y^2 + z^2 + u^2 + 2(yz + zu + yu)$ とナル故ニ $x^2 - y^2 - z^2 - u^2 = 2(yz + zu + yu)$ を得此ノ兩節ヲ自乗セハ左ノ如シ

$$x^4 - 2x^2(y^2 + z^2 + u^2) + (y^2 + z^2 + u^2)^2 = 4(yz + zu + yu)^2$$

$$= 4(y^2z^2 + z^2u^2 + y^2u^2) + 8yzu(y + z + u).$$

今 $y + z + u$ ナルニ代フレハ左ノ如シ

$$x^4 - 2x^2(y^2 + z^2 + u^2) - 8xyzu + (y^2 + z^2 + u^2)^2 - 4(y^2z^2 + z^2u^2 + y^2u^2) = 0.$$

此方程式ト原方程式ト同式ナラシメンカタノ必要ナル關係左ノ如シ

$$q = -2(y^2 + z^2 + u^2), r = -8yzu, s = (y^2 + z^2 + u^2)^2 - 4(y^2z^2 + z^2u^2 + y^2u^2).$$

此ニ由テ左ノ三式ヲ得

$$y^2 + z^2 + u^2 = -\frac{q}{2}, y^2z^2 + z^2u^2 + y^2u^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{q^2}{4} - s\right) = \frac{q^2 - 4s}{16}, y^2z^2u^2 = \frac{r^2}{64}.$$

是故ニ $y^2z^2u^2$ ノ値ハ三次方程式 $t^3 + \frac{q}{2}t^2 + \frac{q^2 - 4s}{16}t - \frac{r^2}{64} = 0$ ヨリ發見シ得タル

t ノ三種ノ値ナルヲ知ル[第四百三十六條ヲ觀ヨ]此三次方程式ノ三商ヲ t_1, t_2, t_3 トセハ $y = \sqrt[3]{t_1z} = \sqrt[3]{t_2u} = \sqrt[3]{t_3}$ ヲ得之ヲ以テ x 即チ $y + z + u$ ノ各項

ニ代用セハ正負號ノ配合ニ由テ八様ノ變化ヲナス然レモ此得數皆原四次方程式ノ商トナルニアラス其故何トナレハ $yzu = -\frac{r}{8}$ ナラサルヲ得サルカ

故ナリ此ニ由テ y, z, u ノ連乘積ハ $\frac{r}{8}$ ト異號ナラサルヲ得ス由テ若シ正數ナレハ x ノ値ハ $-\sqrt[3]{t_1} - \sqrt[3]{t_2} - \sqrt[3]{t_3}$ 及 $\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} + \sqrt[3]{t_3}$ 及 $\sqrt[3]{t_1} - \sqrt[3]{t_2} + \sqrt[3]{t_3}$ 及 $\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} - \sqrt[3]{t_3}$ 及 $\sqrt[3]{t_1} - \sqrt[3]{t_2} - \sqrt[3]{t_3}$ ナルニシ

此解法ニ於テ x ノ値八様ノ變化ヲナス所以ハ yzu ナ自乗シテ $y^2z^2u^2 = \frac{r^2}{64}$ ト

シテ用ヒタルカ故ニ r ノ正負變換スルモ此式同一ナルヲ以テ此解法兩方程式 $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$ 及 $x^4 + qx^2 - rx + s = 0$ ニ通スルカ故ナリ

第四百七十七條 代加德氏ノ解法ニ要スル輔式ト尤拉氏ノ解法ニ要スル
 輔式トハ $x^2 \parallel 4t$ トセハ全ク同式ナリ故ニ第四百七十條第四百七十一條第
 四百七十二條ニ述ル所ノ定理即チ原四次方程式ノ商ト輔式ノ商トノ關係
 及ヒ輔式ノ不能化之式トナルヘキ狀態ハ總テ尤拉氏ノ解法ニ於テモ同一
 ナリ

第四百七十八條 四次方程式ハ其形ニ由テ或ハ簡便ナル解法アリ設令ハ
 方程式 $x^4 + px^2 + qx + s = 0$ 於テ諸段數ノ關係若シ $p^2 - 4pq + 8s = 0$ 此ノ如
 キ理ニ合ハ、二次方程式ノ解法ヲ以テ解スヘシ其故何トサレハ原方程式
 ナ變換セハ $x^2 \left(x + \frac{p}{2} \right) + \left(q - \frac{p^2}{4} \right) x + \frac{s}{2} = 0$ トナスヲ得故ニ若シ諸段
 數ノ關係 $\frac{r}{q - \frac{p^2}{4}} = \frac{p}{2}$ 即チ $p^2 - 4pq + 8s = 0$ 此ノ如クナルキハ二次方程式ノ解
 法ヲ以テ解スヘキヲ明ナリ

四次方程式解法問題

左ノ方程式ノ四商各如何

第一 $x^4 - 7x^2 + 26x - 40 = 0$.

第二 $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 6 = 0$.

第三 $x^4 - 22x^2 + 48x - 23 = 0$.

實商之限界

第四百七十九條 凡ソ方程式ノ正商ハ 0 ト $+\infty$ トノ間ニ在リ負商ハ 0 ト $-\infty$
 トノ間ニ在リ然レモ數字方程式ノ解法ニ於テハ更ニ近キ限界ヲ知ルヲ必
 要ナリ此ニ由テ方程式ノ各商ヨリ大ナル數ヲ未知元ニ代用スルキ及ヒ各
 商ヨリ小ナル數ヲ未知元ニ代用スルキ及ヒ一商ニ過ル數ト及ハサル數ト

第四百八十條 方程式ノ各商ノ正負ヲ變換シ以テ未知元 w ノ後ニ配附シ
 テ作レル各種二項式乘子ノ連乘積ヲ作ラハ w ニ任意ナル數ヲ配スルモ此
 連乘積ノ正負虛商ノタメニ變換スルヲナシ其故何トナレハ第四百五十七
 條ニ由テ方程式若シ虛商 $a+1-(b)$ ヲ有スルハ亦必ス之ニ對合スル虛商
 $a-1-(b)$ ヲ有スルヲ知ル然ルニ $(a-a+1-(b))((a-a+1-(b)))=(a-a)^2+b$ ニ
 テ此式恒ニ正數ナルカ故ナリ

第四百八十一條 方程式ノ實商ヲ値ノ順次ニ排列シテ a b c d 等トセハ
方程式ノ形狀左ノ如シ

今此式中 $x = h$ ナ代用セハ前節ノ形狀左ノ如

$(h-a)(h-b)(h-c)(h-d)\dots$ 若シ h ノ値最小商 a ヨリ小ナレハ各乘子皆負
 數トナル故ニ連乗次數奇數ナレハ此連乗積負數トナリ連乗次數偶數ナレ

ハ此連乘積正數トナル然ルニ乘子ノ數ハ第四百三十九條ニ由テ方程式ノ次數ニ同シキヲ知ル此ニ由テ左ノ定理アリ

第一方程式ノ最小商ヨリ小ナル數 n ヲ以テ未知元 b ニ代用セハ方程式ノ次數奇數ナルキ得數負トナリ方程式ノ次數偶數ナルキ得數正トナル

又 h 若シ最大商ヨリ大ナレハ各乗子皆正數トナルカ故ニ方程式ノ次數ニ係ラス連乘積恒ニ正數ナリ此ニ由テ左ノ定理アリ

第二 方程式ノ最大商ヨリ大ナル數 n ヲ以テ未知元 x ニ代用セハ方程式ノ次數ニ係ラス得數恆ニ正ナリ

今又_hヲ始メ_aヨリ小トシ次ニ_aヨリ大ニシテ_bヨリ小トセ_hハ此ノ如キ變化ニ由テ一乗子_{h-a}ノ正負變換ス故ニ亦全積ノ正負變換ス次ニ又_h

ナハヨリ大ニシテモヨリ小トセハ全積ノ正負亦變換ス其理前ノ如シ逐テ
 此ノ如クハノ値方程式ノ實商ヲ越ル毎ニ正負ノ變化ヲ生ス然ラサレハ正
 負變セス此ニ由テ左ノ定理アリ

第三 兩數ヲ以テ順次ニ方程式ノ x ニ代用スルキ所得ノ兩數異名ナレハ此二次代用數ノ間ニ最少ナルモ必ス一ノ實商アリ或ハ三商五商等奇數ナル實商ヲ有ス然レモ所得ノ兩數同名ナレハ此二次代用數ノ間ニ實商ナシ或ハ偶數ナル實商ヲ有ス

第四百八十二條 方程式ノ列項中最大ナル負段數ヲ $-P$ トシ最前ナル負項ヲ第 1 項トセハ此方程式ノ正商ハ $\sqrt[P]{P+1}$ ニ越ルコナシ

論 先ツ方程式ヲ $ax^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots + Ex + D = 0$ 〔一〕トシ x^m ト最前ナル負項トノ間ニ正項アラハ皆之ヲ去リ然ル後チ x^m ノ下ニ排列スル各項ノ段數ヲ皆 $-P$ ニ代フレハ〔一〕式ノ前節變スルコト左ノ如シ

$$x^m - (Px^{m-n} + Px^{m-n-1} + Px^{m-n-2} + \dots + Px + P) \quad (二)$$

此式ノ兩節ヲ普ク x^m ニテ除スレハ左ノ如シ

$$1 - \left(\frac{P}{x^n} + \frac{P}{x^{n+1}} + \frac{P}{x^{n+2}} + \dots + \frac{P}{x^{m-1}} + \frac{P}{x^m} \right) \quad (三)$$

今又 P ヲ $\frac{1}{q}$ ト命セハ $P = \frac{1}{q}$ トナル又 $x = \sqrt[P]{P+1} = \sqrt[q]{\frac{1}{q}+1}$ トシテ〔三〕式ヲ變換セハ

左ノ如シ

$$1 - \left(\frac{q^n}{(q+1)^n} + \frac{q^{n+1}}{(q+1)^{n+1}} + \frac{q^{n+2}}{(q+1)^{n+2}} + \dots + \frac{q^{m-1}}{(q+1)^{m-1}} + \frac{q^m}{(q+1)^m} \right)$$

此式ノ括弧内ナル諸項同比級數ヲナスカ故ニ第三百四十二條〔B〕式ニ據テ總數ヲ求ムレハ左ノ如シ

$$1 + \frac{q^{n+1}-1}{(q+1)^{n+1}} - \left(\frac{q}{q+1} \right)^{n-1} \quad (四) \quad \text{此式中分數式} \frac{q}{q+1} \text{ハ一箇ヨリ小ナルカ故ニ}$$

亦一箇ヨリ小ナリ此ニ由テ〔四〕式ノ值恒ニ正ナリ是故ニ〔三〕式ノ $x = \sqrt[P]{P+1}$ 或ハ更ニ大ナル數ヲ代用セハ正數ヲ得ヘキヲ知ル由テ又此數

ヲ〔二〕式ナル x ニ代フルモ正數ヲ得ヘシ是故ニ此數ヲ〔一〕式ナル x ニ代用セハ正數ヲ得ヘキヲ論ヲ待スシテ明ナリ此ニ由テ第四百八十一條第二定理ニ由テ $\sqrt[P]{P+1}$ ハ方程式ノ正商ノ大極ナルヲ知ル

註 實項ハ x^0 ノ段數ト視做スヘシ又不全式ニ於タルノ值ヲ定ルハ缺項

ヲモ算スルナリ

方程式若シ負項ヲ有セサルキハ正ノ實商ナシト知ルヘシ其故何トナレハ
斯ル方程式ニ在テハ x ニ某正數ヲ代用スルキ各項皆正數トナル故ニ前節
空數トナルコナシ此ニ由テ兩節適等セサルヲ以テナリ

第四百八十三條 方程式ノ負商ノ大極數値ノ大極ナリヲ發見スル法

方程式ノ列項ノ正負ヲ隔次ニ變換シ所得ノ方程式ヨリ前條ノ法ニ從テ正
商ノ大極ヲ發見スヘシ方程式若シ不全式ナレハ始メ缺項ヲ補フヘシ

論 第四百五十六條ニ依テ前法ノ如シ變化シテ得ル所ノ方程式ノ正商ハ
皆原方程式ノ負商ト數値ヲ同フスルカ故ニ變式ノ正商ノ大極ハ即チ原式
ノ負商ノ大極ナリ

實商極問題

第一 $x^5+5x^4+2x^3-14x^2-26x+10=0$ 上ノ方程式ノ正商ノ大極ヲ問フ

此題ニテハ $a=3, P=26$ ナリ此ニ由テ正商ノ大極ヲ整數ニテ顯スルキ

$$x^2/P+1=\sqrt{26}+1=4 \text{ ナリ}$$

第二 $x^4+5x^3-25x^2-12x+68=0$ 上ノ方程式ノ正商ノ大極ヲ整數ニテ顯サ
ハ如何

第三 $x^3-5x^2-9x+12=0$ 上ノ方程式ノ正商ノ大極ヲ整數ニテ顯サハ如何

第四 $x^3+x^2+3x-8=0$ 上ノ方程式ノ正商ノ大極ヲ整數ニテ顯サハ如何

第五 $x^3-3x^2+5x+7=0$ 上ノ方程式ノ負商ノ大極ヲ整數ニテ顯サハ如何

第六 $x^4-15x^2-10x+24=0$ 上ノ方程式ノ負商ノ大極ヲ整數ニテ顯サハ如
何

第七 $x^6-3x^5+2x^4+27x^3-4x^2-1=0$ 上ノ方程式ノ負商ノ大極ヲ整數ニテ顯
サハ如何

間商式

第四百八十四條 方程式ノ各實商ノ値皆他ノ方程式ノ兩近商値相近キ兩實商ナリノ間ニ入ルル前ノ方程式ヲ後ノ方程式ノ間商式ト云フ

第四百八十五條 方程式ノ第一分式ヲ空數ト比較シテ作レル方程式ハ原式ノ間商式ナリ

論 原方程式ヲ $X=0$ トシ此式ノ各實商ヲ値ノ順次ニ例シテ a, b, c, \dots, k ト

シ各虛商ニ相當スル諸乘子ノ連乘積ヲ Y トセハ左ノ式ヲ得

$$X = (a-b)(a-c) \dots (a-k)Y = 0 \quad (1)$$

第四百五十七條ニ由テ虛商ノ數ハ偶數ニシテ兩々交互ニ對合スルヲ知ル故ニ對合スル兩乘子ノ乘積ヲ顯ス公式 $(x-p-\sqrt{-q})(x-p+\sqrt{-q}) = (x-p)^2$

ト此ノ如シ是故ニ x ノ値ニ係ラス Y ノ值恆ニ正數ナリ此ニ由テ(1)式ノ前節ハ Y ノタメニ正負ヲ變スルナシ

又第四百四十六條ニ據テ左ノ式ヲ作ル但シ Y_1 ハ Y ノ第一分式ナリ

$$X = (a-b)(a-c) \dots (a-k) + (a-a)(a-c) \dots (a-k) + \dots Y$$

$$+ (a-a)(a-b)(a-c) \dots (a-k)Y = 0 \quad (1)$$

此式ニ於テ $x = a, b, c$ 等ヲ順次ニ代入セハ左ノ如シ

第一 $(a-b)(a-c) \dots (a-k)Y_1$ 之ヲ第一乘積トス

第二 $(b-c)(b-e) \dots (b-k)Y_1$ 之ヲ第二乘積トス

第三 $(c-a)(c-b) \dots (c-k)Y_1$ 之ヲ第三乘積トス

逐テ此ノ如シ

右所得ノ式ノ正負ヲ考フルニ第一乘積ノ各乘子皆正數ナリ第二乘積ハ第一乘子負數ニシテ他ノ各乘子皆正數ナリ第三乘積ハ第一第二兩乘子負數ニシテ他ノ各乘子皆正數ナリ逐テ此ノ如シ是故ニ第一乘積ハ正數ニシテ第二乘積ハ負數トナリ第三乘積ハ亦正數トナル逐テ此ノ如シ是故ニ(1)式ノ前節ハ $x = a, b, c$ 等ヲ順次ニ代入スルル始メ正數トナリ次ニ負數トナリ第三ニ亦正數トナル是故ニ a, b, c ノ間ニ最少ナルモ必ス一ノ實商アリ第

四百八十一條第三定理ヲ視ヨ又同理ニテ $b \in$ ノ間ニ一ノ實商アルヲ知ル
 逐テ此ノ如シ此ニ由テ $X_1=0$ ノ各實商ハ皆 $X=0$ ノ兩近商ノ間ニ在リ
 右ノ論ニ於テハ a, b, c 等ヲ皆不等數トセリ然レモ若シ原式 $X=0$ ニ a ト等シ
 キ商 n 箇アリトセハ $X_1=0$ ニモ a ト等シキ商 $n-1$ 箇アリ(第四百四十七條ヲ視ヨ)
 是故ニ猶ホ $X_1=0$ ノ一商 a ハ原式 $X=0$ ノ兩等商 a ト a トノ間ニ在リト視做ス
 ナ得

斯士莫氏之法

第四百八十六條 斯士莫氏之法ハ方程式ノ實商ノ數及ヒ實商ノ位設令ハ
 二ト三トノ間ト云ヒ或ハ六ト七トノ間ト云フノ類ナリ及ヒ不可度之商ノ
 首位ヲ發見スルナリ

第四百八十七條 第四百四十七條ノ法ニ由テ方程式ノ等商ハ皆之ヲ去ル
 ヲ得由テ左ノ方程式ヲ以テ等商ヲ有セサル方程式トス

$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots + Tx + U = 0$ 此式ノ間商式ヲ $X_1 = 0$ トス今

X ト X_1 トニテ第九十四條ノ法最大公約數ヲ求ル法ノ如キ互除法ヲ行フ但
 シ負數乘子ヲ補ハス負數乘子ヲ省カスシテ每次ノ餘數ノ正負ヲ變換ス是
 レ最大公約數ヲ求ル法ト同シカラサル所ナリ

今反號ノ餘數ヲ順次ニ R_1, R_2, \dots, R_{n-1} ト命ス而シテ方程式等商ヲ有セサル
 カ故ニ X ト X_1 トニ公約數アルヘカラス(第四百四十七條ヲ視ヨ)此ニ由テ互
 除法ヲ疊施スルノ末竟ニ R_n ヲ有セサル餘數 R_n (此數空數ナラス)ヲ得ヘシ

