

# 力学おもちゃから物理学を覗く

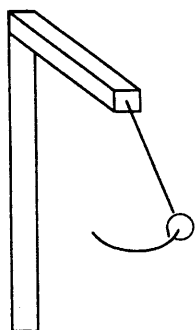
三 谷 尚

振動、波動は物理現象の1つの素材である。本講座では、力学おもちゃを使いながら、振動、波動等についての基本を理解し、さらに、これらの現象が自然界のあらゆる場面に現れている事を理解していく。特に、この振動、波動等の現象が、ブランコの振動や海の波の波動に存在するだけでなく、物体（あるいは物体を構成する素粒子）自体が振動現象の所産である事を認識してゆく。

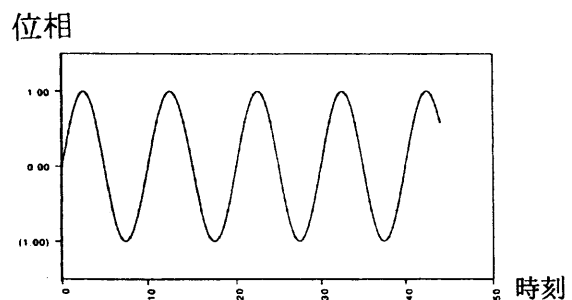
なお、振動、波動等の現象に関する基本的用語を次のように定義しておく：まず、「振動、波動の1要素」－例えば水の波なら水の分子、振り子ならそのおもり－が存在し振動を行う。ある場合には、これらの集合である「媒質」（－例えば水の波の場合では集合的な意味での水－）が波を形作る（海の波、等）。ここで、「振動、波動の1要素」の時間的な変動の波を「振動」、要素の集合体（「媒質」）の時間空間的な変動の波を「波動」と呼ぶことにしよう。

## (1-1) 振動現象（1個の振り子の波）

「波」が存在している間、1個の「波の要素」がどう振る舞っているのかを考えよう。1個の「波の要素」は、時間と共に振動を行っている。その振動の最も単純な形態が「単振動」と呼ばれるもので、特にその振幅が小さいとき「線形振動」となる。この例としては、振り子における質点の運動（ただしその振動の振幅が十分に小さいとき）（図1参照）、あるいはバネに結ばれた質点の運動が存在する。この振動において変位は時間に対して正弦型関数で書ける：変位  $\theta = \theta_0 \sin(\omega t)$ 。「線形振動」のグラフは、横軸を時刻とすると、次の形を持つ。（図2参照）（詳しい導出は付録A-1参照）なお、この変位は、「位相」と呼ばれる量（これは角度に相当するもの）とも解釈できる。



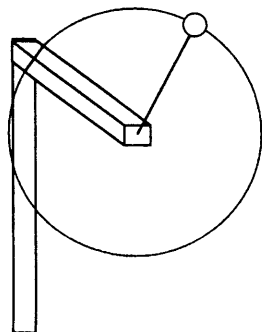
(図1)  
(公開講座で使用した振り子)



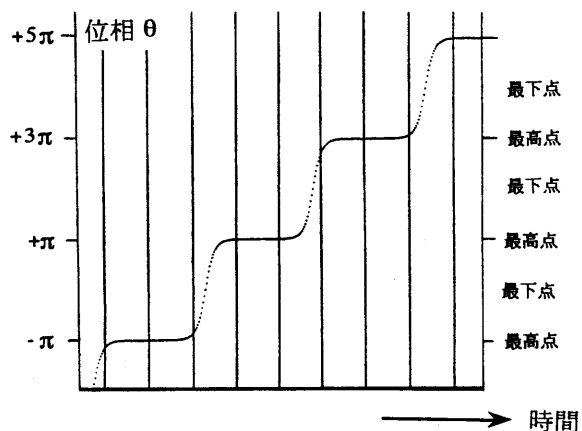
(図2)

振り子において振幅が大きい場合はどうなるであろうか？ 今後は、振り子の“腕”は糸ではなく、重さが無視できるほど軽い棒でできているとする。その運動を見るために棒の鉛直下方向からの角度

(=位相)を見る事にする。振幅が小さいときは位相は正弦関数で表される単純な往復運動をするが、振幅を少し大きくすると、往復運動はするもののやや複雑な関数となる。(最大ふれ幅の近傍での、位相変動がより遅く、滞在が長めになる。)さらに振幅を増すとついに振り子は回転を始める。これらを一般に、非線形振り子、その運動を非線形波動と呼ぶ。(図3参照)(詳しい導出は付録A-2参照)



