

しょう がく せい お と な たの
小学生から大人まで楽しもう！

さん すう エ ン ジ ョ イ すう がく
「わくわく算数・enjoy数学」
プロジェクト



2021年度

福岡教育大学大学院 1 年 有元ゼミ & 有志大学院生

はじめに

みなさん、こんにちは。私たちは福岡教育大学大学院で数学教育について学び、研究をしています。今回は、小学生から高校生、さらに一般の方を対象として、算数・数学の楽しさをお届けしようと、本学のある宗像市のご協力をいただき、プロジェクトを立ち上げました。

今から、わずかな時間かもしれませんが、算数・数学の魅力をお伝えしたいと思います。日ごろ「なぜ？」という疑問をもつことも多いと思いますが、このときが学ぶチャンスです。そういうときは、是非一度立ち止まってその問題について考えてみてください。このテキストは、2つの章から構成されています。

第1章では、主に小学生や中学生のみなさんを対象として、身近にある「数取りゲーム」を取りあげました。実はこのゲームのなかに、算数・数学のおもしろさが隠れています。このゲームには必勝法があり、みなさんと一緒に考えていきたいと思っています。そして、後半の「コラム」では、前半での考察を一般化することにより、さらに広い範囲において必勝法を見い出していきます。ここでの内容は高校生のみなさんにも読んでいただける内容です。

第2章では、主に高校生や一般の方を対象として、確率の話題を取りあげました。なかでも最近話題になっている「ベイズ統計」について、その基礎となるベイズの定理を扱います。この定理は、高等学校で学ぶ条件付き確率の考え方で説明することが出来ます。そして、後半は一見くじ引きにおける確率の考察から、私たちの生活について重要な教訓を得ることができる例を取りあげます。