玆ニ於テ $X, X_1, R_1, R_2, \dots, R_{n-1}, R_n$ ノ包容スル R_n ニ任意ナル一數 h ヲ代用シ得
 數ノ正負ヲ順次ニ記シ異號相接スルノ數ヲ記ス次ニ又 h ヨリ大ナル數 h'
 ナ R_n ニ代用シ得數ノ正負ヲ順次ニ記シ亦異號相接スルノ數ヲ記ス然ル後
 チ此兩數ノ差ヲ發見セハ是レ h ト h' トノ間ニ在ル實商ノ數ナリ

論 互除法ニ於テ得ル所ノ除商ヲ順次ニ $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}, Q_n$ ト命スレハ法ト
 商トノ相乘積ニ餘數ヲ加フレハ(反號ノ餘數ハ之ヲ減ス)所得ノ總數實トナ
 ル此ニ由テ左ノ式ヲ作ル

今先ツ前法ヲ証明ススルニ必要ナル上式
ノ定理ヲ左ニ論セントス

第一 任意ナル一數 h ナ以テ $X, X_1, R, R_1, R_2, \dots, R_n$ ノ式中ニ有スル x ニ代用スルキ兩近式偕ニ空數トナラサルヲ論ス

設令ハ X_1 ト R_1 トニ有スル x ニハチ代用スル此兩式偕ニ空數トナルトセ
 $=0$ (A) ノ第二式ヨリ $R_1=0$ ナ得故ニ又第三式ヨリ $R_2=0$ ナ得逐テ此ノ如ク同法ヲ以

第二 R_n の値は依て $X, X_1, R, R_1, R_2, \dots, R_n$ の中一式空數トナラハ其兩隣ナル

設令ハ R_1 ナ空數トセハ $[A]$ ノ第三式ニ由テ $\frac{R_1}{R_2} = 1$ ナ得此ニ由テ R_1 ト R_2 ト

ハ同數異號ナルヲ證明ス

第三 $\frac{1}{n}$ 若シ X ト R_n トノ中間ナル各式ノ實商ヲ過ルモ異號相接スルノ總數増減ナキヲ論ス

今各式ノ w ニ同時ニ代用スル一數 h ヲ漸變數トシ小ヨリ大ニ漸々極少量ヲ以テ増加ストセハ此變化ニ由テムハ各式ノ實商ヲ過ル Γ アリ由テ此時本式ノ値ノ正負號變換ス(第四百八十一條ヲ視ヨ)

又 $R_2=0$ ノ一商ニ甚タ近クシテ未タ及ハサル數ヲ p トシ又此商ヲ過ルト雖ヒ
實ニ此商ニ近切スル一數ヲ q トス且又 p q ハ其間ニ $R_1=0$ ト $R_3=0$ トノ兩式ノ商

ナ有セサルモノトス
 $R_1=0$
 $R_2=0$
 $R_3=0$
 ハ皆等商ナ有セサルカ故ニ此理必スアリ然ル
 キハノ値 p ヨリ q ニ變スルノ間ニ R_2 ナ空數トナスキアリ故ニ此時 R_2 ノ

正負號變換ス然レ R_1 ト R_3 トノ正負此間ニ於テ變セス然ルニ前論ノ理第
二ニ從ヘハナルキ R_1 ト R_3 トハ異號ナルヲ知ル是故ニ $R_2=0$ ナル R_2 及ビ R_4 ニ
ルキ亦此兩式異號ナラサルヲ得ス此ニ由テ R_1 正負號相列スルノ狀 R_3 ニ

R_1, R_2, R_3 此ノ如ク或ハ R_1, R_2, R_3 此ノ如シ故ニ複號ハ任意ニ其一ヲ撰ムモ異號
 相接スルノ數一同號相接スルノ亦數一ナリ若シ R_1, R_2, R_3 此ノ如シ故ニ前ノ如ク異號相接
 スルノ數及ヒ同號相接スルノ數各一ナリ是故ニ漸變數ハ一式設令ハ $R_2 = 0$ ノ
 一商ヲ過ルモ異號相接スルノ數變セス此理各式ニ通スルヲ明ナリ是故ニ
 X_1 ヨリ R_{n-1} ニ至ル各式ノ正負號變換スト雖モ異號相接スルノ總數増減ナキ
 ヲ証明ス

又末次ノ式 R_n ハ X 有セサルカ故ニ R_n ノ值變換スト雖モ R_n ノ正負號ハ一
 定シテ變セス是故ニ各式ナル $x = h, t, h, t$ ナ順次ニ代用スルモ異號相接
 スルノ總數増減アラハ是レ原式 X ノ正負號ノ變化ヨリ生スルモノナルヲ
 明ナリ

今原式 X ノ各商ヲ值ノ順ニ列シテ $a, b, c, \dots, h, t, h, t$ セハ X ノ商ハ最小ナル
 モノ a, t, b, t ノ間ニアリ之ニ次クモノ b, t, c, t ノ間ニアリ逐テ此ノ如シ

第四百八十五條ヲ視ヨシテ X_1 ノ次數ハ X ヨリ一次少シ故ニ X 若シ奇次
 ノ式ナレハ X_1 ハ偶次ノ式ナリ X 若シ偶次ノ式ナレハ X_1 ハ奇次ノ式ナリ今
 h, t, X ノ最小商 a ヨリ小トセハ第四百八十一條第一定理ニ由テ X, t, X_1, t
 ハ異號ナルヲ知ル故ニ X, t, X_1, t ノ間ニ異接アリ今又 h ノ值漸々増加シテ
 a ヲ過ルト雖モ未ダ a ニ近切スルモノトセハ X ハ正負號ヲ變換ス由テ X
 t, X_1, t ノ間ナル正負號消ス今又 h ノ值漸々増加シハ a ニ近切スルトセハ此
 變化間ニ於テ X_1 ノ最小商ヲ過ク故ニ X_1 ノ正負變ス由テ X, t, X_1, t ノ間ナル
 異接復タ生ス然レモ X_1 ノ正負號ノ變化ハ異接ノ總數ニ増減ヲ生セス前論
 第三是故ニ h ノ值 X ノ一商ヲ過ルモ異接ノ數一ヲ減ス次ニ又 h ノ值漸々
 増加シテ竟ニ b ヲ過ルト雖モ未ダ b ニ近切スルモノトセハ X ノ正負號復
 タ變換ス由テ更ニ復タ異接ノ數一ヲ減ス逐テ此ノ如ク同法ニテ h ノ值 X
 ノ一商ヲ過ル毎ニ異接ノ數一ヲ減スルヲ知ルヘシ此ニ由テ前法ヲ證明ス
 第四百八十八條 X, X_1, R_1, R_2, R_3 等ノ各式ナル $x = h, t, h, t$ トナ兩次ニ代用セ

ハ原方程式 $X=0$ ニ有スル實商ノ總數ヲ知ルヘシ此代用法ニ於テ各式ノ正負
ヲ定ルノ法左ノ如シ

未知元 x ノ降幕ノ順ニ各項ヲ排列セシ多項式ニ於テ x ヲ無限大トセハ所
得ノ數ノ正負ハ首項ト同號ナリ

論 先ツ多項式ヲ $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + Ex^{m-4} + \dots$ トセハ $x=\infty$ ナル時

$A > \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \frac{E}{x^4} + \dots$ (一)ナリ其故何トナレハ此不等式ノ後節ナル各項

ハ何レモ空數ニ近キカ故ナリ今此(一)式ノ兩節ニ x^m ヲ乘スレハ左ノ如シ

$$Ax^m > Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + Ex^{m-4} + \dots \quad (二)$$

是故ニ若シ無限大ナレハ所設ノ多項式ノ首項ハ他ノ諸項ノ總數ヨリ大ナ
リ此ニ由テ全式ノ正負ハ首項ト同號ナルヲ證明ス

斯土莫氏之法問題

斯土莫氏之法ヲ行フニ臨テ $X_1 R_1 R_2$ 等ノ式中通乘數アルモノハ之ヲ去ルモ

可ナリ是レ通乘數ヲ去ルモ各式ノ正負號ヲ定ルノ法ヲ害セサルカ故ナリ

第一 $x^3 - 3x^2 - 12x + 24 = 0$ 上ノ方程式ノ實商ノ數及ヒ其位如何

$$X = x^3 - 3x^2 - 12x + 24,$$

$$X_1 = x^3 - 2x - 4,$$

$$R = x - 2,$$

$$R_1 = 1$$

右各式ノ $x = \infty$ トナテ兩式ニ代用セハ正負號相接スルノ狀左ノ

如シ

$$X \quad X_1 \quad R \quad R_1$$

$$\begin{array}{cccc} \infty & \infty & \infty & \infty \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{array}$$

數之變異

是故ニ所設ノ方程式ニ實商三箇アルヲ知ル

所設ノ方程式ニ異接二所同接一所ナリ故ニ正ノ實商二箇負ノ實商
一箇ナルヲ知ル(第四百六十條ヲ視ヨ)

今又正商ノ位ヲ知ランカタメ前ノ各式ノ x ヲ順次ニ0 1 2等トシ
テ得數ノ正負號ヲ記シテ異接ノ數ヲ算フ

異接之總數

$x=0$ 2
 $x=1$ 2
 $x=2$ 1
 $x=3$ 1
 $x=4$ 1
 $x=5$ 0

$x=1$ ヨリ
 $x=2$ ニ變スルキ異接ノ數一ヲ失ヒ又
 $x=4$ ヨリ
 $x=5$ ニ變スルキ異接ノ數一ヲ失フ是故ニ一商ハ一ト二

トノ間ニ在リ他ノ一商ハ四ト五トノ間ニ在ルヲ知
ル

$x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$, $x=5$,
今又負商ノ位ヲ知ランカタメ前ノ各式ノ x ヲ順次ニ0 -1 -2等トシ

テ得數ノ正負號ヲ記シテ異接ノ數ヲ算フ

異接之總數

$x=0$ 2
 $x=1$ 2
 $x=2$ 2
 $x=3$ 2
 $x=4$ 3

第二 何

$x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$,
 $x=-1$, $x=-2$, $x=-3$, $x=-4$,

此ニ由テ負商ハ三ト四トノ間ニ在ルヲ知ル是故ニ
各商ノ首位1 4 -3ナルヲ知ル

上ノ方程式ノ實商ノ總數及ヒ其位如

$$\begin{aligned} X &= x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 10x + 10, \\ X_1 &= 2x^3 - 3x^2 - 7x + 5, \\ R &= 17x^2 - 23x - 45, \\ R_1 &= 152x - 305, \\ R_2 &= 524785. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -\infty, + - + - +, 4 \\ x &= +\infty, + + + + +, 0 \end{aligned}$$

異接之總數

是故ニ四商皆實數ナルヲ知ル而シテ所
設ノ方程式ニ異接二所同接亦二所アリ
由テ正商二箇負商亦二箇ナルヲ知ル

異接之總數

$x=0$	+	+	+	+	+	2
$x=1$	+	+	+	+	+	2
$x=2$	+	+	+	+	+	2
$x=3$	+	+	+	+	+	0
$x=-1$	+	+	+	+	+	3
$x=-2$	+	+	+	+	+	3
$x=-3$	+	+	+	+	+	4

此ニ由テ正商ハ二ト三トノ間ニ兩商アリ又負商ハ空ト一トノ間ニ一商アリ二ト三トノ間ニ一商アルヲ知ル

今又二ト三トノ間ナル兩正商ノ限界ヲ分タンカタメ第四百五十五條ノ法ニテ所設ノ方程式ノ各商ヨリ二箇ヲ減シテ變式ヲ作ル

$$\text{是故ニ變式 } V=y^4+6y^3+5y^2-10y+2=0.$$

ナリ

原式 $1-2-7+10+10 \quad | \quad 2$
 $+2 \quad 0-14-8$
 $0-7-4, \quad 2=X'_1$
 $2+4,-6$
 $2-3,-10=X'_1$
 $2+8 \quad X'_2$
 $4,+5=\frac{X'_2}{2}$
 $\frac{2}{6}=\frac{X'_3}{2.3}$
 スル商ハ空數ト一トノ間ニテ發見スヘシ此兩商ノ位チV式ヨリ定

ムルノ法左ノ如シ

$$y=0, .1, .2, .3, .4, .5, .6, .7, .8$$

數換替

此ニ由テ一商ハ2ト3トノ間ニアリ他ノ一商ハ7ト8トノ間ニアルヲ知ル是故ニ原式ノ正商ノ首位 2.2 2.7 ナルヲ知ル

若シV式ノ兩正商ノ首位亦同一ナルヲ發見シ得ハ此V式ノ各商ヨリ兩商ノ第二位ヲ減シテ變式ヲ作り再ヒ前法ヲ施スヘシ

忽拿氏解法

第四百八十九條 各次數字方程式ヲ顯ス公式ヲ左ノ如ク命ス

$$X=u^m+Av^{m-1}+Bv^{m-2}+\dots+Tv+U=0 \quad [1]$$

此式ノ一實商ノ首位ヲケトシ此方程式ノ各商ヨリケテ減シテ變式ヲ作ル即チ $u^{m-1}+Bv^{m-2}+\dots+T$ シテ變式ヲ作ルキハ所得ノ變式左ノ如シ

$V=y^m+Ay^{m-1}+By^{m-2}+\dots+Ty+U=0$ [1] 此變式ノ y ハ小數ヲ顯スモノト視做スヲ得其故何トナレハ y ハ設令ヒ最小ナルモ一商ノ整數分ヲ顯スカ故ナリ此ニ由テ y ノ高冪ヲ帶ル諸項ハ其值小ナリ故ニ之ヲ棄ルルハ $Ty+U=0$ 即チ $y=-\frac{U}{T}$ ヲ得此除商ノ首位ヲ s トシ $y=s+\frac{r}{T}$ トシテ[2]式ノ各商ヨリ s ヲ減シテ變式ヲ作ルルハ左ノ如シ、

$$V'=z^m+A'z^{m-1}+B'z^{m-2}+\dots+T'z+U'=0 \quad [3]$$

又前ノ如ク $z=-\frac{U'}{T'}$ トシテ變式ヲ作ル逐テ此ノ如ク同法ヲ施スルハ竟ニ $z=s+\frac{r}{T}+\frac{r'}{T'}+\dots$ ヲ得ルナリ

此ニ由テ各次數方程式ヲ解シテ實商ノ略近ノ值ヲ求メント欲セハ先ツ實商ノ數及ヒ各實商ノ首位ヲ發見シ然ル後チ左ノ法則ニ從フヘシ、

法則一 所設ノ方程式ノ各商ヨリ已知ノ首位一位或ハ兩三位ヲ減シテ變式ヲ作ル

法則二 尾次ノ項ノ段數ヲ以テ實項ヲ除シ所得ノ除商ノ首位ヲ以テ商ノ次位トス

法則三 前所得ノ變式ノ各商ヨリ己ニ發見シ得タル次位ノ數ヲ減シテ又變式ヲ作ルヘシ逐テ此ノ如ク同法ヲ施サハ實商ノ略近ノ值ヲ得

備考一 疊次變換法ヲ斂合シテ一次ノ運算トナスヲ得ヘシ然ルルハ每次所得ノ新段數ニ其次號ヲ記スルヲ便トス

備考二 除法ニテ算シ得タル商ノ次位若シ實項 X' ト尾次ノ項 X トチ同號トナスルハ次位ノ數未タ可ナラス然ルルハ必ス之ヲ改正スヘシ

備考三 負ノ實商ノ略近ノ值ヲ求ルノ法ハ方程式ノ列項ノ正負ヲ隔次ニ變換シテ所得ノ變式ノ正商ノ略近ノ值ヲ求メ之ニ負號ヲ配附スヘシ

備考四 若シ尾次ノ項ノ段數 T' 空數トナルコアラハ其前次ノ項ノ段數 S ヲ以テ實項 T' ヲ除シ所得ノ商ヲ平方ニ開テ商ノ次位トナスヲ得其故何トナレハ T' 若シ空數ナレハ $Sy^2+U'=0$ ヲ得此ニ由テ $y=\sqrt{-\frac{U'}{S}}$ ト

ナルカ故ナリ

忽拿氏解法問題

第一

$$x^3 - 2x^2 - 20x - 40 = 0 \quad \text{上ノ方程式ノ實商ノ略近ノ値如何}$$

解法 斯土莫氏之法ニ由テ所設ノ方程式ニ實商一箇アツテ其首位

六ナルヲ知ル今此實商ヲ小數以下二位迄求ル算草左ノ如シ

1-2	-20	-40	6.23
6	24	24	
+4	+4	(1)-16	
6	60	13.448	
10	(1) 64	(2) -2.552	
6	3.24		
(1) 16	67.24		
0.2	3.28		
16.2	(2) 70.52		
.2			
16.4			
.2			
(2) 16.6			

答 16.23

運算之解

先ツ所設ノ方程式ノ各商ヨリ六ヲ減シテ變式ヲ作ルヘシ其法第四百五十五條ニ示ス所ニ從フ而シテ所得ノ新變式ノ各項ノ段數 16 64 16 ナリ之ヲ第一次變式ノ諸段數トシ之ニ符號(1)ヲ配附ス次ニ實項 16 ノ正負ヲ變換シ之ヲ尾次ノ項ノ段數 64 ニテ除シ所得ノ除商 2.5 商ノ次位トシ第一次變式ノ各商ヨリ 2.5 減シテ新ニ變式ヲ作ルヘシ所得ノ新變式ヲ第二次變式トシ其各項ノ段數ニ符號(2)ヲ配附ス又第三次ニ 10.23 ヲ以テ 67.24 ヲ除シテ商 0.3 ヲ得之ヲ商ノ第三位トス逐テ此ノ如ク同法ヲ施スハ漸々眞商ニ近ツクナリ

第二

$$x^4 + x^3 - 30x^2 + 20x - 20 = 0 \quad \text{上ノ方程式ノ實商ノ略近ノ値如何}$$

解法 斯土莫氏之法ニ由テ此方程式ニ兩實商アルヲ知ル而シテ兩實商ノ首位 5 ト 5 トナルヲ知ル今此方程式ノ列項ノ正負ヲ隔次ニ變換シテ負商ノ末位ヲ小數以下六位迄求ル算草左ノ如シ

行 三 第	行 二 第	行 一 第
—30	+20	— 20 5·731574
20	—50	—150
—10	—30 (1)	—170·0000
45	175	159·7071
+35	(1) +145·000 (2)	—10·2929
70	83·153	9·7727
(1) 105·00	228·153 (3)	—5202
13·79	93·149	·3304
118·79 (2)	321·302 (4)	—1898
14·28	4·455	·1653
133·07	325·757 (5)	—245
14·77	4·474	232
(2) 147·84 (3)	330·23 (6)	—13
·65	·15	13
148·49	330·38	0
·65	·15	
149·14 (4)	330·5	
·65	·1	
(3) 150	330·6	
	·1	
(4) 2	331	
	33	