(図3)



(図4)

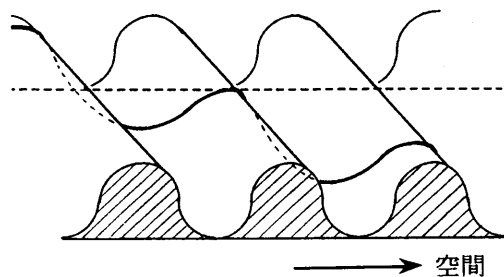
振り子の回転の状態においては、独特の性質がある事がわかる。振り子のおもりは下方に来ることを好む傾向があり上方に来ることは難しい。しかし回転運動は強いてそれを交互に実現させる。よって、回転によりおもりが真上を通り過ぎるたびに、系は一種の越え難い境界を突破して新しい領域(ここでは「相」と呼ぶ)に入ったと考えるべきであろう。これらの「相」を(何周回ったかとい回数である)整数 $n$ で区別することは当然であろう。 $n$ を用いて、1つの相は次のように定義される： $(2n-1)\pi < \theta \leq (2n+1)\pi$  (図4参照) この境界を突破していく現象は、非線形波動の中の「位相ソリトン」の1つである。

## (1-2) 静的なソリトン模型

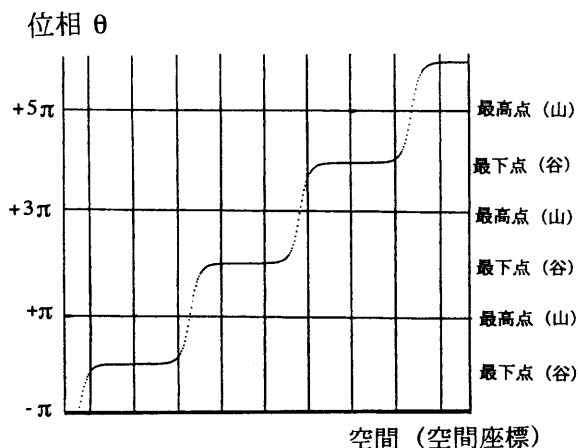
次に示す模型(図5)は、理想的なうねりの繰り返しに、理想的な十分重いゴムひもをななめに渡したものである。なお、このうねりは、「ポテンシャル」の役割、あるいは「ポテンシャルエネルギー」を与える。

もしも、うねりの高さが0であり、すなわちポテンシャルがこの平面で平坦であれば、ゴムは直線的に(ただしななめに)存在する。しかし、うねりがあれば、うねりの山のところでゴムはやや山脈に垂直に近くなり、うねりの谷の中ではゴムはやや谷筋に平行にちかくなるであろう。(図6参照)

なお、この模型では、まず、谷や山に平行にゴムを見ていく事を基本とし、それとともに、うねりの繰り返しの方向にゴムの位置が動いていく事、すなわち「位相」が増加していく事を観察する。(谷や山の平行方向にパラメータ $x$ をとり、うねりの繰り返しの方向に $\theta$ を取る。ここで関数 $\theta(x)$ が問題となる。)(詳しい導出は付録B参照)

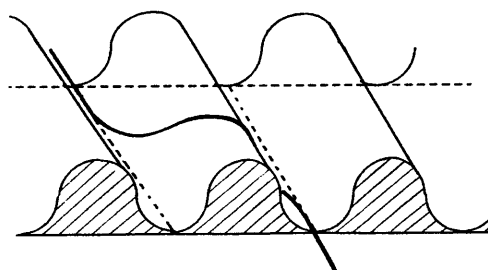


(図5)

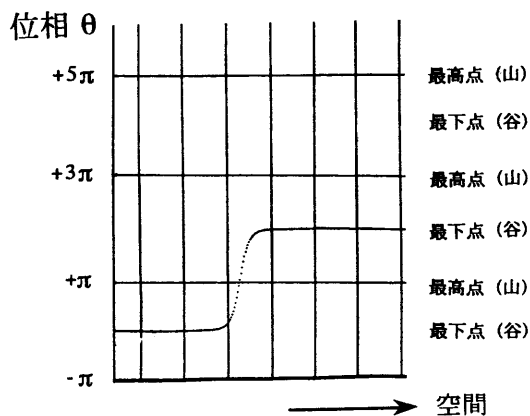


(図6)

