

[研究論文]

数学科教育における帰納的推論過程を踏まえた
ICT の効果的な活用に向けての基礎研究

A fundamental study for effective utilization of ICT
based on inductive reasoning process in mathematics education

有 元 康 一*
Koichi ARIMOTO

米 倉 脩 真**
Shuma YONEKURA

林 瑞 樹**
Mizuki HAYASHI

福岡教育大学 福岡教育大学大学院 教育学研究科教職実践専攻
教職実践研究ユニット* 教育実践力開発コース中等教科教育高度実践力プログラム**

(2023 年 1 月 31 日受理)

本研究では、数学科教育において数学教科の特性を踏まえた ICT の効果的な活用に向け、帰納的推論過程に着目し、その有効性について考察する。基本的な概念を整理するために、数学の視点から、数学的帰納法に関する定理を述べ、数学教育の視点から、帰納的推論に関連する推論過程についての基礎理論を概観する。そのうえで、コンピュータの扱う数値に関する特性についてまとめる。これらの議論により、帰納的推論過程の場面で ICT を活用し、それを証明する一連の活動において、数学の特性を踏まえた効果的な ICT 活用を授業で実現できることを指摘する。最後に、授業として展開するうえでの基本的な流れを示し、題材例を提示する。このことにより、数学教師が ICT を活用する教材研究や教材開発を行う際に、その基礎となる考え方の一例を提示する。

キーワード：数学科教育，帰納的推論過程，ICT 教育

1 問題の所在と本研究の目的

2021 年度に GIGA スクール構想が本格実施され、現在学校教育において急速にハード面が整備されている。そのなかで学校種間において活用状況に差がある現状も示唆されている。佐藤・内田他 (2022) では、ICT 利用に関する視察で中学校を訪問し、タブレット端末を利用した授業を見学した際に 1 人 1 台端末の環境で協働的な学びが展開されており、中学校と高等学校では ICT の活用状況に大きな差を感じたことが報告されており、高等学校における活用がまだ十分でないことを示唆している。

このようななか、高等学校を含む数学教育において、教科の特性を踏まえた ICT 利用に関する実践例の蓄積と共に理論の整備が図られ、理論と実践の往還を果たすことにより、効果的な授業を実現させることは喫緊の課題であると考ええる。

そこで、本研究では効果的な活用方法を検討するにあたり、帰納的推論、類推的推論、演繹的推論からなる論理的な推論過程に焦点をあてて、数学の内容、数学教育の観点から、これらの基礎的な概念をまとめ、コンピュータの特性を踏まえたうえで、ICT の効果的な活用に向けて考察する。その結果、効果的な ICT の活用方法として、帰納的推論過程で ICT を活用し、その後演繹的に当該事象を説明・証明する、あるいはこれらの往還をさせることにより、定理などの数学の性質を明らかにする活動が一例としてあげられることを指摘する。

また、本研究では教師が数学科の指導計画を立案するとき、ICT の活用について検討し、教材研究や教材開発を行う際の理論的な基盤を提供することも目的とする。

2 研究の手順および方法

本研究で対象としている帰納的推論，類推的推論，演繹的推論について，数学，数学教育の視点から基本的な概念をまとめる。数学の視点では，自然数の公理を述べ，帰納法の原理を定理として与える，また，この定理から得られる系として累積帰納法について述べる。高等学校における指導では，通常，帰納法のみが取り上げられているが，その考え方を深めるためにも，累積帰納法についても提示する。数学教育の視点では，帰納・類推・演繹の推論について，共著者の米倉，林の本学教職大学院課題演習での研究成果を踏まえ，文部科学省，京極，片桐による定義を述べ，これら 3 つの推論について整理する。また，これらの概念を俯瞰的に把握するために，片桐による「数学的な考え方」を概観し，3 つの推論について，発問例を考察した江崎の研究成果について概観する。