行 四 第
—1
5
+4
5
9
5
14
5
(1) 19·0
0·7
19·7
·7
20·4
·7
21·1
·7
(2) 21·8

1 答 — 5·731574

運算之解 第二次變式各項ノ段數ノ符號(2)ヲ帶ル諸數ヲ得ル迄總
テ前題ニ同シ然ル後チ 321·302 ヲ以テ 10·2929 ヲ除シ 03 ヲ得之ヲ商
ノ第三位トナス

茲ニ於テ第二百十四條ニ示ス所ノ開立方略法ノ理ニ由テ末位ヲ省
去ス但シ各行ノ數皆首位一位ヲ有スト知ルヘシ

第四行ヨリ略法ヲ首ム 21·8 × 03 = 65 ヲ以テ第三行ニ加ヘ 148·49
ヲ得之ニ 03 ヲ乘シテ 4455 ヲ得之ヲ第二行ニ加ヘテ 325·757 ヲ得
然ル後チ 325·757 × 03 = 9·7727 ヲ第一行ニ加ヘテ 1·5202 ヲ得又第
三行ニ 65 ヲ加ヘテ 149·14 ヲ得又 149·14 × 03 = 4·474 ヲ第二行ニ加

へテ 33023ヲ得但シ末ノ一位ヲ去ルナリ又 65ヲ第三行ニ加へテ末
ノ二位ヲ去ルキハ 150ヲ得逐テ此ノ如シ

備考 商一位ヲ得ル毎ニ各行ノ數ノ末位ヲ斂ルノ法左ノ如シ

第一行ハ去ラス第二行ハ一位ヲ去ル第三行ハ二位ヲ去ル第四行ハ
三位ヲ去ル逐テ此ノ如シ

左ノ方程式ノ各實商ノ零近ノ値ヲ小數以下十位迄算スレハ如何

$$\text{第三} \quad x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0. \quad \text{第四} \quad x^3 - x^2 + 70x - 300 = 0.$$

$$\text{第五} \quad x^3 + x^2 - 500 = 0. \quad \text{第六} \quad x^3 - x^2 - 40x + 108 = 0.$$

$$\text{第七} \quad x^3 - 4x^2 - 24x + 48 = 0. \quad \text{第八} \quad x^4 + x^3 + x^2 - x - 500 = 0.$$

$$\text{第九} \quad x^4 - 9x^3 - 11x^2 - 20x + 4 = 0. \quad \text{第十} \quad x^4 - 12x^3 + 12x - 3 = 0.$$

$$\text{第十一} \quad x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0.$$

雜問八

第一 $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$ 上ノ方程式ノ三商ノ立方ノ和如何

第二 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 上ノ方程式ニ於テ a 若シ $3b$ ヨリ小ナレハ第三項
ヲ消去シテ變式ヲ作ルキ所得ノ式虛數ナル段數ヲ有ス此證ヲ問フ

第三 $x^3 + ax^2 + bx^2 + cx + d = 0$ 上ノ方程式ニ於テ諸段數互ニ相關係スルノ
理 $8c = a(4b - c^2)$ 此ノ如クナレハ第二項ト第四項トヲ偕ニ消去スルコトヲ
得此證ヲ問フ

第四 n 次一元方程式ノ第二項ト第三項トヲ偕ニ消去スルコトヲ得ハ各商
ノ和ノ平方ハ各商ノ平方ノ和 n 倍ニ等シ此證ヲ問フ

第五 $x^3 + ax^2 + b = 0$ 上ノ方程式ニ兩等商兩種アラハ此兩種ノ等商各如
何

第六 $x^3 + ax^2 + bx^2 + c = 0$ 上ノ方程式ニ兩等商アラハ其一必ス左ノ方程式
ノ一商ナリ此證ヲ問フ

$$x^2 - \frac{2a^2}{3b}x + \frac{5c}{3b} - \frac{4a}{15} = 0$$

第七 直堡塙アリ體積六立方尺六面ノ總積二十二平方尺十二刃ノ總長二十四尺ナリト云フ由テ問フ長闊高各如何

第八 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 上ノ方程式ノ三商同比級數ヲナスキハ諸段數互ニ相關係スルノ理 $xy^2 = q^2$ 此ノ如シ此證ヲ問フ

第九 三位ノ數アリ其幾何ナルヲ知ラス唯其三數字ノ和十二ニシテ三數字ノ連乘積六十ナルヲ知リ又本數ニ一百九十八ヲ加フレハ數字ノ排列轉倒スルヲ知レリト云フ由テ問フ此本數如何

第十 酒商アリ上中下三種ノ酒合セテ一十九樽ヲ一百十八圓ニテ買ヘリト云フ他人其價ヲ問ヘハ答テ上酒一樽ノ價ノ圓數ハ下酒ノ樽數ニ等シク中酒一樽價ノ圓數ハ上酒ノ樽數ニ等シク下酒一樽ノ價ノ圓數ハ中酒ノ樽數ニ等シク若シ三種ノ酒ヲ各六十圓ツ、買ハ、總數二十九樽半ヲ得ヘシト云フ由テ問フ三種ノ酒各一樽ノ價如何

第十一 東西兩府ヨリ同時ニ使者ヲ出スアリ東使ハ西府ニ向テ行キ西使ハ東府ニ向テ行クナリ然レモ東使ノ步行ハ西使ヨリ毎時一里速シ今兩使途上ニ於テ相逢フキ發足後ノ時間ヲ算スレハ東使毎時ノ歩行里數ニ等シキヲ知レリト云フ然ル後チ又別レテ兩使各先府ニ到リ滞在スルコト同時間ヲ經テ各本府ニ歸ラントシテ西府ヲ距ルコト三十里ノ地ニテ復タ相逢ヘリト云フ由テ問フ東西兩府ノ距離如何

第十二 正七角形ノ一邊一寸ナレハ對角線ノ尺寸各如何

第十三 銀行アリ母金一千圓ヲ三年間放出ス先ツ債主ニ約シテ曰ク毎年利子ヲ精算シテ母金ニ添入シ毎年利率一割ヲ増スヘシト乃チ還期ニ及テ總計一千七百十六圓ヲ收ムト云フ由テ問フ年々ノ利率各如何

第十四 米麥黍ノ三穀アリ米一石麥一石二斗合セテ價二十圓ナリ又米四斗黍九斗合セテ價十圓ナリト云フ又一圓ニ相當スル三穀ノ量ヲ合スレハ三斗七升ナリト云フ由テ問フ三穀各一圓ニ相當スル量幾何

代數學諸法雜問

第一問ヨリ第一百問ニ至ルマテハ第一篇ノ法ヲ以テ解スヘキ題ナリ第一
百一問以下総テ第二篇ニ載スル諸法ノ雜問ナリ

第一 $x - (2y + \{3z - 3x - (x + y)\} + 2x - (y + 3z))$ 上式ヲ最簡式ニ化スヘシ

第二 $a^2x^2 + (2ac - b^2)x^1 + c^2 + ax^1 - bx^2 + c$ ニテ除スレハ所得ノ商如何

第三 $3x^2 - (4a + 2b)x + 2ab + a^2, x^3 - (2a + b)x^2 + (2ab + a^2)x - a^2b$ 上兩式ノ最大公約

數ヲ問フ

第四 $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}$ 上式ヲ最簡式ニ化スヘシ

第五 $x^4 + 2x^2 - a + \frac{1}{4}$ 上式ノ平方根ヲ問フ

第六 九時ト十時トノ間ニテ時辰儀ノ兩針相合スルキアリ此分秒ヲ問フ

第七 甲乙兩工アリ初メ甲一人ニテ三十日間作工シテ一事ノ五分之三ヲ
治ノ得ルノ後チ乙來テ甲ヲ助ケ兩工俱ニ十日間作工シテ工事落成セリ
ト云フ由テ問フ各一人ニテ治ムルキハ幾日ニテ落成スヘキヤ

第八 $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x^2z - 6yz + z^2$ 上式ノ平方根ヲ問フ

第九 $a(a-x)(a-2x) = (a-b)(a-b-x)(a+2b-2x) + b(b-x)(3a-2b-2x)$ 上式ノ證

ヲ問フ

第十 $\left(x + \frac{xy}{x-y}\right) \times \left(x - \frac{xy}{x+y}\right) + \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ 上式ヲ最簡式ニ化スヘシ

第十一 $(a+x)(b+x) = x^2 + a(b+c) + \frac{a^2c}{b}$ 上ノ方程式ヨリ x ノ値ヲ發見ス

ヘシ

第十二 $\frac{3}{7}\left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{5}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ 上ノ方程式ヨリ x ノ

値ヲ發見スヘシ

第十三 $axy = c(bx + ay), bxy = c(ax - by)$ 上ノ兩式ノ狀勢ニ合フヘキ x ノ値

ヲ問フ

第十四 $a^2 + 2b^2 + (a+2b)\sqrt{ab}, a^2 - b^2 + (a-b)\sqrt{ab}$ 上兩式ノ最大公約數ヲ問

フ

第十五 $5x-11/y+13z=22, 4x+6/y+5z=31, x-1/y+z=2$ 上ノ三式ノ狀

勢ニ合フヘキ $x/y/z$ ノ値ヲ問フ

第十六 $x^{-2}y^{-1}z=1/2, x^{-1}y^2z=18, xy^2z=108$ 上ノ三式ノ狀勢ニ合フヘキ $x/y/z$ ノ値ヲ問フ

第十七 兩商 $17\frac{2}{3}$ ナ有スル二次方程式ヲ問フ

第十八 ax^2+bx+c x ノ値ヲ $\pm 3, \pm 2, \pm 1$ トセハ上ノ三項式ノ値順次ニ $42, 22$

8 ナ得ルト云フ由テ問フ a, b, c ノ値如何

第十九 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ ニ於テ x ノ値正數ナルキハ其大小ヲ論セス此式ノ値二箇ヨ

リ小ナラス此證ヲ問フ

第二十 $2((x-a)(x-b)+(a-x)(a-b)+(b-x)(b-a))=((a-b)^2+(x-a)^2+(x-b)^2)$ 上ノ

兩同式ヲ證明スヘシ

第二十一 $s+y+z=\frac{14}{3}, x=\frac{7}{2}y$ ナレハ $\frac{1}{z}(x+y+z)$ ノ値如何

第二十二 $a^2+y^2=123z, x^2-y^2=27z$ ナレハ xy/z ノ値如何

第二十三 $\frac{(x^{p+2q})^2(x^{q+2})^2(x^{p+2q})^2}{(x^p x^q x^p)^2}$ 上式ヲ最簡式ニ化スヘシ

第二十四 $2(a-2b-\frac{2}{3}(a-x)+x)-\frac{1}{3}((a-x)-(x-c)+b-c)$ 上式ヲ最簡式ニ化スヘシ

第二十五 $\left(\frac{p+1}{q}\right)^2 \times \frac{p^3-1}{q^3-1} \div \frac{p^3+1}{q^3+1}$ 上式ヲ最簡式ニ化スヘシ

第二十六 $\frac{1}{(1-\frac{c}{a})(1-\frac{b}{a})} + \frac{1}{(1-\frac{a}{b})(1-\frac{c}{b})} + \frac{1}{(1-\frac{b}{c})(1-\frac{a}{c})}$ 上式ヲ最簡式ニ化スヘシ

ニ化スヘシ

第二十七 豪農家アリ東西兩倉ニ米若干ヲ貯藏ス或人其多寡ヲ問ヘハ東倉ニ藏ル所ノ量ハ西倉ニ藏ル所ノ量ニ幾倍ス然レモ若シ東倉ノ米三分之一ヲ西倉ニ移スルハ西倉ニ藏ル所ノ量却テ東倉ニ殘ル所ノ量ヨリ多

シト答フ由テ問フ東倉ニ藏ル所ノ量ハ西倉ニ藏ル所ノ量ノ幾倍ニ相當スルヤ

第二十八 $a+b+c=0$ ナルハ $a\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$ ナリ此

證ヲ問フ

第二十九 x^2+px+1, x^2+x+p 上ノ兩式ニ通乘子アラハ p ノ値如何但シ

p ノ値一箇ニアラストナス

第三十 $a-c+2\sqrt{(ab+bc-ca-b^2)}$ 上式ノ平方根ヲ問フ

第三十一 $x=\frac{3}{3}$ 上ノ方程式ヨリ x ノ値ヲ發見スヘシ

$$4-\frac{3}{4-x}$$

第三十二 $(a+b+c)(x+y+z)+(a+b-c)(x+y-z)+(b+c-a)(y+z-x)+(c+a-b)$

$(x+y-z)$ 上式ヲ最簡式ニ化スヘシ

第三十三 $x=\frac{1}{2}(a+b+c)$ トセハ左ノ式ヲ得此證ヲ問フ

$$\{(s-a)(s-b)\}^2=(s-a)^2(s-b)^2+3(s-a)(s-b)^2.$$

第三十四 酒商アリ升價三十錢ノ品八十升ヲ所藏シ之ニ清水ヲ混シ升價二十四錢ニ賣テ一割ノ利ヲ得ント欲ス由テ問フ清水幾何ヲ加ヘテ可ナランヤ

第三十五 工夫三人アリ俱ニ一事ヲ治メントス若シ甲乙兩工俱ニ作工セハ十二日ニテ落成シ甲丙兩工俱ニ作工セハ十五日ニテ落成シ乙丙兩工俱ニ作工セハ二十日ニテ落成スヘジト云フ由テ問フ三工俱ニ作工セハ幾日ニテ落成スヘキヤ

第三十六 $\frac{(x+a)(x+mb)}{(x-ma)(x-b)}=\frac{(mx+a)(x+b)}{(x-a)(mx-b)}$ 上ノ方程式ヨリ x ノ値ヲ發見ス

第三十七 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}-2\right)^2+\frac{x}{a}-\frac{a}{x}$ ニテ除スレハ所得ノ商如何

第三十八 $\frac{x-2a}{x-3a}+\frac{y-4b}{y-3b}=\frac{x+2a}{x+a}=\frac{y+5b}{y+3b}$ 上ノ兩式ノ狀勢ニ合フヘキ

x, y の値ヲ問フ

第三十九 $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$ 上式ノ證ヲ問フ

第四十 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \frac{(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})}{(\sqrt{a+\sqrt{x}})(\sqrt{a-\sqrt{x}})}$ 上式ヲ最簡式ニ化スヘシ

第四十一 $\frac{a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{a+\sqrt{x}} + \sqrt{a-\sqrt{x}}}{\sqrt{a-\sqrt{x}}} + 4\sqrt{ax} \times \frac{\sqrt{(ax)+1}}{a-x}$ 上式ヲ最簡式ニ化スヘシ

第四十二 $(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) = 1 \times 2 \times 3 \times 4$ 上ノ方程式ヨリ x ノ値ヲ發見スヘシ

第四十三 $x^3 + 3x = a^3 - \frac{1}{a^3}$ 上ノ方程式ヨリ x ノ値ヲ發見スヘシ

第四十四 $x^3 + px + q, x^3 + p'x + q'$ 上ノ兩式ノ最大公約數若シ $x + a$ ナレハ a ハ

$\frac{q-q'}{p-p'} =$ 等シ此證ヲ問フ

第四十五 $x^2 + qx + 1, x^3 + px^2 + qx + 1$ 上ノ兩式若シ $x =$ 就テ一次式ナル

通乘子ヲ有スルキハ $(p-1)^2 - q(p-1) + 1 = 0$ ナリ此證ヲ問フ

第四十六 $x^3 + ax + b, x^3 + cx + d$ 上ノ兩式ノ最大公約數若シ $x + c$ ナレハ前

兩式ノ最小公倍數ハ $x^3 + (a+c-d)x^2 + (ad-c^2)x + (a-c)(d-c)c$ ナリ此證ヲ問フ

第四十七 凡ソ兩分數合シテ $\frac{p}{q}$ ナルキ同シ兩分數ノ差ノ p 倍ハ此兩分數ノ平方ノ差 q 倍ニ等シ其證ヲ問フ

第四十八 $x = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2a+b}{2a-b}}$ ナレハ $\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} (\sqrt{x} + \sqrt{a})$ ノ値如何

第四十九 兩府相距ルヲ七里半ニシテ途ニ嶮道アリ平路アリ脚夫之ヲ往來スルニ發足ノ後チ二時十七分半ヲ歷テ先府ニ著シ又二時二十分ニテ本府ニ歸著セリト云フ但シ平地ハ毎時三里四分里之一ヲ行キ嶮道ハ上ルキ毎時三里ヲ行キ下ルキ毎時三里半ヲ行クナリ由テ問フ平路ノ行程幾何

第五十 $8x^2 - 12x^3 + 6x^4 - 37x^5 + 36x^6 - 9x^7 + 54x^8 - 27x^9 - 27$ 上式ノ立方根

ヲ問フ

第五十一 $\sqrt{x-1}/a + \sqrt{(x+a-b)} = \sqrt{b}$ 上ノ方程式ヨリ x ノ値ヲ發見スヘシ

第五十二 $5x^2 - 19x^3 + 55x^4 - 42x^5, 4x^3 - 15x^4 - 38x^5 + 65$ 上兩式ノ最大公約數

ヲ問フ

第五十三 $x(y+z)^2 + y(x+z)^2 + z(x+y)^2 - 4xyz = (x+y)(y+z)(z+x)$ 上式ノ證ヲ

問フ

第五十四 $2\{(y-z)^2(x-z)^2 + (z-x)^2(x-y)^2 + (x-y)^2(y-z)^2\} =$

$2\{x^2+y^2+z^2-xy-zx-yz-x^2y^2-x^2z^2-x^2yz\}$ 上式ノ證ヲ問フ

第五十五 $\frac{bc(x-a)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac(x-b)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab(x-c)^2}{(c-a)(c-b)}$ 上式ヲ最簡式ニ化ス

ヘシ

第五十六 $ax+cy+bz=ca+by+az=ba+cz=c^2+b^2+a^2-3abc$ 上式ノ狀勢ニ合

フヘキ x, y, z ノ値ヲ問フ

ツ

第五十七 $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2\right\} \sqrt{(-1)}^2$ 上式ヲ最簡式ニ化スヘシ