それではみなさん、今から算数・数学の旅に出かけましょう！

目次

第1章 やってみよう！ 数取りゲーム

このゲームの必勝法はみんなに分かるかな？

(小学生～中学生向け)..... 2

第2章 私たちの直感を裏切る意外な確率

身近な確率論や統計学への誘い

(高校生～一般向け)..... 6

やってみよう！

かずと 数取りゲーム

このゲームの必勝法はみんなに分かるかな？

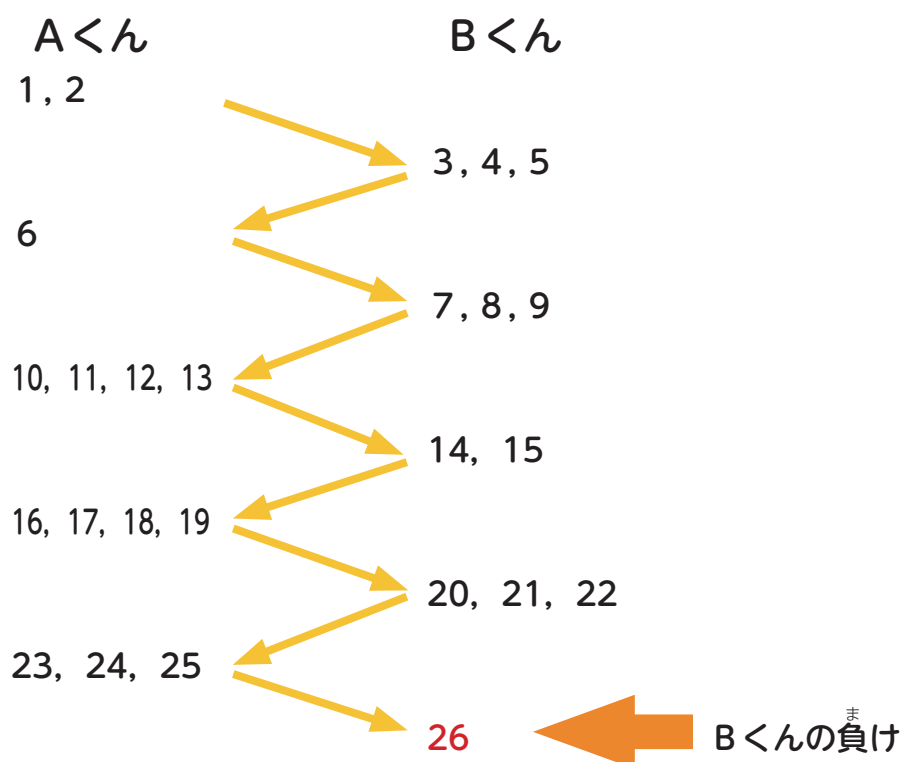
○ ゲームのルール

- ・ 2人1組で行う。
- ・ 1から順番に整数を交互に言い合う。
- ・ お互い4つまで言うことができる。
- ・ “26” を言ったほうが負け。

やったことある人もいるかな。



例 AちゃんとBくんがゲームをしています。今回はAくんが先攻、Bくんが後攻です。



じつ 実はこのゲームには必勝法があるよ！みんなもやってみよう！



26 を言ったら負けだから、どうしたらいいだろう？

自分が 25 で終わるようにすればいいんじゃないかな。

かんが 考えよう ①

【自分が 25 で終わるためには・・・】



この4つの状況なら勝つことができる。

4つまで進めるから、相手が 21 ～ 24 で終われば自分が 25 を言って勝つことができるね！でも、そのようなことはできるのかな・・・。



できるのかを考えてみよう！

相手が 21 ～ 24 で終わるようになるためには、自分は何を言えばいいのかな？



かんが 考えよう ②

【相手が 21 ～ 24 で終わるようになるためには・・・】

4つまで進めるから、もし自分が 21 で終わると相手は 25 まで進めることができ自分には負ける。



考えよう①で考えたように、相手が 21 ～ 24 で終わるようになるためには、自分は 20 で終わるといい。



かんが かんが く かえ かんが ひっしょうほう わ き
考えよう①, 考えよう②を繰り返し考えていくと必勝法が分かりそうな気がする!



やってみよう ① 【自分が20で終わるためには・・・】

かんが かんが かた つか
考えよう①の考え方を使って,
じぶん お あいて お
自分が20で終わるためには, 相手は□～△で終わるといい。

あいて お じぶん お
相手が16～19で終わると, 自分は20で終わることができるね!



やってみよう ② 【相手が□～△で終わるようにするためには・・・】

かんが かんが かた つか
考えよう②の考え方を使って,
あいて お じぶん お
相手が□～△で終わるようにするためには, 自分は○で終わるといい。

○ まとめ

やってみよう①, やってみよう②を繰り返し行くと, 最終的には, あいて い か わ
相手が1を言うと勝てることが分かるんだ。
つまり, まとめると・・・

- じぶん こうこう
・ 自分が後攻になる。
- じぶん ぜったい ばいすう い
・ 自分が絶対に5の倍数を言う。

おこな ひっしょうほう
この2つを行うことが, このゲームの必勝法だよ!!

コラム
Column 中学生・高校生の方へ

前半で考えた数取りゲームでは，“26”を言ったほうが負けでしたが，“26”が“ x ”のときを考えてみましょう。

このとき、自分が $x - 1$ で終わるように言えば勝つことができます。

相手がいくつ進めようとも、次に自分が進める数を調整すると、相手が進めた数と自分が進めた数の和を 5 にすることができます。

ここで、 $x - 1$ を 5 で割ったときの商を k 余りを r とすると $x - 1 = 5k + r$ ($0 \leq r \leq 4$) と表せます。