その後，コンピュータの特性を踏まえた授業構成として帰納的推論に焦点をあてることの妥当性を述べ，最後に実際の授業の流れや，題材例を挙げる。

3 数学における帰納法

数学における帰納法について，齋藤(2002)に従い基礎理論を述べる。以下で提示されている用語は多数の文献で述べられているため，ここでは特に参考文献は提示しない。また，定理の証明は省略する。

公理（自然数の公理） 空でない集合 \mathbb{N} はふたつの演算，加法（ $+$ ）および乗法（ \cdot ）と，ひとつの順序 \leq をそなえているとする。これらがつぎの条件をみたすとき， \mathbb{N} を**自然数系**といい， \mathbb{N} の元を**自然数**という。

- 1) \leq は整列順序である。これの最小元を0とかき，0の直後の元 0^+ を1とかく。
- 2) 0以外の任意の元 n に直前の元 n^- が存在する。
- 3) \mathbb{N} は加法（ $+$ ）に関して可換半群であり，単位元は0である。
- 4) $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} - \{0\}$ は乗法（ \cdot ）に関して可換半群であり，単位元は1である。
- 5) すべての n に対して $n + 1 = n^+$ が成り立つ。
- 6) （分配法則） \mathbb{N} の元 n, m, l に対し，

$$n(m + l) = nm + nl$$
 が成り立つ。
- 7) n, m, l を \mathbb{N} の元とする。

$$n < m \text{ なら } n + l < m + l,$$

$$n < m, l \neq 0 \text{ なら } nl < ml$$

が成り立つ。

定理（帰納法） 自然数の変数 n に関する性質 $\phi(n)$ があるとし，これがつぎの条件をみたすとする：

- 1) $\phi(0)$ は正しい。
- 2) 任意の n に対し，もし $\phi(n)$ が正しければ $\phi(n + 1)$ も正しい。

このとき， $\phi(n)$ はすべての自然数 n に対して正しい。

系（累積帰納法） 定理の条件 2) をつぎのようにかえる：

- 2') 任意の n に対し，もし $\phi(0), \phi(1), \dots, \phi(n)$ が正しければ $\phi(n + 1)$ も正しい。

このとき，やはり $\phi(n)$ はすべての自然数 n に対して正しい。

4 数学教育における帰納・類推・演繹

米倉は，帰納的・類推的・演繹的に推論する力の3つをまとめた論理的に推論する能力を考え，この能力を育成することの重要性を認識したうえで，特に帰納的に推論する能力に焦点をあてた実践研究を行った。その一部を米倉・有元(2023)で提示し，帰納・類推・演繹についてそれぞれまとめている。また林(2023)は，数学的な考え方の育成について研究を行い，文部科学省(2016)による現行の「数学的な見方・考え方」について，「数学的な考え方」を「帰納的に考える，類推的に考える，演繹的に考える」に分類していることを指摘し，これらは片桐(2004)における「数学の方法に関係した数学的な考え方」で提示された 11 個の考え方に深く関係していることも指摘している。この 11 個の数学的な考え方には「帰納的な考え方」，「類推的な考え方」，「演繹的な考え方」が含まれている。さらに林は，片桐(2004)による定義を解釈し，授業実践しやすくなるように数学的な考え方を誘発する発問例を提示している江崎(2015)をもとに研究を行っている。

以下，米倉と林の研究対象の一部である，帰納・類推・演繹について，まず文部科学省(2018)，京極(2013)，片桐(2017)による定義をそれぞれまとめる。次に，これら3つの概念を俯瞰的に見るため，片桐による「数学の方法に関係した数学的な考え方」を述べ，江崎(2015)による実践的な視点での発問例をも示す。最後に，米倉，林それぞれの実践研究に関連する，数学教育学における研究として和田(2002)を指摘する。