第五十八 $\left(\frac{1}{1/2} + \frac{1}{1/2}\right)^2$ 上式ヲ最簡式ニ化スヘシ

第五十九 一數アリ其幾何ナルヲ知ラス唯本數ヲ n 分シテ所得ノ各分ノ連乘積ヲ求ムレハ本數ヲ $n+1$ 分シテ所得ノ各分ヲ連乘セシ乘積ノ n 倍ヲ得ヘキヲ知レリト云フ由テ問フ本數幾何

第六十 農家アリ農夫ヲ傭テ耕作セシムルニ上農ハ a 人ニテ n 日間ニ m 畝ヲ耕シ下農ハ b 人ニテ n 日間ニ m 畝ヲ耕スト云フ今 m 畝ノ地ヲ $n-p$ 日間ニ耕サントシテ上農 $a-p$ 人ヲ得タリ由テ問フ下農幾人ヲ傭ヒ之ヲ助耕セシメテ可ナランヤ

第六十一 $ab - \frac{1}{2}(a+b)(p+q) + pq = 0, cd - \frac{1}{2}(c+d)(p+q) + pq = 0, a, b$

c, d, p, q 相關係スルノ狀勢上ノ如クナレハ左ノ式ヲ得ヘシ此作法ヲ問フ

$$\left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = \frac{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}{(a+b-c-d)^2}.$$

第六十二 $ax^2+bx+c=0, dx^2+bx+c=0$. 上ノ兩方程式若シ一商ヲ同フセハ已知數 $a' b' c'$ ノ關係ヲ顯ス方程式如何

第六十三 $ax+by=c, dx+by=c', dx+by=c''$. 上ノ三式ニ於テ $x y z$ ノ値皆同ケレハ已知數ノ關係ヲ顯ス式如何

第六十四 $a+b+c=p, ab+bc+ca=q, abc=r$. 上ノ三式ヨリ $b c$ ヲ消去セハ如何

第六十五 $ax+by+ca=da+by+ca=dx+by+ca=1$. 上ノ方程式ヲ分テ作ル所ノ三方程式ノ中チ一式ハ他ノ式ヨリ變化シテ得ルモノトセハ各已知數ノ關係如何又此時ニ於テ $x y z$ ノ値皆 $0/0$ トナルヲ證明スヘシ

第六十六 若シ $ax^3+by^3+cz^3=1, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ ナレハ $ax^2+by^2+cz^2$ ノ値如何

第六十七

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{x}{b}\right)^m + \left(\frac{x}{c}\right)^m = 1 = \left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{x}{b}\right)^n + \left(\frac{x}{c}\right)^n, \frac{x^{2m}}{a^m+b^m+c^m} = \frac{x^{2n}}{a^n+b^n+c^n} \quad \text{上ノ}$$

方程式ヨリ $a b c$ ヲ消去セハ如何

第六十八 甲乙丙ノ三馬一擲ヲ競走スルアリ擲長二千六百四十尺トス乙馬總長三分之一ヲ進ムル乙馬最モ前ニアリ丙馬之ニ次キ甲馬最モ後ニアリ但シ甲乙兩馬ノ距離ハ乙丙兩馬ノ距離ニ三倍ス而シテ三馬俱ニ變セサル速力ニテ疾走シ乙馬勝標ニ近クシ總長六分之一トナルル甲馬ノ乙馬ヨリ後ル、尺度ハ前ニ云ヘル甲乙兩馬ノ距離十一分之一ニ等シク又丙馬ノ甲馬ヨリ後ル、尺度ニ等シト云フ玆ニ於テ丙馬ハ其速力五十分之一ヲ増シ甲乙兩馬ハ猶ホ前ノ速力ニテ進ム而シテ兩馬勝標ヲ去ルコト百七十六尺ノ所ニテ乙馬ヲ越タリト云フ由テ問フ此競走了ルル甲丙兩馬ノ距離如何

第六十九

$$\frac{1}{(a+b)^2-b^2} + \frac{1}{(a+b)^2-c^2} = \frac{1}{a^2-(a+b)^2} + \frac{1}{a^2-(a-b)^2} \quad \text{上ノ方程式ヨリ}$$

ノ値ヲ發見スヘシ

第七十 若シ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = \frac{2}{c} s$ 此ノ如クナレハ左ノ式ヲ得
此作法ヲ問フ

$$(s-a_1)^2 + (s-a_2)^2 + (s-a_3)^2 + \dots + (s-a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$$

第七十一

$$\frac{d^m(a-b)(b-c) + b^m(a-d)(c-d)}{c^m(a-b)(a-d) + d^m(b-c)(c-d)}$$

若シ 1 或ハ 2 ナレハ上式變

$$\frac{b-d}{a-c} \quad \text{トナル此証ヲ問フ}$$

第七十二 $xyz + yz + zx = 1$ 此ノ如クナレハ左ノ式ヲ得ヘシ此作法ヲ問フ

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} = \frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

第七十三

$$x+y+z=a+b+c, \quad bx+cy+az=cx+ay+bz=ab+ac+bc$$

上ノ三式ニ合

フヘキ x, y, z ノ値ヲ問フ

第七十四 兩府相距ルヲ若干里其數偶數ナリ其途每里里標石アリ今二人

偕ニ一府ヲ出テ共ニ一馬ヲ備ヒ每里交互ニ乗テ二時六十三分時之六十
ニニテ先府ニ到ラントス先ツ約シ曰ク乘馬ノ人里標石ニ逢ハゞ下馬シ
テ馬ヲ玆ニ繫テ直ニ先府ニ向テ進ミ步行ノ人里標石ニ逢ハゞ前者ノ繫
ク所ノ馬ヲ解テ之ニ乗テ進ムヘシト乃チ乙先ツ乘行スルニ第七ノ里標
石ニ到テ二人會合ス但シ乘行ハ乙ノ步行ヨリ二倍速シ茲ニ創テ步行ノ速
キヲ覺リ各每時半里ヲ増シテ行カントス由テ今回ハ乘行甲ノ步行ヨリ
二倍速シト云フ而シテ今回又乙先ツ乘行シ豫定時ノ末ニ於テ二人偕ニ先
府ニ達セリト云フ由テ問フ兩府ノ距離及ヒ二人各每時步行ノ里數如何

第七十五 馬 a 頭ナリ畝ノ牧場ニ放飼セハ m 週ニテ生草全ク竭キヌヘシ
若シ馬 c 頭ナリ d 畝ノ牧場ニ放飼セハ n 週ニテ生草全ク竭キヌヘシト云
フ但シ草ハ絶ヘス一齊ノ力ヲ以テ生スルモノトス由テ問フ c 畝ノ牧場
ニテ p 週開放飼スヘキ馬ノ數如何

第七十六 n 位ノ數ノ平方根 $\sqrt[n]{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-1)^n}$ 位ヲ有ス此證ヲ問フ

第七十七 $28 \parallel a+b+c$ ナルハ $\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} = \frac{1}{s} \frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ナ得

此證如何

第七十八 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^{2n+1} = \frac{1}{a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}}$ ナ得

此證如何

第七十九 $\frac{1}{x+6a} - \frac{2}{x-3a} + \frac{3}{x+2a} = \frac{6}{x+a}$ 上式ヨリ x ノ値ヲ發見スヘシ

第八十 $x+b+c=0$ ナルハ $\frac{a^2}{2c^2+6a} + \frac{b^2}{2b^2+ca} + \frac{c^2}{2c^2+ab} - 1=0$ ナリ此

證ヲ問フ

第八十一 $\frac{x^2 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + b^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + c^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}{a \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + b \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) + c \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} = a+b+c$ 上式ノ證ヲ問フ

第八十二 $x \parallel by+cz+du, y \parallel ax+cz+du, z \parallel ax+by+du, u \parallel ax+by+cz$ ナレハ

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d}} \quad \text{ナリ此證ヲ問フ}$$

第八十三 $a(px^2+qx+s)^2+b(px^2+qx+s)+c=0$ 上ノ方程式ノ四商ノ和

ヲ問フ

第八十四 $x-y, (x-y)^2$ 上ノ兩式ニ於テ $s \sqrt{y}$ ナルキハ何レノ式

大ナルヤ

第八十五 $(20 + \sqrt{(392)})^3 + (20 - \sqrt{(392)})^3$ 上式ヲ變化セハ4トナル此化

法如何

第八十六 $(s + y \sqrt{-1})^2 = a + b \sqrt{-1}$ 上式ニ於テ a, b 實數ナレハ x, y ノ

實數ナル値如何

第八十七 $x^n - nax^{n-1}x + (n-1)a^2x^n$ ハ必ス $(x-a)^2$ ナ以テ約ス1ヲ得ヘシ此証

如何

第八十八 $s^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$ 若シ $r^2 = p^2s, q = \frac{1}{4}p^2 + 2\sqrt{s}$ ナレハ上式ハ

自乗數ニ適セリ此証如何

第八十九 若シ $z = \frac{1}{4} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right), y = \frac{ax-b}{a-bx}$ ナレハ $\left(x - \frac{1}{x} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{y} \right)^2$ ノ平方根ハ a, b ノ常數トナル此証ヲ問フ

第九十 $\frac{32}{a} = \left(\frac{x}{a} \right)^5 + 10 \left(\frac{x}{a} \right) + 5 \left(\frac{a}{x} \right)^3, \frac{32}{a} = \left(\frac{a}{x} \right)^5 + 10 \left(\frac{a}{x} \right) + 5 \left(\frac{x}{a} \right)^3$ 上ノ兩式

ヨリ x ナ消去セハ如何

第九十一 $x + y + z = 0$ ナレハ $(x^3 + y^3 + z^3)^3 = 27x^3y^3z^3$ ナリ此証ヲ問フ

第九十二 上式ノ x ニ如何ナル値ヲ配スレハ $x = a$ トセシキト同シ値ヲ得ヘキヤ

第九十三 $(v+x)(y+z) = b+c-a, (v+y)(z+x) = c+a-b, (v+z)(x+y) = a+b-c, v^2+x^2+y^2+z^2 = 3(a+b+c)$ 上ノ四式ニ合フヘキ x, y, z, v ノ値ヲ問フ

第九十四 $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{y}{b} + \frac{b}{y} = \frac{z}{c} + \frac{c}{z}, xyz = abc, x^2+y^2+z^2+2(ab+ac+bc) = 0$

上ノ三式ヨリ a, b, c 互ニ關係スル狀勢ヲ發見スヘシ

第九十五 $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{x}{c} + \frac{c}{x} = 0$ 上ノ三式ヨリ a, b, c 互ニ關係スル狀勢ヲ發見スヘシ

第九十六 $x^2(y+z) = a^2, y^2(x+z) = b^2, z^2(x+y) = c^2, xyz = abc$ 上四式ヨリ x, y, z ナ消去スヘシ但シ a, b, c ハ皆空數ナラス

第九十七 $\frac{a^2-x^2}{b^2-y^2} = \frac{2x+3y}{3x+2y}, a^2-b^2 = (x-y)^2, a^2+b^2 = z^2$ 上ノ三式ヨリ a, b ナ消去スヘシ

第九十八 $z+y = a, x^2+y^2 = b^2, x^2+y^2 = c^2$ 上ノ三式ヨリ x, y ナ消去スヘシ

第九十九 $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{a}{b} + \frac{b}{z} + \frac{y}{a} = b, \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} \right) \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y} \right) = c$ 上ノ

三式ヨリ x, y, z ナ消去スヘシ

第百 $(x+y)^2 = 4a^2xy, (y+z)^2 = 4a^2yz, (z+x)^2 = 4b^2zx$ ナハ $a^2+b^2+c^2+2abc = 1$

ナリ此証ヲ問フ

第百一 $8-4+8-3+3-1+8+3$ 上式ヨリ x ノ値ヲ發見スヘシ

第百二 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$ 上ノ級數第十八項ニ至ル總數ヲ問フ

第百三 無窮同比級數アリ初列兩項ノ和二箇三分之二ニシテ總數三箇ナリト云フ由テ問フ此級數如何

第百四 $1+3^2+3+4^2+5+6^2+\dots$ 上ノ級數 n 項ニ至ル總數ヲ問フ但シ n ハ奇數ヲ示ス

第百五 f 不易數ナル h ハ d ニ從テ消長シ t 不易數ナル h ハ f ニ從テ消長ス又 t ハ h ナル h ニ f ナリト云フ由テ問フ f ハ t ノ三數互ニ相關係スル狀勢ヲ示ス所ノ方程式如何

第百六 諧音級數ノ初ノ二項 a b トモハ次ノ三項如何

第百七 兩數ノ間ニ $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{3}$ 項ノ平差中項ト同比中項ト諧音中項トヲ插入モハ各種級數ノ中項第 n ハ順次ニ同比級數ヲナスナリ此證ヲ問フ

第百八 七元 $a b c d e f g$ 盡ク一列ニ排シテ順列ヲ作ル h ハ ab ヲ初列トナスモノ幾種アリヤ

第百九 $(a^5+b^5)^8$ 上式ノ詳式ノ中央ナル一項ヲ問フ

第百十 $(x+1)(x+2)(x+3)$ 上式ヲ分解シテ x ニ就テ一次式ナル分母ヲ有スル分數ノ和トナスヘシ

第百十一 $\frac{x-4x^2+4x^3}{1-ax^2+cx^4}$ 泛段數法ニ由テ上式ヲ級數ニ化スヘシ

第百十二 $1(\frac{1}{2}x+x^2+x^3+\dots)$ 泛段數法ニ由テ上式ヲ級數ニ化スヘシ

第百十三 $\frac{(1-2x)^2}{(1-x)^2}$ 上式ノ詳式中 x^n ノ段數如何

第百十四 $(a+bx+cx^2)^3$ 上式ノ詳式中 x^3 ノ段數如何

第百十五 $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots$ 上ノ級數ノ第 n 項ヲ問フ

第百十六 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\dots$ 上ノ級數ノ第 n 項ヲ問フ

第百十七 $1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + 5^2x^4 + \dots$ 上ノ無窮級數ノ總數ヲ問フ

第百十八 推差法ニテ首項一、第一差二、第二差四、第三差八等ナル級數ノ第 n 項ヲ求ムヘシ

第百十九 $x^2 - ax^2y - y^2 = 0$ 上式ヨリ x ノ昇冪級數ニテ顯ス所ノ y ノ値ヲ求ムヘシ

第百二十 a^1, a^3, a^5, a^7 等ノ級數幾項ノ連乘積 p トナルアリ此項數如何

第百二十一 $\frac{1}{x} \left(\frac{x^2+1}{x} \right)$ 上式ヲ無窮連分數ニ化スレハ如何

第百二十二 $\frac{x-3}{x-5} \cdot \frac{x-5}{x-7} \cdot \frac{x-7}{x-11}$ 上ノ三式ヲ皆正ノ整數トナスヘキ正ノ整數ナル x ノ値ヲ問フ

第百二十三 $x^2 + 2x - 30 = 0$ 忽拿氏解法ニテ上式ノ實商ヲ發見スヘシ

第百二十四 一列ニ $n-1$ 元ヲ排列シテ $2n$ 元ヨリ作レル錯列變數ト一列ニ n 元ヲ排列シテ $2(n-1)$ 元ヨリ作レル錯列變數トノ比順次ニ百三十二ト三元

五トノ如クナルモノアリト云フ由テ問フ n ノ値如何

第百二十五 $\frac{2^n - 1}{1} \cdot \frac{m}{2^{n-1}} + \frac{m(n-1)}{2^{n-2}} + \dots + (1)^m = 1$ 上式ノ証ヲ問フ

第百二十六 $a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; \dots$ 此ノ如クナレハ左ノ兩式ヲ得ヘシ此作法ヲ問フ

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots) = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots)^2,$$

第百二十七 $1 - 3 + 5 - 7 + \dots$ 上ノ級數 n 項ニ至ル總數ヲ問フ

第百二十八 $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ 上ノ級數 n 項ニ至ル總數ヲ問フ

第百二十九 $p + \frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+p+1} + \frac{1}{1+p+1+1} + \dots$ 上ノ連分數ノ値ヲ問フ

第百三十 $\sqrt{x^2(x^2+x^2+\dots)}$ 上式ノ値ヲ問フ

第百三十一 三數 a, b, c 順次ニ同比級數ヲナスモノトシ今 a, b ノ平差中項ヲ求トシ b, c ノ平差中項ヲ求トセハ左ノ式ヲ得ヘシ此作法ヲ問フ

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad 2 = \frac{a}{x} + \frac{c}{y},$$

第三百三十二 $A \propto B, B \propto \sqrt{AC}$ ナルハ $C \propto \sqrt{A^2B} + \sqrt{A^2B}$ ナリ此証ヲ問

第三百三十三 平差級數ノ第 p 項ハ $\frac{1}{p}$ ニシテ第 q 項ハ $\frac{1}{q}$ ナリ由テ問フ
此級數 pq 項ニ至ル總數如何

第三百三十四 任何兩數ノ平差中項ハ同比中項ヨリ大ニシテ同比中項ハ諧
音中項ヨリ大ナリ此証ヲ問フ

第三百三十五 $3^x = 15$ 對數ヲ用ヒスシテ上式ヨリ x ノ値ヲ求ムヘシ

第三百三十六 $2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{4}} \times 16^{\frac{1}{5}} \times \dots$ 上式ノ値ヲ問フ

第三百三十七

$$\sqrt{\frac{a+b}{1 + \frac{a+b}{1 + \frac{a+b}{1 + \dots}}}}$$

上式ノ値ヲ問フ

第三百三十八

$$\frac{A+B+Cx^2}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}$$

上ノ分數式ヲ分解シテ x ニ就テ一

次ナル分母ヲ有スル分數式ノ和トナスヘシ

第三百三十九 $a^x = c$ 上式ヨリ x ノ値ヲ發見スヘシ

第三百四十 連續數 n 件 1 2 3 \dots $n-1$ n ノ中チ兩數ヲ取テ相乘シ變化
ヲ盡シテ總乘積ノ和ヲ求ムレハ $\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)$ ナリ此証ヲ問フ

第三百四十一 一數 6478 ナ 24613 此ノ如ク記スルニハ幾何進法ニ從テ可ナ
ランヤ

第三百四十二 $(a+b+c)(a+b+d) = (a+c+d)(b+c+d)$ 此ノ如クナレハ此式ノ
兩節亦各 $\frac{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}{(a+b-c-d)^2} =$ 等シ此証ヲ問フ

第三百四十三 $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2$ 上式ノ詳式中 x^{2r} 及ヒ x^{2r+1} ノ段數如何