(1) $r = 0$ のとき 後攻が有利

$x - 1 = 5k$ となるので、 $x - 1$ は 5 の倍数となります。

自分が後攻になり、相手と自分の 1 ターンでちょうど 5 ずつ進むことで、自分が $x - 1$ で終わるように言うことができます。

(2) $r \neq 0$ のとき 先攻が有利

自分が先攻になり、 $r = 1$ ならば 1 で終わるように、 $r = 2$ ならば 2 で終わるように、 $r = 3$ ならば 3 で終わるように、 $r = 4$ ならば 4 で終わるように言います。すると、 $x - 1 - r$ が 5 の倍数になるので、(1) で考えたように、相手と自分の 1 ターンで 5 ずつ進むことで、自分が $x - 1$ で終わるように言うことができます。

コラムでは，“26”という具体的な場合ではなく，“ x ”という文字を使って、先攻と後攻のどちらがゲームで有利かについて考えました。

算数・数学について、これから学んでいくと、交互に言い合う整数の個数を“4”ではなく，“ n ”という文字を使って、より一般的な場合について考えることができます。興味がある方は，“ n ”の場合を考えてみてください。

【第 1 章 参考文献】

文部科学省 (2019) 「高等学校学習指導要領 (平成 30 年告示) 解説 数学編 理数編」 pp.7-8.

私たちの直感を 裏切る意外な確率

身近な確率論や統計学への誘い^{いざな}

この章では、主に高校生から一般の方までを対象に、私たちに身近な確率のお話をさせていただこうと思います。以下に紹介させていただく話題は、すでにご存知のかたもいらっしゃると思います。確率論や統計学を身近に考えて頂きたく、今回は比較的やさしい内容を扱います。

まずは、最近話題になっている「ベイズ統計」につながるベイズの定理に関する題材です。

問題 1

ある製品を 2 か所の a 工場と b 工場で製造している。

この製品は、a 工場で 80%，b 工場で 20% 製造されており、不良品が出る確率はそれぞれ 0.1%，0.3% である。

多数の製品のなかから 1 個を無作為に選んだとき、それが不良品であった。
このとき、その製品が a 工場の製品である確率を求めてみよう。

【解答】

無作為に選んだ製品が a 工場の製品であるという事象を A ，b 工場の製品であるという事象を B とする。

選んだ製品が不良品であるという事象を E とする。

事象 A の起こる確率を $P(A)$ と表すと、 $P(A)=0.8$ ， $P(B)=0.2$ である。

事象 E が起こっている状況のもとで、事象 A が起こる確率(条件つき確率)を $P_E(A)$ と表すと、

$$P_E(A) = \frac{P(E \cap A)}{P(E)} \quad (1)$$

で定義され、また、

$$P(E)=P(A \cap E)+P(B \cap E) \quad (2)$$

であり、また、(1)式より $P_A(E)=\frac{P(A \cap E)}{P(A)}$ だから、この式の両辺を $P(A)$ 倍することにより

$$P(A \cap E)=P_A(E) \times P(A) \quad (3)$$

を得る。したがって(1)～(3)式より、

$$P_E(A)=\frac{P(E \cap A)}{P(E)}=\frac{P_A(E) \times P(A)}{P(A \cap E)+P(B \cap E)} \quad (4)$$

を得る。ここで、(4)式において、(3)式より、

$$P(A \cap E)+P(B \cap E)=P_A(E) \times P(A)+P_B(E) \times P(B) \quad (5)$$

であるから、

$$P_E(A)=\frac{P_A(E) \times P(A)}{P_A(E) \times P(A)+P_B(E) \times P(B)} \quad (6)$$

を得る。与えられた条件より、 $P_A(E)=0.001$ 、 $P_B(E)=0.003$ だから、(6)式に代入して、

$$P_E(A)=\frac{0.001 \times 0.8}{0.001 \times 0.8+0.003 \times 0.2}=\frac{0.0008}{0.0014} \div 0.571$$

である。だから無作為に 1 個を選んだ製品が不良品であったとき、その製品が a 工場の製品である確率は 約 0.571 (約 57.1%) である。(終)

b 工場のほうが不良品が出る確率が高いが、不良品が出たときにそれが b 工場製である確率は a 工場製である確率よりも低いことが分かります。また、この問題は工場が 3 か所以上の場合にも一般化できます。この例以外にも、私たちの直感を裏切る確率が身近に存在しているかもしれません。