(1) 帰納**① 文部科学省による「帰納」の定義**

特別な場合についての観察や操作、実験などの活動に基づいて、それらを含んだより一般的な結果を導き出す推論。

② 京極による「帰納」の定義

通常、一般化によって、特殊な場合に成り立つことを基に、それらに共通な一般的な概念や法則や手順を導き出すこと。

③ 片桐による「帰納的な考え方」の定義

問題を解決するのに、解決のしかたが見つからず演繹的に解決できない時などに、まず一般的ルール、性質を見出して、これをもとにして、当面の問題を解決しようとする時に用いられる考え方である。また、ある問題を解決した時に、それに止まらず、それをきっかけにして、一般的なルール、性質を見出そうとする時に用いられる考え方であって、

- [1] いくつかのデータを集める。
- [2] それらのデータの間に共通にみられるルールや性質を見出す。
- [3] そのルールや性質が、そのデータを含む集合(変数の変域全体)で成り立つであろうと推測する。
- [4] この推測した一般性が真であることをより確かにするために、新しいデータで確かめてみる。

といった考え方。

(2) 類推**① 文部科学省による「類推」の定義**

似たような条件のもとでは、似たような結果が成り立つであろうと考えて、新しい命題を予想する推論。

② 京極による「類推」の定義

文部科学省の定義を形式化して、「A、B 二つの事物があって、A、B ともに性質 a、b をもっているとする。A がさらに c という性質をもっているとき、B もまた c という性質をもつと結論すること」とまとめている。

③ 片桐が提示する「類推的な考え方」の定義

東京都立教育研究所(1968)から引用して提示している：

「ある事柄 A について、その性質または法則を知りたい、しかしそれがわからないという時、A と似よりの既知の事柄 A' を思い出し (A' については性質または法則 P' が成り立っているとする)、そこで A についても P' と同様な性質またはルール P が成り立つのではないか、というように思考を進めていこうとするものである。」ととらえられ

る。

(3) 演繹**① 文部科学省による「演繹」の定義**

前提となる命題から論理の規則に従って結論となる命題を導き出す推論。

② 京極による「演繹」の定義

一般的な概念、法則、手順などを特殊な場合に適用すること。

③ 片桐による「演繹的な考え方」の定義

次のように平凡社(1967)から引用している：

「演繹というのは広い意味では、前提として与えられたいくつかの命題から、論理的規則を用いて、厳密に必然的結論を導き出す方法である。また、狭義には一般的主張から特殊な主張へ進む推理とみられることもある」。

(4) 帰納・類推・演繹の俯瞰的な把握

片桐(2004)は、数学的な考え方として「Ⅰ 数学的な態度」、「Ⅱ 数学の方法に関係した数学的な考え方」、「Ⅲ 数学の内容に関係した数学的な考え方」をあげている。このうち、帰納・類推・演繹の考え方を含んでいる「Ⅱ 数学の方法に関係した数学的な考え方」は 11 個の要素からなっている(表 1)。

**表 1 数学の方法に関係した数学的な考え方
(片桐, 2004, p38-39)**

- | | |
|----|-----------------------------------|
| 1 | 帰納的な考え方 |
| 2 | 類推的な考え方 |
| 3 | 演繹的な考え方 |
| 4 | 統合的な考え方 (拡張的な考え方を含む) |
| 5 | 発展的な考え方 |
| 6 | 抽象化の考え方
(抽象化, 具体化, 条件の明確化の考え方) |
| 7 | 単純化の考え方 |
| 8 | 一般化の考え方 |
| 9 | 特殊化の考え方 |
| 10 | 記号化の考え方 |
| 11 | 数量化, 図形化の考え方 |

江崎(2015)は、片桐における「Ⅱ 数学の方法に関係した数学的な考え方」の概念について整理し、数学的な考え方を誘発する発問を片桐の研究をもとに実践可能な発問例として提示している。ここでは、帰納・類推・演繹に限って提示する(表 2)。

米倉、林がそれぞれ行ってきた実践研究について、数学教育学における関連する内容として和田(2002)を指摘することができる。米倉(2023)は中学校において、おうぎ形の面積と弧の長さを、円

の面積と周の長さの公式をもとに推論する実践研究を行った。ここでは、授業前後の実態調査として和田の作成したものをもとに、中学生の実態に応じるために一部設問を付加したものを活用した。