第三百四十四 $17x + 19y + 21z = 400$ 上ノ方程式ヲ正ノ整數ニテ解スルハ解
法變數如何

第三百四十五 $8x^3 - 6x - 1 = 0$ 上ノ方程式ノ實商ノ限界ヲ問フ

第四百十六 $\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{2.4.6} + \frac{1}{3.5.7} + \dots$ 上ノ無窮級數ノ値ヲ問

第四百十七 兩數 a, b ノ平差中項若シ諧音中項ノ m 倍ナルキハ

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b(m-1)}}{\sqrt{a} - \sqrt{b(m-1)}} = \frac{a}{b} \quad \text{ナ得此証如何}$$

第四百十八 $\frac{a+bx}{(1-ax)(1-\frac{x}{c})}$ 上式ノ詳式ノ各項チ x ノ昇幂ノ順ニ排列セ

ハ x^n ノ段數如何

第四百十九 $\log \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} (1-x)^{\frac{1}{x}} \right\} = \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.6} + \dots$ 上式ノ証ヲ問フ

第四百十 $2m+1$ 進法ニテ算ヘタル數ノ末位 $2m+1$, 或ハ $2m+2$ ナレハ此數ノ自乘亦同シ末位チ有スヘシ此証ヲ問フ

第四百十一 $2n$ 元チ一列トスル $4n$ 元ノ錯列變數ノ n 元チ一列トスル $2n$ 元ノ錯列變數ニ於ル比ハ $\frac{1.3.5 \dots (4n-1)}{1.3.5 \dots (2n-1)}$ ナリ此証ヲ問フ

第四百十二 $1 + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} + \dots$

$$= n! \left\{ 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} + \dots \right\} \quad \text{上式ノ証ヲ問}$$

第四百十三 $(1+2x+3x^2+\dots)^n$ 上式ノ詳式中 x^p ノ段數ヲ問

第四百十四 $\left\{ n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots \right\}^2 = \left\{ n - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} - \dots \right\}^2$ 上式ノ証ヲ問フ

第四百十五 $(1+x)^n$ 上式ノ詳式中第 $p+1$ 項ノ段數ト第 $p+3$ 項ノ段數ト等シケレハ $p = \frac{n}{2} - 1$ ナリ此証ヲ問フ

第四百十六 $\frac{3}{5} + \frac{6}{8} + \frac{9}{11} + \frac{12}{14} + \dots$ 上ノ級數ノ第 n 項ヲ問フ

第四百十七 $2+1(-3), 2-1(-3), 1-5$ 上ノ四數チ商トスル方程式ヲ問フ

第四百十八 或人此府ヨリ彼府ニ到ラントス乃チ初日全程ノ m 分之一チ行キ次日殘程ノ n 分之一チ行キ第三日ニ又殘程ノ m 分之一チ行キ第四日ニ又殘程ノ n 分之一チ行ク逐テ此ノ如ク毎日殘程ノ m 分之一ト n 分

之一トナ交互ニ行カハ $2p$ 且 m, n, p ハ皆正ノ整數ヲ顯スニシテ全程ノ幾分ヲ行クヘキヤ

第百五十九 $x \propto \frac{1}{y^m}, y \propto \frac{1}{z^n}$ 又シテ $x \parallel a$ ナレハ $z \parallel c$ ナリ由テ問フ x, z

ノ關係ヲ顯ス方程式如何

第百六十 $b+c+d+a::a+b+a+b+c$ 此ノ如クナレハ

$a^2-d^2:b^2-c^2::a-d:b-c$ ナリ此証如何

第百六十一 平差級數アリ其第 m 項ニ至ル總數ノ第 n 項ニ至ル總數ニ於ル比 $m^2:n^2$ ニ於ル比ニ同シキモノアリ此級數第 m 項ノ第 n 項ニ於ル比

$2m-1$ ノ $2n-1$ ニ於ル比ニ同シト云々此証如何

第百六十二 $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ 等ノ如キ級數第 n 項諸數ノ和ヲ問フ

第百六十三 平差級數ノ第 p 項第 q 項第 r 項ヲ順次ニ a, b, c トセハ

$(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0$ ナリ此証如何

第百六十四 同比級數ノ第 p 項第 q 項第 r 項ヲ順次ニ a, b, c トセハ

$a^{p-m}b^{q-m}c^{r-m}=1$ ナ得此作法ヲ問フ

第百六十五 諧音級數ノ第 p 項第 q 項第 r 項ヲ順次ニ a, b, c トセハ

$(p-q)ab+(q-r)ac+(r-p)ba=0$ ナ得此証ヲ問フ

第百六十六 $1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+\dots$ 上ノ級數ノ第 n 項ヲ問フ

第百六十七 銀行アリ年 r 分ノ繁利息ヲ加ヘテ母銀 p 圓ヲ放出シテ毎年
末ニ本年ノ利息 m 分之一ニ等シキ母銀ヲ添入ス由テ問フ第 n 年ノ末ニ
至レハ子母總計幾何

第百六十八 或人年 r 分ノ繁利息ニテ母銀 a 圓ヲ借り毎年 $a-m$ ヲ償還シ

テ n 年ニ至レハ全債支消シ了ルト云フ然ルキハ $n=\frac{\log(1-m)}{\log(1+r)}$ ナリ此

証ヲ問フ

第百六十九 $\sqrt{1-\sqrt{1+\sqrt{1-\dots}}}$ 上式ノ値ヲ問フ

第百七十 $8-7s=1$ 忽拿氏ノ解法ニテ上式ノ實商ヲ算スヘシ

第七十一 $1+3x+4x^2+8x^3+12x^4+20x^5+\dots$ 上ノ無窮級數ノ値ヲ分

數式ニテ顯サハ如何

第七十二 同比級數 n 種アリ各種級數ノ首項ハ順次ニ $a, 2a, 3a, \dots, na$ ニ

シテ公比ハ皆 r ナリ由テ問フ此各種級數第 n 項ニ至ル總數ノ總計如何

第七十三 同比無窮級數 n 種アリ各種級數ノ首項ハ皆一箇ニシテ公

比ハ順次ニ $\frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3}, \dots, \frac{1}{r^n}$ ナリ今各種級數ノ總數ヲ順次ニ $S_1, S_2,$

S_3, \dots, S_n トセハ左ノ式ヲ得ヘシ此証ヲ問フ

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \dots + \frac{1}{S_n} = n - \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$$

第七十四 兩數 a, b ノ平差中項ト同比中項トハ順次ニ x, y トシ x, y ノ

諧音中項ヲ η トセハ $y = \frac{2(a+b)}{\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2}$ ナリ此証ヲ問フ

第七十五 $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n = 1 + n\frac{2x}{1+x} + n(n+1)\frac{(2x)^2}{1+x^2} + \dots$ 上式ノ証ヲ問フ

第七十六 $1 + \frac{2n}{3} + \frac{2n(2n+2)}{3 \cdot 6} + \frac{2n(2n+2)(2n+4)}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \dots$

$$= \frac{2^n}{3} \left\{ 1 + \frac{n}{3 \cdot 6} + \frac{n(n+1)}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} + \dots \right\}$$

上式ノ証ヲ問フ

第七十七 $(1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^2+x^3+\dots)$ 上式ノ詳式中

r ノ奇次ノ冪ノ段數ハ空數ニシテ偶次ノ冪ノ段數ハ一箇ナリ此証ヲ問

フ

第七十八 三數 a, b, c ハ順次ニ平差數ヲナシ他ノ三數 a', b', c' ハ順次

ニ諧音級數ヲナシ aa', bb', cc' ハ順次ニ同比級數ヲナサハ $a:b:c::\frac{1}{a'}:\frac{1}{b'}:\frac{1}{c'}$ ナ

リ此証ヲ問フ

第七十九 $(a+b)^n$ 上式ノ詳式ノ各項ニ順次ニ $na, (n-1)r^2, (n-2)r^3, \dots$

ヲ乘シ所得ノ各乘積ノ總數ヲ求ムヘシ但シ n ハ正ノ整數トス

第八十 $x^4 - 11x^3 + 47x^2 - 91x + 66 = 0$ 上式ノ一商 $3 + \sqrt{-2}$ ナリ

ハ他ノ三商各如何

第百八十一 $1 - n + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \dots$ 上式ノ値ヲ問フ

第百八十二 $\frac{1}{1+2^2} + \frac{2}{2+3^2} + \frac{3}{3+4^2} + \dots$ 等ノ級數第 n 項ヲ問フ

第百八十三 石¹十箇アリ一直線ニ列ス兩石ノ間隔皆一間ナリ今此石ナ一箇ツ、運テ末次ノ石ヨリ同シ直線上ニテ數間ヲ隔ル所ニ集メントス由テ第一石ヨリ歩ヲ始ルモノトシテ總步數ヲ計フレハ第一次ノ石ノ所在ニ他ノ各石ヲ集ルルノ總步數ニ二倍スルヲ知レリト云フ由テ問フ末次ノ石ヨリ今石ヲ集ル處ニ到ル距離如何

第百八十四 $y = x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x} - \dots$ ナレハ $x = y + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2y} + \dots$

ナリ此証ヲ問フ

第百八十五 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$ トナシ二項法ニ由テ之ヲ解カハ x ノ段數ハ
 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$ トナル此証ヲ問フ

第百八十六 $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$ 上ノ無窮級數ノ總數ヲ問フ

第百八十七 x ナ一箇ヨリ小ナリトセハ左ノ兩同式ヲ得ヘシ此証如何

$$\frac{x^3}{1-x^3} = \frac{x^3}{1-x^3} + \frac{x^6}{1-x^6} + \frac{x^9}{1-x^9} + \dots$$

第百八十八 兩小竿アリ長各 c 寸ナリ今其一竿ヲ m 分シテ毎分一刻ヲ彫シ他ノ一竿ヲ n 分シテ毎分亦一刻ヲ彫シ此兩竿ノ末ヲ並テ兩竿ナル刻痕ノ間隔最短ナルモノヲ求ムレハ $\frac{c}{mn}$ 寸ニシテ此ノ如キ處二處アリト云フ由テ問フ此証如何但シ m, n ハ二以上ノ數ニテ互ニ通乘子ナシトス

第百八十九 $(1-x)^{-1}$ 上式ノ詳式ノ首項ヨリ第 n 項ニ至ル諸項ノ段數ノ和ヲ問フ

第百九十 $\frac{b_1}{a_1 + b_1} + \frac{b_2}{a_2 + b_2} + \frac{b_3}{a_3 + b_3} + \dots$ 上ノ連分數ニ於テ三次相續ク漸近

分數ヲ $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}, \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}$ トセハ $p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}, q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}$ ナリ

第百九十一 (一三) 上式ノ詳式ニ於テ首項ヨリ第 q 項ニ至ル迄ヲ去ラハ殘餘ノ諸項ノ和如何但シ ω ハ一箇ヨリ小ナリ

第九十二 上式ノ詳式ノ各項ヲ x ノ昇幂ノ順ニ排
列セハ第十項如何

第百九十三

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \dots\right) \times \left(c + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \dots\right) = \frac{1+bc}{1+ab} \quad \text{上式ノ}$$

証ヲ問フ

第九十四
證ヲ問フ

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{1}{1} \right) \left(\frac{a}{c} + \frac{1}{1} \right) \left(\frac{a}{c} + \frac{1}{1} \right) \cdots \left(\frac{a}{c} + \frac{1}{1} \right) \left(\frac{a}{c} + \frac{1}{1} \right) \left(\frac{a}{c} + \frac{1}{1} \right) \cdots \left(\frac{a}{c} + \frac{1}{1} \right) \left(\frac{a}{c} + \frac{1}{1} \right) \left(\frac{a}{c} + \frac{1}{1} \right) \cdots \right) = \frac{1-a}{1+ab} \text{ 上式ノ}$$

第百九十五

$$\frac{1}{(1+x)(1+2x)} + \frac{1}{(1+2x)(1+3x)} + \cdots$$

上ノ級數 n 項ノ和ヲ問フ

$$(1+3x+5x^2+7x^3+\cdots)\times(1-3x+5x^2-7x^3+\cdots)=1+x^2+x^4+x^6+\cdots$$

上式ノ証ヲ問フ

第九百七十七
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \dots$ 等ノ乘子 n 項ノ連乘積ノ値如何

第九十八 上式

$$d = (((\dots - d) / (1 - d) / (1 - d) / \dots \times 1 / ((\dots + d) / (1 + d) / (1 + d) / \dots) / 1$$

ノ証ヲ問フ

第百九十九 第四百三十五條ニ於テ $\S\S 111 \dots\dots\dots$ トシテ n 正ノ整數ナルキハ二項法公式ヲ作ルヘシ

第二節

$$1/(x_1/x_2^3) = (x_1^3/x_2^3) \dots \dots \dots = x_2^3$$

上式ノ証ヲ問フ

代數教科書終

代數教科書答

志摩 近藤眞琴 校閱

駿河 田中矢德 編輯
同 鈴木長利 校算

比式問題答

- | | | | | | |
|-----|-----------------------------|-----|------------------|-------|------------------|
| 第一 | $7:12, 5:8, 2:3, 3:4, 8:9.$ | 第二 | $\frac{5}{27}.$ | 第三 | $\frac{x}{a-x}.$ |
| 第五 | $\frac{bc-act}{c-d}.$ | 第六 | 十四箇 | 二十一箇 | |
| 第七 | 二十四箇 | 第八 | 二十箇 | 三十二箇 | |
| 第九 | 一箇 | 第十 | 十五箇 | 十箇 | |
| 第十一 | 六箇 | 第十二 | 三十五箇 | 四十二箇 | |
| 第十三 | 四箇 | 第十四 | $\frac{ab}{a+b}$ | | |
| 第十五 | 金錢五十箇 | | 銀錢六十箇 | 銅錢九十箇 | |
| 第十六 | 長一百零四間 | | 濶六十五間 | | |
| 第十七 | 長二十尺 | | 濶十六尺 | 高十四尺 | |

第十八 0. 或ハ $\frac{2}{5}$

第二十三 疾行ノ物四ノ如ク緩行ノ物三ノ如シ

第二十四 甲ハ四ノ如ク乙ハ十一ノ如ク丙ハ五ノ如シ

比例式問題答

第一 14. 第二 18. 第三 15. 第四 12.

第五 4. 第六 $\frac{-59 \pm \sqrt{(3257)}}{2}$ 第七 $2, 2\frac{1}{2}$ 第八 5.

第九 $1, -1$ 第二十 $\frac{1}{n(n-1)}$ 第二十一 $\left(\frac{2a}{a+1}\right)^2$ 第二十二 $1\frac{1}{13}$

第二十三 $a - \frac{a}{\sqrt{1+(b-1)^2}}$ 第二十四 四十五箇 八十箇

第二十五 四箇 六箇 九箇 第二十六 $\frac{bc-ad}{a-b-c+d}$

第二十七 六箇 四箇

第二十八 怠ル者 $\frac{n}{m-n}$ 圓動ル者 $\frac{n}{(a-b)}$ 圓

第二十九 三百轉 第三十 乙瓶ハ甲瓶ノ七倍

消長問題答

第一 四箇 第三 五ノ二ニ於ルカ如シ 第四 $\frac{1}{3}$

第五 四箇 第六 四箇 第七 十六ノ三ニ於ルカ如シ

第八 $\frac{abc}{b^2}$ 第九 $\frac{ac^2}{b^2}$ 第十四 一千百卅三圓三分圓之一

第十五 十五人 第十六 一萬九千二百圓 第十七 百四十三輛

變數問題答

第一 五千零四十變 第二 七百二十變

第三 三百六十二萬八千八百變 第四 九十六種

第五 三百二十五種 第六 四元

第七 七十變 第八 四千三百六十八變

第九 三萬八千七百六十變 第十 六百變

- 第十一 一千七百十六變
- 第十二 一百九十變
- 第十三 $\frac{195}{19 \mid 85}$ 變
- 第十四 八元
- 第十五 $x=2r+1, r \parallel \alpha$ 第十六 二千五百二十變
- 第十七 一十五種
- 第十八 八頭
- 第十九 五十七條
- 第二十 一百二十種
- 第二十一 二十七變 或ハ九十九變
- 第二十二 二百十變中チ外國人偕ニ浴ニ當ル日七十日
- 第二十三 一客一食ノ料五十錢

記數法問題答

- 第一 2042132. 第二 22500. 第三 11101001010.
- 第四 2076. 第五 34661. 第六 102505.
- 第七 148427. 第八 44592. 第九 11565512.

- 第十 3483. 第十一 數元八 第十二 數元六
- 第十三 9e21, fe. 第十四 ee. 第十五 110111.

雜問六答

- 第一 $\frac{b^2-2ac}{a^2}$.
- 第二 一式 $\frac{-b^2+3abc}{a^3}$ 二式 $\frac{b^2-4ab^2+2a^2c^2}{a^3}$ 三式 $\frac{b}{c}$
- 四式 $\frac{b^2-2ac}{ac}$ 五式 $\frac{-b^2+3abc}{a^2c}$ 六式 $\frac{b^2-4ac}{b^2}$
- 第三 $\frac{c(b^2-a^2)}{b^2+a^2}$ 第四 $\frac{a}{5b(b-1)^2}$ 第五 $x \parallel 13, y \parallel 12$. 餘ハ略ス
- 第六 $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{5}$ 第七 $x = \left\{ \frac{a^2+1}{4} + \frac{a^2}{a^2+1} \right\}^2 \sqrt{\left(\frac{4}{a^2+1} \right)}, y = a \sqrt{\left(\frac{4}{a^2+1} \right)}$
- 第八 $x = \frac{1}{8} \left\{ b^3 + 1 \sqrt{(2a^3-b^3)} \right\}^3, y = \frac{1}{8} \left\{ b^3 - 1 \sqrt{(2a^3-b^3)} \right\}^3$, 餘ハ略ス

第九 $x=2\pm\sqrt{3}$, $y=7\pm4\sqrt{3}$. 餘ハ零ス 第十三 x .

第十五 $x=-n\pm\sqrt{\frac{(a+n^2)(b+n^2)}{c+n^2}}$, $y=-n\pm\sqrt{\frac{(a+n^2)(c+n^2)}{b+n^2}}$.

$$x=-n\pm\sqrt{\frac{(b+n^2)(c+n^2)}{a+n^2}}.$$

第二十 $x=y=\sqrt{(m+n)}$; $x=y=0$; $x=\sqrt{\frac{n}{2}\left[a\pm\sqrt{(a^2-4)}\right]}$,

$$y=\sqrt{\frac{n}{2}\left[a\pm\sqrt{(a^2-4)}\right]}; \text{但 } a=\frac{-(m+n)\pm\sqrt{(m^2-2mn+5n^2)}}{2n}.$$

第二十一 $x=\pm\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2(b+c-a)}}$, $y=\pm\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{2(a+c-b)}}$.

$$x=\pm\sqrt{\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{2(a+b-c)}},$$

第二十二 東客五十五日 西客六十六日

第二十三 $m\equiv\frac{a^2m}{\sqrt{m}\pm\sqrt{n}}$ 尺 或ハ $n\equiv\frac{\pm a\sqrt{n}}{\sqrt{m}\pm\sqrt{n}}$ 尺

第二十五 $x=-\frac{b}{2a}$.