【別解】

この問題は、次のように考えることもできます。詳しくは各自考えてみよう。

【解答】と同様に、事象 A 、 B 、 E を定め、事象 A の余事象を \bar{A} で表す。このとき、

$$P(A \cap E)=P(A) \times P_A(E)=0.8 \times 0.001=0.0008 \text{ (0.08\%)}$$

$$P(A \cap \bar{E})=P(A) \times P_A(\bar{E})=0.8 \times 0.999=0.7992 \text{ (79.92\%)}$$

$$P(B \cap E)=P(B) \times P_B(E)=0.2 \times 0.003=0.0006 \text{ (0.06 \%)}$$

$$P(B \cap \bar{E})=P(B) \times P_B(\bar{E})=0.2 \times 0.997=0.1994 \text{ (19.94\%)}$$

である。表にすると、次ページで提示したようになる。

ここで、 $P(E)=P(A \cap E)+P(B \cap E)=0.0008+0.0006=0.0014$ だから、

$$P_E(A)=\frac{P(A \cap E)}{P(E)}=\frac{0.0008}{0.0014} \div 0.571$$

が得られる。(終)

表 4つの場合のそれぞれの確率

	E 不良品	\bar{E} 不良品でない
A a 工場の製品	$A \cap E$ 0.0008 (0.08%)	$A \cap \bar{E}$ 0.7992 (79.92%)
B b 工場の製品	$B \cap E$ 0.0006 (0.06 %)	$B \cap \bar{E}$ 0.1994 (19.94%)

ここで、ベイズの定理を紹介します。これからの時代、私たちにとって、ますます統計学の素養が必要とされてくるのではないのでしょうか。興味をもたれたかたは、是非、この機会に統計学を学んでみてはいかがでしょうか。

【発展】ベイズの定理

Ω を全事象、 A, B を Ω に含まれる事象とすると、 $\Omega = A \cup \bar{A}$ であり、 $P(A), P(\bar{A}), P(B) > 0$ を満たすものとする。このとき、先ほど得られた(6)式

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A})}$$

が成り立つ。これをベイズの定理という。

次の話題は、「小さい確率でも積もり積もるとどうなるのでしょうか？」ということについてみなさんと一緒に考えていきたいと思います。次の問題も、よくあるものですが、得られた結果の意味を考えると、私たちに多くの教訓を与えてくれるものかもしれません。

問題2

100 本の中に 1 本の当たりが入っているくじがある。

このなかからくじを 1 本引き、引いた後に元の状態に戻すものとする。

このようにして、くじを続けて 100 回引いたとき、少なくとも 1 回は当たる確率を求めてみよう。

- ① どれくらいか直感で予想してみよう。
- ② 実際に計算して求めてみよう。
- ③ ②の結果から得られる教訓は・・・。

①はみなさんそれぞれで考えてみてください。

くじを 1 本引いたとき当たる確率は $\frac{1}{100}$ ですが、100 回引いたときに、少なくとも 1 回当たる確率は $\frac{1}{100} \times 100 = 1$ にはなりません。実際に②で求めてみましょう。

② **【解答】**「くじを続けて 100 回引いたとき、少なくとも 1 回は当たる」という事象を A とする。

この事象の余事象 \bar{A} は「くじを続けて 100 回引いたとき、100 回ともすべてはずれる」である。この事象 \bar{A} の起こる確率 $P(\bar{A})$ は、

$$P(\bar{A}) = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100} \doteq 0.366$$

だから、求める確率 $P(A)$ は、

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100} \doteq 0.634$$

である。このことから、約 0.634 (約 63.4%) である。(終)

③ 確率の計算としては、②で述べたように求めることができます。この事実が私たちに訴えていることは何でしょうか？例えば「くじを引く状況」を自然災害に置き換えてみましょう。