表 2 帰納・類推・演繹に関わる発問例
(江崎, 2015, p89 をもとに作成)

①帰納的な考え方

- ・どんな決まりや法則がありそうか、データを集めてみよう。
- ・共通の求め方やきまりはないだろうか。
- ・別の数や場面でも同じように考えられるだろうか。

②演繹的な考え方

- ・わかっていることを基にして考えてみよう。
- ・このことを根拠を持って説明するにはどんなことがわかれば良いだろうか。
- ・何を根拠にして考えたか。
- ・わかっていることを基にして説明（証明）できないか。

③類推的な考え方

- ・わかっていることと同じようにできないだろうか。
- ・既習の知識と似ているものはないだろうか。

5 ICT 利用についての考察

第3章および第4章で提示した基礎的な理論などを踏まえて、中学校や高等学校の数学科の授業における教科の特性を踏まえた効果的な ICT 活用について考察する。

(1) 考察する ICT の範囲

まず、本研究で考察する ICT の範囲を規定する。中川・苑(2022)は、初等中等教育の現場では、この60年間で多くの ICT 環境の変化があったことを指摘している。また、ICT 機器としてプロジェクタ、デジタルテレビ、電子黒板等を挙げている。このように ICT 機器にはさまざまなものがあるが、本研究においては、タブレット端末を含むコンピュータ（計算機）を考察の対象とする。

(2) コンピュータの特性

次にコンピュータの特性について考える。森本(1999)は、純粋数学では考える必要がないが、計算機を用いて数値を求めるときに、どうしても避けることができない誤差として、丸めの誤差と打

ち切りの誤差をあげている。

① 丸めの誤差

無限小数は扱えず、有限桁の小数しか扱えないために生じる誤差である。

② 打ち切りの誤差

コンピュータは高速で演算を行うが、1つの演算には一定の時間がかかり、有限の計算時間しかないので、有限回の演算しかできない。演算を無限回繰り返すという操作はコンピュータでは本質的に不可能である。このため、有限回で打ち切らなければならないために生じる誤差である。

このようにコンピュータで計算するときには、常に、上記で述べた有限性とも言える特性、特に有限回の演算しかできないという特性を考慮しなければならない。

(3) 有限性と推論

第2節では、コンピュータの特性として2種類の誤差を例示し、特に有限回の演算しかできない特性を指摘した。この有限性と第3章および第4章における3つの推論との関連について考察する。

帰納や類推は、推論の過程において有限個の場合を考察している。数学における帰納法においては、第3章で述べたように、すべての自然数 n について、ある性質 $\phi(n)$ が成り立つという定理であった。しかし、その性質が成り立つかどうかを推論する過程では、ある有限個の自然数 n に対して成り立つかどうかを確かめることになるだろう。このように帰納的推論の過程において、有限個の場合について考察するため、このときコンピュータを活用することが一つの効果的な活用方法になると考えられる。人が計算などをする負担を軽減し、推論することに意識を向けることができる。

(4) コンピュータ利用における帰納

飯島(2021)は、数学の授業のなかで ICT 利用を考えるうえで、数学のよさを実感できるようにする視点を指摘し、ICT を利用することにより学習者が、より本質的な活動を行うことができると実感できるような活動の重要性を述べている。このなかで、問題解決の過程で試行錯誤するうえで具体例の重要性を示唆している。また、ICT を使用しながら観察や実験が容易に行えるからこそ、観察だけでなく観察から感じることをもとに、次の問題を作ることの重要性を示唆している。このように、具体例を考察する段階において ICT の効果的な利用が可能になることを実例を多数挙げ解説している。