第二十六 $x=-\frac{b}{2a}$.

$$\frac{n-2}{n-2}.$$

$$\frac{2(y-1)(n-2)}{n-2+1}.$$

第二十九 下ル時四ノ如シ上ル時九ノ如シ

8.

第三十二 第三十三 $\frac{n-1}{n-1}$. 若シ各人ノ左右ニ同人ノ來ルヲ除クハ上式ヲ折半

スヘシ

第三十四 小槽五石中槽十石 大槽十五石

第三十五 第一次六十四升 第二次四十八升 第三次三十六升 第四次二十七升

$$\frac{n(n-1)}{1.2}=N \quad \text{ト } n \quad \frac{N(N-1)(N-2)}{1.2.3} \quad \text{ナリ}$$

第三十八 $7:8$.

第三十九 贏夫三十六錢 健丁五十錢

第四十 金剛石 $\frac{mcm^2}{(m+1)^2}$ 圓 紅寶石 $\frac{cm^2}{(m+1)^2}$ 圓

第四十一 一人ニテ治ル日數ヲモツトセシ $\frac{m+1}{x} = \frac{a+1}{y} = \frac{p+1}{z} + 1$

第四十三 $4 \times 4 \times 3 = 1728$ 種 第四十四 $2 \times \frac{m-2}{m-1}$ 種

平差級數公式應用問題答

- 第一 一百十二箇 第二 六千四百四十箇
- 第三 二箇 三十七箇 第四 二千六百二十六箇
- 第五 十三箇 十九箇 二十五箇 三十一箇
- 第六 平差二箇 尾項百二十一箇 第七 六百四十九箇
- 第八 二十四分箇之一 第九 一千三百三十二圓二十五錢
- 第十二 二箇 第十一 $\frac{m}{2}(n+1)$
- 第十三 二箇

第十四 一百五十畝

第十六 尾項 $1+29a$ 總數 $15(1+15a)$

第十七 $\frac{1}{2}(n-1)$

第二十 一千三百三十四項

第二十二 項數 s_1+n-1 尾項 1 或ハ 項數 s_1+n 尾項 0.

第二十四 九角形 第二十五 三日 或ハ 十四日

第二十六 六日 第二十七 二十三石一斗

平差級數問題

- 第一 一箇 六箇 十一箇
- 第二 五箇 九箇 十三箇 十七箇 二十一箇
- 第三 十五箇 十九箇 二十三箇 二十七箇
- 第四 一箇 三箇 五箇 七箇 第五 四箇 五箇 六箇 七箇
- 第六 三箇 五箇 七箇 九箇 第八 二百三十四箇

同比級數公式應用問題答

- 第一 五百十一 第二 四千三百七十四
- 第三 五萬九千零四十九分之一十七萬四千零七十五
- 第四 四十八 九十六
- 第五 六 十二 二十四 四十八 九十六 百九十二 三百八十四
- 第六 $\frac{1}{4}$ 第七 $\frac{1}{6}$ 第八 $\frac{1}{3}$ 第九 $\frac{32}{99}$
- 第十 $\frac{1}{33}$ 第十一 $\frac{1}{3}$ 第十二 $\frac{1}{6}$ 第十三 $\frac{a}{a-x}$
- 第十四 $\frac{a}{a^2+a^2}$ 第十五 $4+3\sqrt{2}$ 第十六 $\frac{25}{24}\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}\right)$ 即 $\frac{13}{24}$
- 第十七 $a^p \cdot \frac{a^{pn}-1}{a^p-1}$ 第十八 $2(2^n-1)-a$
- 第十九 七箇 第二十 六千二百五十箇 第二十一 11
- 第二十四 $\frac{a-7a^{2n+1}}{1-a} + \frac{a^2(1-a^{2n-1})}{(1-a^2)}$ 第二十五 $\frac{pn(1+y)^n}{(1+y)^n-1}$

同比級數問題答

- 第三 三箇 六箇 十二箇 第四 三十箇 六十箇 一百二十箇
- 第五 二箇 四箇 八箇 十六箇
- 第六 四箇 二十四箇 一百四十四箇 八百六十四箇
- 第七 二箇 四箇 八箇 第八 一箇 三箇 九箇 二十七箇
- 第九 五箇 十五箇 四十五箇 第十 二箇 六箇 十八箇
- 第十一 一箇 三箇 九箇 第十二 二箇 四箇 八箇
- 第十三 五箇 一箇 五分箇之一
- 第十四 三圓 二十一圓 三十九圓 五十七圓
- 第十五 一箇 五箇 二十五箇
- 第十六 三箇 六箇 十二箇 二十四箇 四十八箇 九十六箇
- 第十七 三箇 六箇 十二箇 二十四箇 四十八箇 九十六箇

諧音級數問題答

- 第一 一箇二分之一、一箇五分之一、一箇
 第二 五分箇之四、二十三分箇之八、二分箇之一、
 第三 三箇、二箇五分之二
 第四 十五分之二、十二分之一、三十三分之二
 第五 六箇 十二箇
 第六 三十六箇 六十四箇
 第七 一箇 九箇
 第八 三箇 九箇
 第九 $\frac{pq(p-q)}{pq-qp^2}$

常分數分解法問題答

- 第二 $\frac{5}{x-1} + \frac{2}{x-2}$ 第三 $\frac{8}{2x-5} + \frac{6}{x+4}$ 第四 $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3}$
 第五 $\frac{1}{2x+1} + \frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x}$ 第六 $\frac{1}{2x+2} - \frac{1}{2x-2} - \frac{1}{3x+3} + \frac{1}{3x-3}$

- 第七 $\frac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)} - \frac{1}{(a-b)(b-c)(x+b)} + \frac{1}{(a-c)(b-c)(x+c)}$
 第八 $\frac{1}{a-1} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+a^2x} \right)$
 第九 $\frac{1}{(1-a^2)} \left\{ \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+ax} - \frac{1}{1+a^2x} + \frac{1}{1+a^3x} \right\}$

二項法問題一答

- 第一 $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$
 第二 $1 + 6c + 15c^2 + 20c^3 + 15c^4 + 6c^5 + c^6$
 第三 $xy^7 + 7x^2y^6 + 21x^3y^5 + 35x^4y^4 + 35x^5y^3 + 21x^6y^2 + 7x^7y + y^7$
 第四 $a^{16} - 8a^{14} + 28a^{12} - 56a^{10} + 70a^8 - 56a^6 + 28a^4 - 8a^2 + 1$
 第五 $a^8 - 9a^6c + 36a^4c^2 - 84a^2c^3 + 126ac^4 - 126a^3c^5 + 84a^5c^6 - 36a^7c^7 + 9ac^8 - c^9$
 第六 $1 + 5ax + 10a^2x^2 + 10a^3x^3 + 5a^4x^4 + a^5x^5$

- 第七 $a^2-6a^0x^2+15a^2x^4-20a^6x^6+15a^4x^8-6a^2x^{10}+x^{12}$.
- 第八 $x^{10}-5x^8x^2+10x^6x^4-10x^4x^6+5x^2x^8-x^{20}$.
- 第九 $a^2x^5+6a^{10}x^2dy^2+15a^8x^4dy^4+20a^6x^6dy^6+15a^4x^8dy^8+6a^2x^{10}dy^{10}+d^6y^{12}$.
- 第十 $\frac{1}{1/a}\left(1-\frac{x}{2a}-\frac{x^2}{2.4a^2}-\frac{3x^3}{2.4.6a^3}-\frac{3.5x^4}{2.4.6.8a^4}-\dots\right)$.
- 第十一 $1-\frac{x}{3}-\frac{2x^2}{3.6}-\frac{2.5x^3}{3.6.9}-\frac{2.5.8x^4}{3.6.9.12}-\frac{2.5.8.11x^5}{3.6.9.12.15}-\dots$
- 第十二 $a\left(1+\frac{1}{4a}-\frac{3}{4.8a^2}+\frac{3.7}{4.8.12a^3}-\frac{3.7.11}{4.8.12.16a^4}+\dots\right)$.
- 第十三 $a^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{b}{3a}-\frac{2b^2}{3.6a^2}+\frac{2.5b^3}{3.6.9a^3}-\frac{2.5.8b^4}{3.6.9.12a^4}+\dots\right)$.
- 第十四 $\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}+\dots$
- 第十五 $a(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+\dots)$.

- 第十六 $a+\frac{b^2}{2a}-\frac{b^4}{2.4a^2}+\frac{b^6}{2.4.6a^3}-\frac{3b^8}{2.4.6.8a^4}+\dots$
- 第十七 $a^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{2c^2}{3a}-\frac{2c^4}{3.6a^2}-\frac{2.4c^6}{3.6.9a^3}-\frac{2.4.7c^8}{3.6.9.12a^4}-\dots\right)$.
- 第十八 $\frac{d}{c}\left(1-\frac{x^2}{2c^2}+\frac{3x^4}{2.4c^4}-\frac{3.5x^6}{2.4.6c^6}+\frac{3.5.7x^8}{2.4.6.8c^8}-\dots\right)$.
- 第十九 $1+3a+6a^2+10a^3+15a^4+21a^5+28a^6+36a^7+\dots$
- 第二十 $\frac{1}{1/a}\left(a-\frac{3x^2}{4a}-\frac{3x^4}{4.8a^2}-\frac{3.5x^6}{4.8.12a^3}-\frac{3.5.9x^8}{4.8.12.16a^4}-\dots\right)$.
- 第二十一 $\frac{1}{a^4}\left(\frac{4y}{a^4}+\frac{10y^2}{a^6}-\frac{20y^3}{a^8}+\frac{35y^4}{a^8}-\frac{56y^5}{a^8}+\dots\right)$
- 第二十二 $\frac{x^2}{5}+\frac{6x^3}{2.5^2}+\frac{6.11x^4}{2.3.5^3}+\frac{6.11.16x^5}{2.3.4.5^4}+\dots$
- 第二十三 $1-\frac{x^4}{15}-\frac{14x^8}{2.15^2}-\frac{14.29x^{12}}{2.3.15^3}-\frac{14.29.44x^{16}}{2.3.4.15^4}-\dots$
- 第二十四 $4950a^2x^{18}$.
- 第二十五 $\frac{10}{15}\frac{1}{5}a^5x^5$.

$$\text{第二十六} \quad \frac{9}{\sqrt[4]{5} a^2 x^4} \cdot \frac{9}{\sqrt[4]{5} a^4 x^5} \quad \text{第二十七} \quad \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3} x^r.$$

$$\text{第二十八} \quad \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-1)}{\sqrt{x} \cdot 2^r} (-1)^r. \quad \text{第二十九} \quad a^2 - 6a^2 b + 12ab^2 - 8b^3.$$

$$\text{第三十} \quad 16a^4 + 96a^3 x + 216a^2 x^2 + 216ax^3 + 81x^4.$$

$$\text{第三十一} \quad 1 - 2a + \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{16}a^4$$

$$\text{第三十二} \quad a^8 - 4a^7 x + 10a^6 x^2 - 16a^5 x^3 + 19a^4 x^4 - 16a^3 x^5 + 10a^2 x^6 - 4ax^7 + x^8.$$

$$\text{第三十三} \quad r(2a) \cdot \left\{ 1 - \frac{3x}{16a^2} - \frac{27x^2}{512a^4} - \frac{567x^3}{24576a^6} - \cdots \right\}.$$

二項法問題二一答

$$\text{第一} \quad 16x^4 + 160x^3 y + 600x^2 y^2 + 1000xy^3 + 625y^4.$$

$$\text{第二} \quad 32a^5 - 240a^4 x + 720a^3 x^2 - 1080a^2 x^3 + 810ax^4 - 243x^5.$$

$$\text{第三} \quad 729 + 5832x^2 + 19440x^4 + 34560x^6 + 34560x^8 + 18432x^{10} + 4096x^{12}.$$

4

$$\text{第四} \quad \frac{81}{256} - a^4 + \frac{27}{20}a^3 y + \frac{54}{25}a^2 y^2 + \frac{192}{125}ay^3 + \frac{256}{625}y^4.$$

$$\text{第五} \quad \frac{64}{729}a^6 + \frac{32}{27}a^5 y + \frac{20}{3}a^4 y^2 + 20a^3 y^3 + \frac{135}{4}a^2 y^4 + \frac{243}{8}ay^5 + \frac{729}{64}y^6.$$

$$\text{第六} \quad \frac{m^6}{1024} - \frac{m^4}{256} + \frac{m^3}{160} - \frac{m^2}{200} + \frac{m}{500} - \frac{1}{3125}.$$

$$\text{第七} \quad \frac{m^8}{256} - \frac{m^6}{32} + \frac{7m^4}{64} - \frac{7m^2}{32} + \frac{35}{128} - \frac{7}{32m^2} + \frac{7}{64m^4} - \frac{1}{32m^6} + \frac{1}{256m^8}.$$

多項法問題答

$$\text{第一} \quad 6. \quad \text{第二} \quad -16. \quad \text{第三} \quad 2^6 3^2 + 2^7 3 + 2^5 3^3 + 3^4 = 1905.$$

$$\text{第四} \quad 3. \quad \text{第五} \quad -2^6 5 + 2^6 3^3 5 - 2^2 3^4 5.$$

$$\text{第六} \quad \left[\frac{12}{8} \right] \frac{2^1}{4} + \left[\frac{7}{2} \right] \frac{2^3}{3} + \left[\frac{6}{4} \right] \frac{2^2}{2} + \left[\frac{5}{6} \right] \frac{2}{6} + \left[\frac{4}{8} \right] \frac{1}{8} \Bigg\}.$$

$$\text{第七} \quad 2^4 5 7^2 - 2^3 3 5^3 7 + 2 5^5. \quad \text{第八} \quad -64. \quad \text{第九} \quad -20.$$

- 第十 $\frac{15}{8} \frac{35}{4} \frac{63}{8} = \frac{37}{2}$ 第十一 $\frac{1}{4}$
- 第十二 $-3+6+15+\frac{35}{8}$ 第十三 $\left(\frac{3.7}{2^5} - \frac{7.11.19}{2^w}\right)$
- 第十四 50. 第十五 $\frac{1}{24}(n^4+6n^3-13n^2+6n)$ 第十六 0.
- 第十七 $5c^4+20abc^2+10b^3c^2$ 第十八 -23 第十九 $-\frac{b}{2}+\frac{3}{8}c^2$
- 第二十 $mc+ml(m-1)ab+\frac{ml(m-1)(m-2)}{13}c^3$ 第二十一 20.
- 第二十二 -210 第二十三 1250. 第二十四 12500.

根數式詳開法問題答

- 第一 二箇〇八〇〇八四 第二 三箇一四一三八一
- 第三 四箇六四一五八九 第四 四箇七九一四二〇
- 第五 三箇一二二八五一 第六 一箇九七八六〇二

- 第七 一箇三一九五〇八
- 第九 一箇九九三二三五

第八 五箇〇四七一〇四

泛段數法問題答

- 第一 $1+x+3x^2+9x^3+27x^4+81x^5+\dots$
- 第二 $1+3x+4x^2+7x^3+11x^4+18x^5+\dots$
- 第三 $1+2x+8x^2+28x^3+100x^4+356x^5+\dots$
- 第四 $x+9x^2+32x^3+92x^4+240x^5+\dots$
- 第五 $\frac{2}{3x}+\frac{4}{9}+\frac{8x}{27}+\frac{16x^2}{81}+\frac{32x^3}{243}+\dots$
- 第六 $1-2x^2+x^3+4x^5-11x^8+10x^{10}+13x^{12}-\dots$
- 第七 $1+(1-2a)x-(2a-3a^2)x^2+(3a^2-4a^3)x^3-\dots$
- 第八 $\frac{1}{2}-\frac{x}{2.4}-\frac{x^2}{2.4.6}-\frac{3x^3}{2.4.6.8}-\dots$

第九 $1 + \frac{3}{2}x + \frac{11}{8}x^2 + \frac{23}{16}x^3 + \frac{179}{128}x^4 + \dots$

第十 $1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + 9x^8 - 11x^{10} + \dots$

級數互求法問題答

第一 $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - \dots$ 第八 117647.

第二 $x = y - 3y^2 + 13y^3 - 67y^4 + 381y^5 - \dots$ 第九 454620.

第三 $y = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \dots$ 第十 201369.

第四 $x = y + y^3 + 2y^5 + 5y^7 + 14y^9 + \dots$ 第十一 274655.