仮に、1 年間で大きな規模の地震が起きる確率が 0.01 (1%) であったとします。それが小さい確率であったとしても、100 年間で考えてみると、②の考察により 約 0.634 (約 63.4%) の確率で大きな規模の地震が起きることになります (注：地震の起こる確率については、様々な解釈や状況設定等があり、詳しくは専門書等を参照する必要があります。今回は、あくまでも参考として取りあげています)。

高校生のみなさんは、指数関数についてすでに知っているかもしれません。

ある自然災害の起こる確率を p として、 x 年間のうちにこの自然災害が起こる確率は x の関数となり、それを $f(x)$ とすると、

$$f(x) = 1 - (1 - p)^x$$

と表すことができます。ここで、変数 x を 0 以上の実数で考えることにします。

ここで p は定数なので $1 - p$ も定数となり、 $(1 - p)^x$ の部分は x を変数とする指数関数になります。パソコンなどで関数 $f(x)$ のグラフを描いてみるとより分かりやすいと思います。是非取り組んでみてください。

第 2 章では、普段の私たちの生活に身近な話題として確率論や統計学の初歩を取りあげました。なお、この章を執筆するにあたり、下記の参考文献を参考にさせていただきました。さらに詳しく学びたい方はぜひ読んでみてください。数学の魅力は、このように私たちの身近に存在しています。日ごろの「なぜ」という探究心を大切にして、その解決方法を考えていたら、新たな発見があるかもしれません。

【第 2 章 参考文献】

笠原勇二 (2010) 「明解 確率論入門」 数学書房, pp.80-97.

小林正弘・田畑耕治 (2021) 「数学のかんどころ 39 確率と統計 一から学ぶ数理統計学」 共立出版, pp.14-30.

小林道正 (2012) 「デタラメにひそむ確率法則 地震発生確率 87% の意味するもの」 岩波書店, pp.107-115.

おわりに

みなさん、ごくわずかな時間でしたが、算数・数学の旅はいかがだったでしょうか？
算数・数学は本当に魅力的で楽しい学問です。

そんな魅力の一端を少しでもお伝えできれば、嬉しく思います。

本来、算数・数学は、一つ一つ順に追って学んでいけば、かならず道が開けます。

みなさんと一緒に楽しい旅ができて、楽しいひとときでした。また、どこかでお会いできるのときを楽しみにしています。私たちにお付き合いいただきましてありがとうございました。

最後になりましたが、本誌発行にあたりまして、宗像市「大学生の力によるまちの課題解決等プロジェクト」のご支援をいただきました。また、製本にあたりヨシミ工産 石川様にお世話になりました。心より感謝致します。

2021年11月 有元 康一

執筆者（プロジェクトメンバー）一覧

有元 康一（代表）・編著

福岡教育大学大学院准教授 博士（学校教育学）、愛知県出身
専攻：算数・数学科教育、計算機代数

林 瑞樹（プロジェクトリーダー）・第1章担当

福岡教育大学大学院1年次、福岡県出身
研究テーマ：数学的な考え方を育むための数学科授業づくり ―数学的な考え方の具体化を通して―

林 雄飛・第2章担当

福岡教育大学大学院1年次、福岡県出身
研究テーマ：論理的な思考力を育成する授業づくり ―数学的な表現に焦点を当てて―

三角 英豊・第2章担当

福岡教育大学大学院1年次、福岡県出身
研究テーマ：高等学校数学科における「思考力、判断力、表現力等」の育成をねらいとした授業構想 ―多様な解法を考える活動を取り入れた授業を通して―

米倉 脩真・第1章担当

福岡教育大学大学院1年次、佐賀県出身
研究テーマ：高等学校数学科における論理的に推論する力を育成する授業づくり

渡邊 光・第2章担当

福岡教育大学大学院1年次、福岡県出身
研究テーマ：高等学校数学科における「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善 ―知識構成型ジグソー法の活用―