有元(2022)は、大学2年生を主な対象とした小学校教員養成における数学の授業において、整数の話題としてコラッツ予想、関数の話題として

二次関数を取り上げ、コンピュータを活用した指導を行った。そして、数学ソフトウェアの効果的な利用の観点から考察した。ここでは、数学の特性を踏まえたうえで、一つの ICT 活用の効果的な利用例として、帰納的な推論の場面における活用の流れを提示している（表 3）。表 3 では、「実数 x に対してある性質が成り立つ」という命題を $p(x)$ と表示している。

**表 3 帰納的推論過程による ICT 活用
(有元, 2022, p140)**

1. ある x に対して、命題 $p(x)$ が成り立つことを確かめる、
2. いくつかの x に対して、命題 $p(x)$ が成り立つことを確かめる（PC 等の活用）、
3. 任意の x に対して、命題 $p(x)$ が成り立つことを予想する、
4. 3 でたてた予想が正しいことを証明（説明）する。

以下、この考察について解釈を加える。ここでは、1 から 4 までを問題解決過程全体と捉え、そのなかで、2 の場面でコンピュータの活用を想定している。変数が実数の場合においても、与えられた命題が真であることを推論する過程では、まず、特別な整数（あるいは自然数）について考えることが必要であろう。2 を経て、任意の実数に対して与えられた命題が真であることを予想するという流れが自然であると考えられる。そして 4 の場面では、演繹的にそれを証明することとなる。

第 3 節において、帰納的推論の過程において、考察は有限個の場合であることを指摘しているが、このように、変数が実数である場合を含め、無限個の場合について、その予想の段階である推論過程においては有限個の場合についてコンピュータを活用して確かめることが一つの展開例となるであろう。問題解決過程において、帰納的推論を行う際に、従来では生徒が条件を満たす図をかいたり、あるいは計算をしたりするなかで、一般的な法則を見い出す授業が展開されていた。このとき、多くの計算を行うには負担もかかり、数学という教科の特性上、ややもするとその計算過程や結果に授業の目標が移ってしまうことにより、当初想定していた目標が達成されないまま授業が終わることも懸念される。以上で説明したように、帰納的推論を行うとき、ICT を活用することがその有効な活用へとつながると考えられる。有元 (2022) では、特に推論と説明・証明との往還については

明確な指摘をしていないが、これらの往還により問題解決がなされることもあり得るだろう。

これらの考察により、実験段階、具体例を考察する推論の過程において ICT を活用することが重要であり、特に帰納的推論過程においての活用例を検討することがこれからの実践研究の視点として指摘できる。

6 授業での実践に向けて

(1) 授業における全体的な流れ

ある問題解決の過程で、ICT を活用して帰納的に推論し、その結果が正しいことを人が証明するという一連の流れが想定できる。この流れを図示すると次のようになる（図 1）。

A: 予想する（帰納的）

- 実験段階・試行錯誤の過程
 <ある場合、いくつかの場合での検討>
 [A-1] ある場合について検討する
 [A-2] いくつかの場合について検討する
 (… ICT の効果的な活用場面)
 [A-3] 共通する性質を見出す
 [A-4] 予想を定式化する

B: 証明する（演繹的）

- 検証段階・結論導出の過程
 <すべての場合、任意の場合に成立>
 [B-1] 定式化した予想が正しいことを証明しようとする
 [B-2] すでに明らかになっている性質や定理を適用する
 [B-3] 定理としてまとめる

図 1 授業における ICT 活用の流れ

まず A として予想する段階、そして定式化された予想が正しいことを証明する B の段階を設定している。第 5 章でも指摘したが、A と B の段階が往還する活動も想定している。

A の段階は帰納的推論によって、ある予想をする段階である。ここでは、[A-1]として、ある場合について「このような事柄が成り立つのではないだろうか」と推測する段階である。これは人が行うことになる。そして、いくつかの有限個の場合について、その事柄が成り立つことを確かめるのが [A-2] の段階である。ここで計算をしたり、図形を描いて角の大きさを調べたりするなど、ICT を

活用して多くの事例について検討する。その後[A-3]として共通する性質を見出す段階があり、[A-4]予想を数学における表現方法によって定式化する活動がある。これらの段階は人が行うことになる。