第五 $x = \frac{y}{2} - \frac{3y^3}{16} + \frac{19y^5}{128} - \frac{152y^7}{1024} + \dots$

第六 $y = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{8} - \frac{7x^4}{8} + \frac{21x^5}{16} - \dots$

循環級數問題答

第一 $\frac{1+2x}{1-x-x^2}$ 第二 $\frac{1+5x}{1-x-6x^2}$ 第三 $\frac{1+6x}{1+4x-3x^2}$

第四 $\frac{1+3x+x^2}{1-x+2x^2-3x^3}$ 第五 $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ 第六 $\frac{1-x}{1-2x-3x^2}$

第七 $\frac{(1+x)^2-2x^2}{(1-x)^2-3x^3}$ 第八 $\frac{x}{2-4x^2-64^4}$

第十 第 n 項 $(2x)^{n-1} + (-x)^{n-1}$, 總數 $\frac{1-(2x)^n}{1-2x} + \frac{1-(-x)^n}{1+x}$

第十一 第 n 項 $x^{n-1} + (2x)^{n-1} + (3x)^{n-1}$, 總數 $\frac{1-x^n}{1-x} + \frac{1-(2x)^n}{1-2x} + \frac{1-(3x)^n}{1-3x}$

推差法問題答

第一 五十三 第二 六百八十 第三 七百七十一 一千二百三十一

第四 八千 第五 $\frac{n(n+1)}{2}$ 第六 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

第七	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$	第八	一千五百四十
第九	二千三百六十六	第十	二千七百五十五
第十一	$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$	第十二	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
第十三	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	第十四	$\frac{(n^2+n)^n}{4}$
第十五	$\frac{n^2}{5} + \frac{n^1}{2} + \frac{n^2}{3} - \frac{n}{30}$	第十六	$\frac{n(n+1)(1+2n+3na)}{6}$
第十七	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	第十八	$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
第十九	一百二十箇	第二十	$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

插入法第一例問題答

- 第一 二箇七分七釐三毫零八忽三微
第二 二箇七分九釐六毫七絲二忽二微

- 第三 二箇七分七釐八毫七絲八忽五微
第四 二箇八分一釐二毫六絲一忽三微
第五 二箇八分三釐零七絲八忽三微
第六 二箇八分三釐三毫五絲二忽五微

插入法第二例問題答

- 第一 六十七度四十一分三十九秒 第二 六十九度十六分十三秒
第三 七十度五十分二十二秒 第四 七十三度五十七分二十三秒
第五 七十五度三十分十六秒 第六 七十七度二分四十四秒
第七 八十度六分二十七秒 第八 八十一度三十七分四十三秒
第九 八十三度八分三十五秒

對數問題答

- 第一 四 第二 三 第三 二 第四 778151
 第五 $2.477121, -2.477121$
 第六 二箇ノ三乘根ノ對數
 零箇 100343
 第七 $.048455, -3.397940, -1.365637$

指數方程式問題答

- 第一 $x=1.06862$ 第二 $x=9.464$
 第三 $x=\frac{2\log b + 3\log c}{\log a}$ 第四 $x=\frac{\log (md+c) - \log a}{\log b}$
 第五 $x=\frac{\log a}{\log b - \log m}$ 第六 $x=\frac{\log (c+d)}{\log a}, y=\frac{\log (c-d)}{\log b}$
 第七 $x=6$ 第八 $x=\frac{5\log 6}{\log 12}$

第九 $x=\frac{3\log 43}{\log 12} + 3$

第十 $x=\frac{18\log 24 + \log 17 - 3\log 71}{3\log 6}$

連分數問題一答

第一 $2+\frac{1}{2+\frac{1}{7}}$ 第二 $0+\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{3}}}$ 第三 $3+\frac{1}{5+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}$

連分數問題二答

第一 $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{11}{4}, \frac{25}{9}, \frac{111}{40}$
 第二 $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \frac{17}{57}$
 第三 $\frac{1}{1}, \frac{5}{4}, \frac{46}{37}, \frac{97}{78}, \frac{143}{115}, \frac{249}{193}, \frac{1103}{887}$
 第四 $\frac{4}{1}, \frac{29}{7}, \frac{33}{8}, \frac{128}{31}, \frac{161}{39}, \frac{2704}{655}, \frac{2865}{694}, \frac{5569}{1349}, \frac{86400}{20929}$

連分數問題三答

第五

 $\sqrt{6}$.第六 $x = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+4)}$.

第七 方程式 $bx^2 - (2cd - bc)x + c^2b - abc - c = 0$ ヨリ容易ニ x ノ値ヲ發見スルヲ得

不定方程式問題一答

第一

 $x=9, y=4$.

解法變數無限

第二 $x=5, y=3$.

第三

 $x=5, y=8$.第四 $x=12, y=18$.

第五

 $x=5, 8, 11, 14$. 此餘限リナシ $y=8, 16, 24, 32$. 此餘限リナシ

第六

 $x=2, y=3$. 解法變數一第七 $x=1, y=2$. 解法變數一

第八

 $x=17, y=1$. 解法變數一第九 $x=1, y=13$. 解法變數一

第十

 $x=37, y=13$.第十一 $x=48, 32, 16, y=19, 45, 73$. 解法變數三

第十二 買客ヨリ金錢一百箇ヲ賣主ニ交附シ賣主ヨリ銀錢二十箇ヲ買客

ニ交附スヘシ支償ノ法唯此一法アルノミ

第十三 債主ヨリ大金錢十三箇ヲ銀主ニ交附シ銀主ヨリ小金錢十六箇ヲ債主ニ交附スヘシ

第十四 牛十二頭 羊十頭買収ノ法唯此一法アルノミ

第十五 英國金錢十一箇ニ西班牙國銀錢十三箇ヲ配合セハ荷蘭國金錢二十一箇ニ適當ス配合ノ法唯此一法アルノミ

第十六 支償スルノ法ナシ

第十七 二十一錢ノ銀錢十七箇ニ二十錢ノ銀錢十三箇ヲ配合スヘシ配合ノ法唯此一法アルノミ

第十八 五十四錢ノ品二斤 六十四錢ノ品三斤 是レ最少數ヲ混和スルノ法ナリ此餘混合ノ法限リナシ

第十九、銀錢三箇 銅錢二十一箇 支償ノ法總テ五件アリ

第二十 百箇 第二十一 二百四十七箇

第二十二 七分之四、九分之三

不定方程式問題二答

第一 $x=1, 5, 9, y=27, 18, 9, z=30, 25, 20$. 解法變數三第二 $x=30, 25, y=1, 10, z=7, 3$. 解法變數二第三 $x=25, 43, 51, y=3, 17, 31, z=11, 6, 1$.

第四 十四法 第五 二法 第六 九百七十四箇

第七 牛十九頭 羊一頭 雞八十羽

不定方程式問題三答

第一 $x=1, 2, 1, y=4, 2, 1, z=1, 2, 5$. 解法變數三第二 $x=1+1, y=5, 3, 1, z=2, 3, 8$. 又 $x=2+1, y=1, z=3$. 解法變數四

第三 十二法 第四 六法

第五 三分之二 四分之三 五分之四

不定方程式問題四答

第一 二十八箇 第二 三十六箇 第三 四十五箇

第四 二千五百二十箇 第五 千五百二十三箇 第六 二百五十箇

雜問七答

第一 $(n+1)s$. 第二 $\frac{5}{7}, 1, \frac{1}{7}, \dots$ 第四 $\frac{a-b}{a+b} + \frac{3a-3b}{a+b} + \frac{5a-3b}{a+b} + \dots$ 第七 $(np+1)\frac{np}{2}$

第八 二十五項

第九

已知元 $a, r, n, t, e, l = ar^{n-1}, s = \frac{ar^n - a}{r-1}$. 求得

已知元 τ, r, n トセハ $a = \frac{l}{p^{n+1}}, s = \frac{l^n - l}{p^n - p^{n-1}}$. ナ得

已知元 τ, n, r, s トセハ $a = \frac{(r-1)s}{p^n - 1}, l = \frac{(r-1)s^{n+1}}{p^n - 1}$. ナ得

已知元 τ, a, l, n トセハ $r = \left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}, s = \frac{l^{\frac{n-1}{n}} - a^{\frac{n-1}{n}}}{l^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$. ナ得

已知元 τ, a, n, s トセハ $ar^n - rs = a - s, l(s-l)^{n-1} = a(s-a)^{n-1}$. ヨリ未知元 r, l ナ求ルヲ得

已知元 τ, l, n, s トセハ $a(s-a)^{n-1} = l(s-l)^{n-1}, (s-l)^n - r^{n-1}s = -l$. ヨリ未知元 a

r ナ求ルヲ得

已知元 τ, a, r, l トセハ $s = \frac{l^n - a}{r-1}, n = \frac{\log l - \log a}{\log r} + 1$. ナ得

已知元 τ, a, l, s, r トセハ $r = \frac{s-a}{s-l}, n = \frac{\log l - \log a}{\log(s-a) - \log(s-l)} + 1$. ナ得

已知元 τ, a, r, s トセハ $l = \frac{a + (r-1)s}{r}, n = \frac{\log(a + (r-1)s) - \log a}{\log r}$. ナ得

已知元 τ, l, r, s トセハ $a = l(r - (r-1)s), n = \frac{\log l - \log l(r - (r-1)s)}{\log r} + 1$. ナ得

第十 $2^{n+1} - 3, 4(2^n - 1) - 3n$. 第十一 $\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}, 2(2^n - 1) + \frac{1}{2^{n-1}}$.

第十二 $\frac{nrar^n}{r-1} - \frac{ar}{(r-1)^2}(r^n - 1)$. 第十三 $\frac{ar}{(1-r)^2}$.

第十四 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$. 第十六 $\left(\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}\right)^{\frac{1}{n-2}}$.

第十七 $\frac{1}{2}p(p+1)a + a \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1}$. 第十九 $\frac{ab}{(n-1)a - (n-2)b}$.

第二十二 $\frac{r^{2n} - 1}{r^2 - 1} \left(r^2 + \frac{1}{r^{2n}}\right) - 2n$. 第二十三 $\frac{50}{81} \frac{(10^n - 1)}{9} - \frac{5n}{9}$.

第二十五 $\frac{2}{n} \left\{ 1 + \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{(a-b)^2}{6ab} \right\}$. 第二十六 例数ノ公差 $\frac{2}{n-1}$.

第二十七 $\frac{(2n-1)a^n}{1+x^a}$. 第二十八 $\frac{1}{nw}$.

第三十 $(n+2)ab$. 第三十二 $\frac{2p}{3}(2p+1)(2p+5)$.

第三十四

 $2^n - 1$

第三十八

$$\frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdots (5r-11)}{(r-1)!} \cdot (3a)^{\frac{r}{5}r-1} \left(\frac{2x}{5}\right)^{r-1}$$

第三十九 第三項

第四十

$$\frac{a^2 + pa + q}{(a-b)(a-c)(x-a)} + \frac{b^2 + pb + q}{(b-a)(b-c)(x-b)} + \frac{c^2 + pc + q}{(c-a)(c-b)(x-c)}$$

第四十一

$$\frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{b^{r+1}} - \frac{1}{a^{r+1}} \right)$$

第四十二

$$\frac{(n-1)x - nx^2 + x^{n+1}}{n(1-x)^2}$$

第四十三

$$na \left\{ a + (n-1)b \right\} + \frac{nb^2}{6} (2n^2 - 3n + 1)$$

第四十四

$$(2-3^{n-1})x^{n-1}$$

第四十五

$$\frac{1-(2x)^n}{1-2x} + \frac{1-(3x)^n}{1-3x} - \frac{1-x^n}{1-x}$$

第四十六

$$1, 3, 7, 13, 21, 31, \dots$$

第四十七

$$\text{凡 } \sim \text{二十六尺 } 1 \div$$

第四十八

$$4, 9, 16, 25, 36.$$

第四十九

$$\frac{2n(2n+1) \cdots (2n+r-1)}{r}$$

第五十

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{12}$$

第五十一

$$\frac{x^n \{n(x-1) - 1\}^2 + x^{n+1} - (x+1)}{(x-1)^3}$$

第五十三

$$x = \frac{\log a - \log b}{n \log c - n \log b}$$

第五十四

$$x = \frac{\log \frac{1}{2} (1 + 1/\sqrt{5})}{2 \log a}$$

第五十五

$$x = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{p-q}}, y = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{p-q}}$$

第五十八

九十五條

第六十

$$n \text{ 項} = \text{至 } n \text{ 總數 } \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right), \text{ 無窮 } \sim \text{至 } n \text{ 總}$$

數 $\frac{11}{18}$

第六十二

六分之五, 九分之八, 十八分之十七

第六十三

三種

第六十四

$$\frac{87882815}{1^2 1^2 32}, \dots$$

第六十五

$$x = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{12}}}}}}}$$

方程式定理之問題答

第一

$$x^2 + x - 6 = 0.$$

第二

$$x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0.$$

第三

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30 = 0.$$

第四

$$x^4 - 2x^3 + x^2 + 10x - 30 = 0.$$

第五 $x^5 - 4x^4 + 22x^3 - 25x^2 - 42x - 42 = 0.$

第六 $x^2 - 2x + 7 = 0.$

第七 $x^2 - 5x^2 + x + 5 = 0.$

第八 $x^2 - 4x + 6 = 0, 2 + \sqrt{-2}, 2 - \sqrt{-2}.$

第九 $c = 6, x = 2, x = -1.$

第十 $x^3 + (2q - p^2)x^2 + (q^2 - 2pq)x - q^2 = 0.$

第十一 $x^3 + 2px^2 + (p^2 + q)x + pq + r = 0.$

去分母法問題答

第三 $y^4 + 20y^3 + 13, 24y^2 + 7, 24y + 2, 24 = 0.$

第五 $y = 24x, y^3 + 9y^2 + 120y - 54 = 0.$

第六 $y = 24x, y^4 - 13y^3 + 14y^2 - 528 = 0.$

可度商問題答

第二 1, 2, 3.

第三 2, -1, -2, -3.

第四 3, 1.

第五 $1, +3, 1+1, 1-1, 1-1, 1-1,$

等商方程式解法問題答

第二 $2, 2, -1, -1,$ 第三 $1, 1, 1,$ 第四 $3, 3, -2, -2,$

方程式變換法一問題答

第六 $y^4+4y^2+3y^2-2y=0,$ 第七 $y^4-23y^2+22y+60=0,$

第八 $\frac{A^3}{3m^3}(m-1)(m-2)-\frac{AB}{m}(m-2)+C=0,$

段數乘法問題答

第四 $12x^3-2x^2-8x-2,$ 第五 $6x^3-22x^2+40,$

第六 $x^4+x^2y^2+y^4,$ 第七 $x^5-14x^3+30x^2-23x+6,$

斂合除法問題答

第一 $1-2x+2x^2-2x^3+\dots\dots\dots$ 第二 $1-x+x^2-x^3+x^4-\dots\dots\dots$

第三 $a^2-3a^2x+3ax^2-x^3$, 第四 $a^2-3ax+5$.

第五 $x^6+x^2y+x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+x^2y^5+xy^5+y^6$.

方程式變換法三問題答

第五 $y^2-35y-100=0$.

第六 $27y^2+27y^3-139=0$, 或 $y^3-y^2-5=0$.

第七 $y^4+4y^3-15y-4=0$, 或 $y^4-4y^3+y+10=0$.

反號商問題答

第一 $-3, -2, -1, 3, -2, 1, 3$, 第二 $-1, +2, -2, -1, (-5), -2, 1, (-5)$.

對合商問題答

第一 $-1, 1+2, (-1)$, 第二 $-1, (-1, -2, 1, (-1)$.

第三 $-1, -6, 3, -1, (-2)$, 第四 $-1, 2, -1, 1, 3$.

第五 $2, -1, 3, -1, 1, (-1)$.

三次方程式解法問題答

第一 $2, -1, -1$, 第二 $1, 4, -2, 1, (-3)$, 第三 $-2, 1, 1, (-2)$.

第四 $x^2+1, 4, \frac{1}{x^2/4} \left\{ -(1+x^2/2) \pm (1-x^2/2)^{1/2}(-3) \right\}$.

第五 $\frac{2}{9}-\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}}{2} \pm \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}}{2}, 1, 1, -7$, 第六 $11, 11, -7$.

第七 $-8, 1, 1, (-2)$, 第八 $2a, -a \pm b\sqrt{3}$.

第九 $3.146264, .317837, -3.464102$.

四次方程式解法問題

- 第一 $-4, 2, 1 \pm 2\sqrt{(-1)}$ 第二 $1, -2, \frac{1}{2} \left\{ -3 \pm \sqrt{(-3)} \right\}$
 第三 $-\frac{1}{6} - \frac{1}{3} - 2, -1, 6 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$

實商極問題答

- 第二 六 第三 四 第四 三 第五 三
 第六 五 第七 四
 忽拿氏解法問題

- 第三 5.1345787253 第四 3.7267936782 第五 7.6172797559
 第六 $3.3792053825, 4.5875359541, -6.9667413367$
 第七 $1.7191292611, 6.5461457261, -4.2652749871$
 第八 $4.4604168201, -4.9296646474$
 第九 $-1.796849250, 10.2583086356$

- 第十 $2.8583833082, 6060183069, 4432769396,$
 -3.9073785547

- 第十一 $-3.0653157913, -6915762805, -1756747993,$
 $8795057084, 3.0530581627$

雜問八答

- 第一 -2 第五 $\frac{b_1}{a_1(2-a_1)}$
 第七 一尺二尺三尺 第九 三百四十五
 第十一 上八圓 中六圓 下五圓 第十一 四十五里
 第十二 二寸二四六九七九六〇三七餘 一寸八〇一九三七七三五八餘
 第十三 初年利率一割 次年利率二割 第三年利率三割
 第十四 米一斗 麥一斗二升 黍一斗五升

代數學諸法雜問答

- 第一 $7x-2y-6z$. 第二 ax^2+bx^2+c . 第三 $x-a$.
- 第四 $\frac{6}{x-1}$. 第五 $\frac{c^2+a-2}{1}$. 第七 各五十日
- 第六 四十九分五秒十一分秒之五
- 第八 $2x-3y+z$. 第十 $\frac{x^4}{x^2+y^2}$. 第十一 $x=\frac{ac}{b}$.
- 第十二 $x=2$. 第十三 $x=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}, y=\frac{a^2+b^2}{2ab}, c$.
- 第十四 $\sqrt{a+1/b}$. 第十五 $x=1, y=4, z=27$. 第十六 $x=1, y=2, z=3$.
- 第十七 $3x^2-53x+34=0$. 第十八 $a=3, b=1, c=-2$.
- 第二十一 2. 第二十二 60. 第二十三 1. 第二十四 $\frac{a-b}{3}$.
- 第二十五 1. 第二十六 1. 第二十七 二倍 第二十九 -2.
- 第三十 $\sqrt{a-3}+\sqrt{b-c}$. 第三十一 1. 3.
- 第三十二 $4(ax+by+az)$. 第三十四 三十升

- 第三十五 十日 第三十六 $0, 1, 1, 1, 1$. 第三十七 $\frac{x^2-a^2}{a^2x^2}$.
- 第三十八 $x=a, y=b$. 第四十 $\frac{a-x}{4ax}$. 第四十一 $\frac{4ax}{a-x}$.
- 第四十二 $x=2, 7, \frac{1}{2}, 9, 1, 1, 5$. 第四十三 $x=a, \frac{1}{a}$. 餘略
- 第四十八 $\frac{(a+b)^{n+1}}{(a-b)^{n+1}}$. 第四十九 四里八分里之七
- 第五十 $2x^2-x^2-3$. 第五十一 $x=b$. 第五十二 $x=5$.
- 第五十五 x^2 . 第五十六 $x=y=x=c^2+t^2+c^2-ab-ac-bc$.
- 第五十七 $1, 1, 1$. 第五十八 $1, 1, 1$. 第五十九 $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$.
- 第六十 $\frac{pb}{a}\left\{1+\frac{m+n}{n-p}\frac{a}{n}\right\}$.
- 第六十二 $(ac-dc)^2=(ab-db)(bc-bc)$.
- 第六十三 $a^2b^2c^2-b^2c^2+a^2b^2c-bc^2+a^2b^2c-bc^2=0$.
- 第六十四 $d^3+pe^2+qa+r=0$.