この模型の解の中で、特に簡単であり、かつ重要な意味を持つものとして、「ただ1つの山越えをする解」が存在する。(ただ、この模型の説明の冒頭で、「ゴムをななめに渡すのを基本とした事」には異なるが。)これも、図5で表されるポテンシャル系の1つの解であるには違いない。(図7と図8)なお、この山越えの部分を「1ソリトン」、この解は「1ソリトン解」と呼ばれる。



(図7)



(図8)

<解説>ゴムひもが1つの谷のみを「走っている」場合も1つの解であり、この解のエネルギーは最低である。(図7) (図8)では、ゴムひもが1つの山のみを越え、ゴムひもの両側が位置する谷は2ヶ所、互いに1つ隣の関係である。この例によって特に、その「1回の山越え」の位置は任意であり移動しうるが、「1回の山越え」が必ず存在しなければいけない事(消滅はできない事)が示される。

### (1-3) 非線形振り子模型と静的なソリトン模型の比較

さて、静的なソリトン模型でのゴムの山越えのニュアンスは、先に説明した(非線形)振り子の回転状態における最上点通過と同様である事は納得されるであろう。解の形も同様(図4と図6)であ

る。ただし、全く正反対の点がある。(1-1)の振り子の模型では、最上点で進行(位相)の変動がより遅くなっている。一方で(1-2)の静的なソリトン模型では、最上点で位相の変動がより速くなっている。

「エネルギーが高いところを物体は避けたいので、速く移動してしまう」という説明によって、(1-2)の解釈はつきそうである。ところが、振り子(1-1)の場合、エネルギーが高いところに長い時間留まってしまう。この原因を考えるため、静的なソリトン模型の有するゴム弾性のエネルギーを考え、これと振り子模型の運動エネルギーとを比較してみよう。(表1参照)

非線形振り子：	質点の運動エネルギー	ポテンシャルエネルギー (質点の位置エネルギー)
	↕	↕
静的ソリトン模型：	ゴム弾性のエネルギー	ポテンシャルエネルギー (ゴムの位置エネルギー)

ゴム弾性のエネルギーと振り子模型の運動エネルギーは、数学的に全く同じ形式を持っている。ゴム弾性のエネルギーは、ゴム位相の空間に対する変動の2乗である。振り子の運動エネルギーは、振り子の位相の時間に対する変動の2乗である。しかし、運動方程式の中で、両者の符合は逆になり、これが正反対の現象を起こす。(付録B参照)

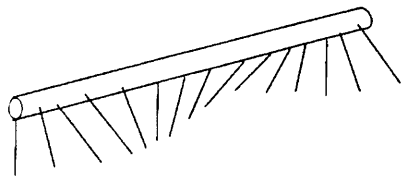
同様、振り子モデルでの振動解は、ゴムひもが1つの谷間にもみ存在し、空間的に振動している場合と等価、振り子モデルにおいて「最高点から落下し、最高点に上がってゆく解」は、(1-2)：静的なソリトン模型での「1ソリトン解」と等価、である。

## (2) 波動現象 (多数の振り子系)

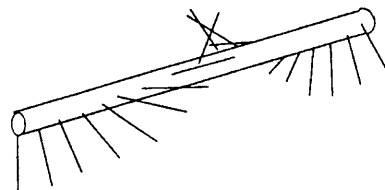
(1-1)で紹介したものは、1個の振り子であるから、当然、時間のみをパラメーターとする系であった。これを拡張し、時間、空間をともにパラメーターとする波動系を提出するものが連成振り子系 - バネでゆるく結ばれた多数の振り子の系 - である。(図7参照) 連成振り子において、特に運動がないとき、「静的連成振り子」と呼ぶ事にする。これは、本質的に前述した「静的なソリトン模型」と等しい。連成振り子たちに運動があるときは「動的連成振り子」と呼ぶ事にする。(詳しい導出は付録B参照) ここで、線形振り子、非線形振り子に対応する次のような解の分類がなされる。

(i)線形振り子解 これは各振り子の振幅が十分小さいまま、その振動が伝搬していくものである。(なお、静的連成振り子の線形振り子回に解には意味がない。振り子達は下を向いたままである。)(図7-1参照)