後半のBの段階は演繹的推論によって、Aの段階で予想し、定式化された事柄が正しいことを証明する段階である。この段階はすべて人が行うこととなる。まず[B-1]で定式化された予想が正しいことを証明しようと、証明すべき内容を正しく把握する。そして[B-2]において、すでに明らかになっている性質や定理を適用して、証明を進める。証明ができたなら最後に[B-3]として定理としてまとめることになる。

(2) 題材例

以上の考察を踏まえ、中学校や高等学校で扱う題材で、問題解決過程のなかで帰納的推論におけるICTの効果的な活用が期待できる題材例を挙げる。

① 関数

一次関数、二次関数をはじめとして、無理関数、指数関数、対数関数などあらゆる連続関数における値の増減、グラフの性質や概形などが挙げられる。この場合、単に「コンピュータを活用してグラフを描かせる活動」ととらえるのではなく、推論の過程に位置づけ、生徒の推論の過程を大切にしたいうえで、ディスカッションする活動を取り入れることも大切である。

② 整数の性質

中学校では、岡本他(2021)で取り上げられている「連続する3つの整数の和は、3の倍数である。」という文字式を使った簡単な説明や、「2けたの正の整数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数との和は、11の倍数になる。」などのやや複雑な内容でも扱えるだろう。特に大きな整数で、多数の例を提示することができる。

高等学校においても、倍数の判定において、例えば「ある整数の各桁の数を足した値が3の倍数であれば、その整数自身も3の倍数である。」といった命題など、従来の授業で扱っていた題材について、活用することが期待できる。

③ 初等幾何

中学校や高等学校における図形の学習において活用することが期待できる。例えば、中学校における平行四辺形の性質が挙げられる。中学校では、平行四辺形の性質として、岡本他(2021)では①2組の向かい合う辺はそれぞれ等しい、②2組の向かい合う角はそれぞれ等しい、③対角線は、それぞれの中点で交わることが述べられている。これらの性質を、生徒たちが自ら予想して導き出す活

動を想定できる。高等学校においてもチェバの定理、メネラウスの定理、方べきの定理等においてその推論段階で活用することが期待できる。

米倉・有元(2023)は、高等学校の数学Aにおいて、三角形の内角の二等分線と比について、実際に生徒が長さや角の大きさを測定する活動を取り入れ、帰納的に性質を導く授業を構想し実践した。この実践は、演繹的に性質を提示するのではなく、生徒の思考過程に沿った活動をねらいとしている。このなかで測定の活動をICTで行うことも一つの授業例となり得るであろう。

④ 統計

中学校と高等学校を通して、最近の数学教育で重視されている統計の分野でも活用することが期待できる。平均値、中央値、最頻値などの代表値や標準偏差などを活用したデータの分析の過程でICTの威力が発揮されるであろう。これらの概念を正確に把握し、その性質を理解したうえで、問題解決過程で効果的な活動が期待できる。

(3) 授業構想時に留意すべきこと

前節までで、授業における全体的な流れ、題材の例について挙げた。実際に授業を構想するとき大切な点は、与えられた問題設定(状況)のなかで、それを解決していこうとする過程を明確に意識することである。帰納的に推論する段階、演繹的に説明・証明する段階を明確にとらえたうえで、推論する過程において、どのようにICTを活用するのか、なぜICTが必要なのかといった基本的な考え方を明確にしておくことが必要である。授業の構想段階では、その具体を検討するうえで、生徒の実態を踏まえることは不可欠である。題材をどのようにとらえ、問題解決の過程を授業でどのように実現させていくのかを、生徒の実態、教科の内容をとらえたうえで検討することが重要であろう。

7 結語

GIGAスクール構想が本格実施され、中学校だけでなく、高等学校においても今後ICTの有効活用が求められることとなる。本論文では、数学教科の特性を踏まえたICTの効果的な活用の一つの事例を模索し、帰納・類推・演繹的推論の基礎的な内容を確認したうえで、帰納的推論過程が有効な活用の一事例として挙げられることを述べた。中学校や高等学校で数学教育に携わる教師が、教材研究や教材開発を行う際の一助となれば幸いである。