第六十五

$$\frac{a-d}{d-a'} = \frac{b-b'}{b'-b''} = \frac{c-c'}{c'-c''}$$

第六十六

$$(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}})^2 a^2.$$

第六十七

$$\frac{\frac{m}{n} + \frac{m}{n}}{\frac{m}{n} + \frac{m}{n}} + \frac{\frac{m}{n}}{\frac{m}{n} + \frac{m}{n}} = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{m}{n} + \frac{m}{n}}$$

第六十八 三尺

第六十九

$$\frac{c^2 + b^2}{a + b}.$$

第七十三

$$x = a; y = b; z = c.$$

第七十四

距離十六里

初メ甲ハ每時四里ヲ行キ乙ハ每時三里ヲ行ク

第七十五

$$\frac{c}{p} \left\{ \frac{m-q}{m-n} \frac{nc}{d} - \frac{m-p}{m-n} \frac{na}{b} \right\}.$$

第七十九

$$x = -3a. \text{ 第八十三 } \frac{2q}{p}$$

第八十四

$$\text{前式 第八十六 } x = \sqrt{\left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{(a^2 + b^2) + a} \right] \cdot y = \sqrt{\left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{(a^2 + b^2) - a} \right] \right\}}.$$

第九十

$$1 = \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{c}{a} - \frac{a}{c} \right)^{\frac{2}{3}}. \text{ 第九十二 } x = \frac{c^2}{a}.$$

第九十三

$$2c = \pm \sqrt{(a+b+c) \pm 1} \cdot \sqrt{(2b) \pm 1} \cdot \sqrt{(2c)}.$$

第九十四

$$a + b + c = 0.$$

第九十五

$$a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4.$$

第九十六

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 0.$$

第九十七

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}.$$

第九十八

$$5(a^2 - c^2)(2a^2 + b^2) = 9a^2 c^2 - c^5.$$

第九十九

$$ab = 1 + c.$$

第一百 x=7.

第一百一 $-7\frac{1}{2}.$

第一百

$$2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots, \text{ 或 } 1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \dots$$

第一百

$$\frac{1}{12}(x+1)(2x^2+x-3).$$

第一百五 $s = \frac{1}{2}f^2.$

第一百

$$\frac{ab}{2a-b} \frac{ab}{3a-2b} \frac{ab}{4a-3b}.$$

第一百 120.

第一百九 $70a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$

第一百

$$\frac{1}{2x+1} \frac{4}{x+2} + \frac{9}{2(x+3)}.$$

第一百

$$x + (a-b)x^2 + (a^2-ab-c+d)x^3 + \dots$$

第一百

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \dots$$

第一百三

$$\frac{1}{6}(n-6)(n^2-1).$$

第一百

$$\frac{3}{4} \frac{bc}{a^2} \frac{b^3}{16a^{\frac{3}{2}}}$$

第一百五

$$\frac{x^{n-1}}{n-1} \text{ 第一百六 } \frac{2}{n(n+1)}.$$

第一百

$$\frac{1+x}{(1-x)^2} \cdot \text{第一百八 } 3^{n-1} \text{ 第一百九 } y = b + \frac{ax}{3b} - \frac{a^2x^2}{3^2b^2} + \frac{a^3x^3}{3^3b^3}.$$

- 第二百十 $\sqrt{\left(\frac{\log p}{\log a}\right)}$ 第二百一十一 $a + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} + \dots$
- 第二百十二 $173+385i$ 第二百二十三 2.46954565
- 第二百二十四 6 第二百二十七 $-n(-1)^n$
- 第二百二十八 $\frac{1}{4} \left\{ 1 - 2n + 1(-1)^n \right\}$ 第二百二十九 $\sqrt{(p^2+4p)}$
- 第二百三十 \sqrt{x} 第二百三十三 $\frac{1}{2}(pq+1)$
- 第二百三十五 $x=2.465$ 第二百三十六 2
- 第二百三十七 $x^2-ax-b=0$ 上式ノ商ヲ以テ所要ノ値トス
- 第二百三十八 $\frac{Aa^2-Ba+C}{(a-b)(a-c)(1+ax)} + \frac{Ab^2-Bb+C}{(b-a)(b-c)(1+bx)} + \frac{Ac^2-Bc+C}{(c-a)(c-b)(1+cx)}$
- 第二百三十九 $x = \frac{\log(\log c) - \log(\log a)}{\log b}$ 第二百四十一 7
- 第二百四十三 $\frac{1.3.5 \dots (2r-1)}{2^r a^{2r}} \left| \frac{1}{x} \right|^r, \frac{1.3.5 \dots (2r-1)}{2^r a^{2r-1}} \left| \frac{1}{x} \right|^r$ 第二百四十四 十種

- 第二百四十五 $0 \rightarrow 1$ ノ間ニ兩商アリ又 $0 \rightarrow 1$ トノ間ニ一商アリ
- 第二百四十六 $11 \frac{96}{96}$ 第二百四十八 $\frac{a+bc-(ac+b)c^2+1}{c^2(1-c^2)}$
- 第二百五十三 $4368x^5$ 第二百五十六 $\frac{3n}{3n+2}$
- 第二百五十七 $x^4-14x^2+48x-35=0$ 第二百五十八 $\frac{1-(1-\frac{1}{n})^r(1-\frac{1}{n})}{n}$
- 第二百五十九 $ac^{2m}=c^{2m}x$ 第二百六十二 $n^3+(n-1)^3$
- 第二百六十 $\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$ 第二百六十七 $p \left\{ \frac{mr+m+r}{n} \right\}^n$
- 第二百六十九 2
- 第二百七十 $-3.048917, 1.356896, 1.692021$
- 第二百七十一 $\frac{1-5x^2}{1-3x+4x^2}$ 第二百七十二 $\frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{r^n-1}{r-1} \right) a$
- 第二百七十九 $aa^r(a+br)^{n-1}$ 第二百八十 $3-1/(-2)_2, 2, 3$
- 第二百八十一 2^{-n} 第二百八十二 $\frac{n}{n+(n+1)^2}$

第百八十三	$\frac{n(n+2)}{2n+1}$	第百八十六	$\left(\frac{1-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$
第百八十九	$\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+r)}{1^r}$	第百九十一	$\frac{(r+1)x^r - rx^{r+1}}{(1-x)}$
第百九十二	$-\left\{\frac{a^2+pa+q}{a^{n+1}(a-b)(a-c)} + \frac{b^2+pb+q}{b^{n+1}(b-a)(b-c)} + \frac{c^2+pc+q}{c^{n+1}(c-a)(c-b)}\right\}$	第百九十七	$\frac{1-x^{2m}}{(1-x^2)^2} \cdot m=2^m$
第百九十五	$\frac{n}{(1+x)(1+x+nx)}$		

代數教科書答終

井

業行	問題	誤	正	業行	問題	誤	正
222 3	5	$q, (-cn)$	$h, (-cn)$	21	19	$x: y:: m^2: n^2$	$x: y:: m: n$
288		$96x-36x=0$	$96x-36=0$	25 11	5	$\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} =$	$\frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{x^2} =$
321 6		$\neq \text{カ} \text{---} \text{ト}$	$\neq \text{---} \text{カ} \text{---} \text{ト}$	86		由テ七中項	由テ問テ七中
325 12		$1 \neq S \neq 2$	$1 \neq S \neq S^2$	90 11		$\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} =$	$\frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{x^2} =$
328 4		$\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$	$\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$	127 8		$\dots(p-1)$	$\dots(p+1)$
337 12		$p \neq$	$q \neq$	159 9		$d'=a,$	$d'_1=a,$
339 8		兩乘子	兩乘子	171 5		$\log\left(\frac{n}{m}\right)=$	$\log_n\left(\frac{n}{m}\right)=$
364 式		$=R_{n-1}Q-R_n$	$=R_{n-1}Q_n-R_n$	177 4	11	$\log_n\left(\frac{n}{m}\right)$	$\log_n(\sqrt[n]{m})$
366 2		亦 數	數 亦	189	8	$\frac{n(c-\frac{c^2}{2})}{m} + \dots$	$\frac{x(c-\frac{c^2}{2})}{M} + \dots$
371 1		$x=-4, ++$	$x=-4, --$	202 2	5	$\exists y \ a \ m$	$\exists y \ a \ b \ m$
375 12		U'	U'	205 9		$=D_1=-D_1$	$=D'_1=-D_1$
398	78	$\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}$	$\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}$	206 7		$\frac{1}{Q^2}$	$\frac{1}{Q'^2}$

跋

代數學西名ハ阿爾熱巴拉アルゼブラト云フ亞利伯アリビノ語ナリ之ヲ譯スレハ補足相消ト謂フカ如シ元來方程式ヨリ得來ル名ナリ此法始ヨリ屢々變改アリ愈改テ愈精シ故ニ今ノ代數學ハ往古ノ術ニ異ナリ之ヲ今ノ新學ト謂フモ可ナリ今略其源流ヲ述ヘン其何國何人ノ創ル所ナルヲ詳ニセスト雖モ埃及國ノ盛時年代不詳亞力山太アレキサンドリアニ丟番都ディオファントスト云フ人アリ希臘ノ人ナリト云フ說アリ不詳書十三卷ヲ著ス是レ今ノ知ル所ノ最モ古キ者ナリ其書今存スル者議カニ六卷ノミ其書算術ノ題ヲ載ス其法唯數ヲ用テ符號ヲ用ヒス其人ノ自造ル者カ天竺ヨリ傳フル者カ知ルヘカラス而ルニ當時天竺已ニ此法アリ且ツ丟氏ノ法ヨリ精シ破斯亞利伯ブルシヤ皆其法ヲ傳フト云フ然レモ精ハ之レニ逮ハス

我朝仁德天皇ノ時西曆四百年代亞力山太ニハイパシヤト云ヘル女アリ博學多能著作多シ同民亞力山太ノ圖書館ヲ燒ク其書大概烏有ニ歸ス

今傳フル所丟氏算法ノ註釋アリト云フ

文龜永祿ノ間西曆一千六百年代羅馬ノバチカン圖書館ニ於テ丟氏ノ著作ヲ發見ス總テ希臘ノ文ナリ

天正三年西曆一千五百七十五年ニ至テ日爾曼ノザイランドル之レテ羅
甸語ニ譯ス元和七年西曆一千六百二十一年佛國ノメゼレーキノ譯本更ニ
精シ寛文十年西曆一千六百七十年佛國ノノエルモート亦丟氏ノ算法ノ註
釋ヲ作レリ

蓋シ代數學ハ初メ天竺ヨリ亞剌伯ニ傳フ弘仁天長ノ間西曆八百十三年ヨ
リ八百三十三年ニ至ル亞剌伯ノ數學家便麼西代數學ノ書ヲ著ス其書今猶
英國阿克羅斯福德ノボトレヤン圖書館ニ在リ天保二年西曆一千八百三十
一年英國ノローヒン之レテ英文ニ譯ス是ヨリ先キ以太利ノ博那洗天竺ヨリ
之レテ本國ニ傳フ薄氏ハ壯年ニシテ巴々利ニ在リ九數字ヲ用テ數ヲ算ス
ルノ法ヲ善クス建仁ノ初メ西曆一千二百二年ニ算術書ヲ編ス後チ安貞年

間西曆一千二百二十八年ニ至テ再撰ス此時印刷術發明前二百年ナルヲ以
テ印行ノ書ナシ此手書元和元祿ノ間ニ西曆一千七百年代フロレーンズノ
メルザベキヤン圖書館ニ在ルヲ見タリ

薄氏天竺ヨリ代數學ヲ傳フルノ後凡ソ三百年間之レテ學フ者稀ナリ明應
三年西曆一千四百九十四年ニ至リテ以太利ノローカスデボルゴ代數學ヲ印
行ス之レテ西國代數學印行ノ初トス其書題シテ算術幾何比例合篇ト云フ
歐洲ニテ代數學ヲ傳フルハ以太利最モ早シトス而シテ弗里耶斯大太里耶
迦但佛拉利等ノ諸士起ルニ及ヒテ此學大ニ進ム永正二年西曆一千五百五
年弗里耶斯三次方程式解法ヲ造ル次テ大太里耶更ニ其法ヲ訂正ス天文十
四年西曆一千五百四十五年迦但三次方程式解法ヲ印行ス迦但ノ門ニ佛拉
利出ツ天正七年西曆一千五百七十九年創テ四次方程式解法ヲ造ル元龜三
年西曆一千五百七十二年ボムベリー代數論ヲ著ス是レヨリ此學以太利國
ニ盛ナリ

天文十三年西曆一千五百四十四年日爾曼ノ思鐵法利整數四術ヲ著シ創テ符號十一ノヲ用フ同十九年西曆一千五百五十年ニ英國ノ立可佛國ノ白勒得利各此學ヲ本國ニ傳フ此時立可創テ適等號ニヲ用フト云フ然レニ未タ未知數ニ符號ヲ用フルノミ已知數ハ總テ數字ヲ用フ肥乙太ニ至テ創テ己知數ニ符號ヲ用フ是レ今ノ代數學ノ濫觴ナリ肥乙太ハ佛國ノ人ナリ數學ヲ善クス方程式ノ性理ニ於テ發明スル所多シ寛永八年西曆一千六百三十一年英國ノホーリット荷蘭ノサラルド皆肥乙太ノ法ヲ脩テ更ニ進ム是ヨリ此學歐洲ニ盛ナリ

初メ天竺未知數ニ五色ノ名ヲ用フ波斯亞利伯亦各方言ノ物名ヲ用フ其傳テ歐洲ニ入ルヤ以太利英國仍ホ物名ヲ用フ故ニ物術トモ云ヘリ文祿二年西曆一千五百九十三年蘇格蘭ノ訥白爾創テ對數ヲ造ル慶長十九年西曆一千六百十四年ニ至テ對數用法錄ヲ著ス凡ソ西土ノ曆數家心服モザルモノナシ然レニ此書猶三項ノ缺アリ一ニ曰ク對數ノ正負明ナラス二

ニ曰ク眞數増加スルハ對數却テ減スルアリ三ニ曰ク對數底無窮級數ニシテ算シ易カラサル是レナリ同時英國倫敦ニ巴理知ト云フ人アリ數理ニ明ナリ訥白爾ノ對數ヲ訂正シテ對數底ヲ十トナシ以テ新對數ヲ造ル此種ノ對數ハ總テ正數ニシテ眞數増加スルハ倍ニ増加スル者ニテ最モ日用ニ適ヘリ自ラ一ヨリ二萬ニ至リ又九萬ヨリ十萬ニ到ル各對數ヲ十四位迄算ス寛永元年西曆一千六百二十四年ニ至リテ之レヲ剖削ニ附ス乃チ對數算術ト題ス後チ寛永五年西曆一千六百二十八年ニ至テ荷蘭ノ巴拉哥亦對數算術ヲ著ス此書一ヨリ十萬ニ至ル對數各十位ヲ載ス

元和以後西曆千六百年以後新法ノ發明尤モ多シ愛倫ノアランケル連分數ヲ造リ佛國ノ代加德指數ヲ造リ英國ノ奈瑞合名法ヲ造リ英國ノ忽拿方程式ノ實商ノ畧近數ヲ示ルノ法ヲ造リ瑞西ノ斯都莫方程式ノ實商ノ限界ヲ知ルノ法ヲ造ル此他蘇格蘭ノ馬格老臨戴老英人麼甘ペーコック佛人ホンテインフホーリル瑞西ノ尤拉日爾曼ノゴース那威ノアベル等ノ大家起テ此

學益々進ム薄氏創テ天竺ヨリ傳フルノ昔ヲ回想スレハ其高キヲ思想ノ及
ハサル所ナリ而シテ此ノ如ク精妙ヲ極ル所以ノモノ偏ニ先輩好學ノ效ナ
リ希ハ後ノ學者先輩ノ功勞ヲ懷ヒ勉己マス以テ此學ヲシテ更ニ高大ノ
域ニ進ルヲアラント明治十五年三月田中矢德謹誌

明治十五年一月十九日板權免許
同 年六月二十日出版

定價金壹圓五拾錢

抄譯人

靜岡縣士族 田中矢德

神田五軒町二十番地

出版人

三重縣士族 近藤眞琴

芝新錢座町十番地

東京日本橋區通三丁目拾四番地 丸屋善七

同芝 神明前 和泉屋市兵衛

同芝 柴井町十六番地 土屋忠兵衛

同日本橋區兩國吉川町六番地 島屋一介

同芝 露月町二十三番地 米倉屋順三郎

同芝 神明町三番地 共益商社

發兌書肆

東 京 書 林

須原屋茂兵衛
山城屋佐兵衛
須原屋新兵衛
和泉屋吉兵衛
轉文社
鴈金屋清吉
瑞穂屋卯三郎
大和屋松之助
出雲寺万次郎
梶屋喜兵衛
近江屋半七
和泉屋幸之助
島屋平七

小學習字本

日本國名盡

岡守節書 貳冊

定價 金拾貳錢宛
明治十一年十二月四日出板

右同

萬葉假名

右同

壹冊

定價 金拾貳錢
明治十一年十二月四日出板

合衆國史直譯

藤田 潜譯

小本 全四冊

定價 金貳拾五錢宛
明治十四年九月七日出板
第三第四 近刻

原書

ロヒンソン氏
トードホントル氏
チャンブル氏

代數教科書

近藤 眞琴
鈴木 長利
校編

西洋綴 全貳冊

定價 第一金貳圓
同 第二金壹圓五拾錢
明治十五年二月十九日出板
第二 年 六月二十日出板

同 解 式

同 斷

西洋綴 全壹冊

定價 金三圓
明治十五年八月出板

原書
トイドホル氏
ウキルソ氏
幾何教科書
同斷
西洋綴
全貳冊
第一平面之部
定價金壹圓五拾錢
第二立體之部
定價金壹圓五拾錢
明治十五年八月出版
第二近刻

原書
トイドホル氏小
平三角教科書
同斷
西洋綴
全壹冊
定價金三圓
近刻

原書
トイドホル氏小
平三角教科書
同斷
西洋綴
全壹冊
定價金壹圓五拾錢
近刻

同
解式
同斷
西洋綴
全壹冊
定價金壹圓五拾錢
近刻