今後は、①今回例示した内容を含む授業実践を

具体的に行ったうえでの考察, ②推論と説明の往還による問題解決についての考察, ③類推的推論について考察することを課題として挙げることができる。

附記

本研究は, 筆頭著者である有元が検討している数学教育における ICT 利用教育において, 共著者である米倉, 林が本学大学院の課題演習において研究した内容を踏まえて発展させたものである。本論文における第 4 章は, 米倉, 林の研究成果の一部を引用したうえで論を展開している。

謝辞

本研究は, 国際共同利用・共同研究拠点による拠点事業の一環として, 京都大学数理解析研究所から支援を受けている。

引用・参考文献

- 有元康一 2022 教育学部算数科内容科目における指導—帰納的推論の過程に着目して— 数理解析研究所講究録, 京都大学数理解析研究所, 2236, 140-147.
- 中央教育審議会初等中等教育分科会 2016 資料 3 算数・数学の見方や考え方について (案) 教育課程部会 算数・数学ワーキンググループ (第 6 回) 配付資料.
https://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/073/siryo/_icsFiles/afieldfile/2016/05/31/1370946_3.pdf
 (2023 年 1 月 9 日最終閲覧)
- 江崎亮 2015 数学的な考え方を育てる学習指導法の実践—構成的アプローチの学習過程を通して— 福岡教育大学大学院教育学研究科教職実践専攻年報, 5, 87-94.
- 林瑞樹 2023 数学的な考え方を育むための数学科授業づくり—数学的な考え方の具体化を通して— (課題演習概要) 福岡教育大学大学院教育学研究科教職実践専攻年報, 13, 241-242.
- 平凡社 1967 世界大百科事典.
- 飯島康之 2021 ICT で変わる数学的探究 明治図書.
- 片桐重男 2004 数学的な考え方の具体化と指導 明治図書.
- 片桐重男 2017 数学的な考え方・態度とその指導 1 名著復刻 数学的な考え方の具体化 明治図書.
- 京極邦明 2013 3 つの推論の特徴と指導のポイント 中学数学通信 compass, 2013 年秋号, 3-5.
- 文部科学省 2018 中学校学習指導要領 (平成 29 年告示) 解説 数学編, p35.
- 森本光生 1999 パソコンによる解析学 放送大学教育振興会.
- 中川一史・苑復傑 2022 改訂版 教育のための ICT 活用 放送大学教育振興会.

- 岡本和夫・森杉馨他 2021 未来へひろがる数学 2 啓林館 (中学校数学科教科書).
- 齋藤正彦 2002 基礎数学 14 数学の基礎 集合・数・位相 東京大学出版会.
- 佐藤禎大・内田幹貴・有元康一 2022 高等学校数学科における効果的な ICT の活用について—「社会人基礎力」の育成を視野に入れて— 数理解析研究所講究録, 京都大学数理解析研究所, 2236, 148-157.
- 東京都立教育研究所 1968 数学的な考え方とその指導計画の基礎資料作成に関する研究, 13.
- 戸瀬信之・阿原一志 2022 高等学校 数学 A 数研出版 (高等学校数学科教科書).
- 和田信哉 2002 帰納的推論と類比的推論を活かした算数の教授・学習に関する研究—小学校 3, 4, 5 年生へのインタビュー調査を通して— 日本数学教育学会誌, 84(12), 2-13.
- 米倉脩真 2023 数学科における論理的に推論する力を育成する授業づくり (課題演習概要) 福岡教育大学大学院教育学研究科教職実践専攻年報, 13, 257-258.
- 米倉脩真・有元康一 2023 高等学校数学科における帰納的に推論する能力の育成を目指した授業づくり, 福岡教育大学紀要, 第 6 分冊, 教育実践研究編, 第 72 号, 掲載決定.