(ii)位相ソリトンを生ずる解 空間方向、すなわち振り子列の方向に対して、その位相角が回転し、前述と同様、ところどころで「真上」をよぎるような状態が実現可能する。(図7-2参照)



(図7-1)



(図7-2)

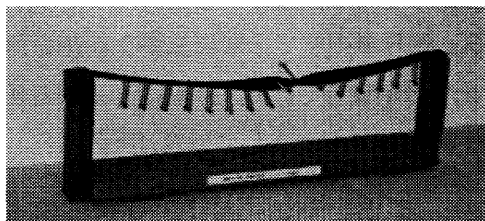
さらに、この振り子たち全部を一斉に回転させる。すると、「真上」の場所（ソリトン）が移動することがわかる。

以上をまとめると、連成振り子系において（ア）時間を固定してみれば、ソリトンは空間的に等間隔で存在、（イ）空間を固定すれば、ソリトンはある時間間隔で出現、（ウ）時空両面で見れば、前二者の性質を兼ね備えたまま、「ソリトンの伝搬」を見出すことができる。

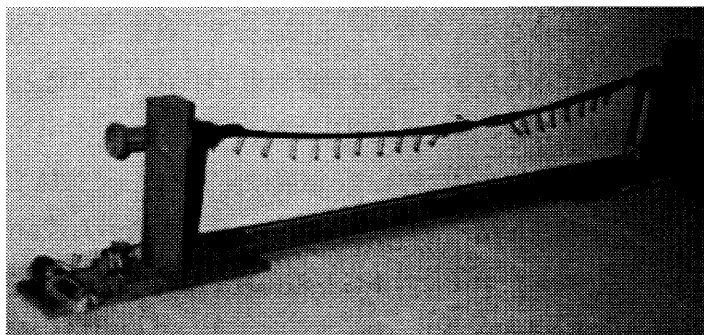
本公開講座において、以下に示すおもちゃを作り、受講生に提示した。

<連成振り子のおもちゃ>

静的な連成振り子



動的な連成振り子  
 （「ソリトンの伝搬」を見出す事ができる。）



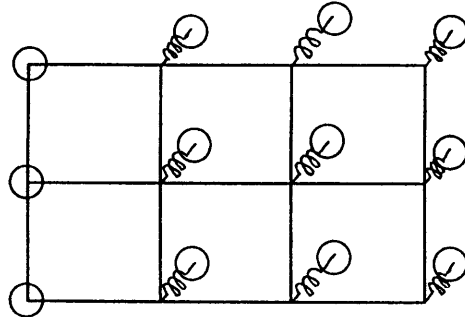
### (3) 現実の系における線形振り子～非線形振り子

実際に存在する系を、その微視的機構から観察すると、そこには線形振り子、非線形振り子（特にソリトン）が実在している。

#### (3-1) 結晶内の原子の格子振動（線形波動）

結晶構造をなす原子格子の振動を考えてみよう。実際の振動は種々の簡単な振動（これを振動モードと言う）の和で表される。ある種の振動モードは、近似的に、「各原子は独立であり、その平衡格子

点からのずれに比例した復元力を受ける」という機構から発生すると考えてよい。(図8) すなわち1つ1つの原子が独立に、平衡格子点からバネで繋がれているモデル、すなわち単一の線形振り子(1-1)と同じである。これを一步現実に近づけたるためには、前述した連成振り子モデル(2)の機構を考えるべきである。



(図8) 結晶内の原子の格子振動

### (3-2) 磁壁のソリトン

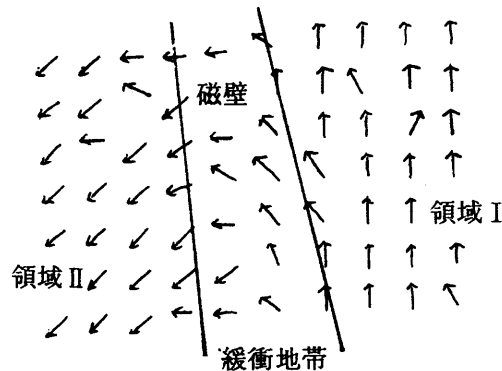
磁石(厳密な言い方では強磁性体)は、その材質に含まれる電子の回転(自転と公転)に由来する。厳密な言葉を使えば、電子の回転に起因する「角運動量」が、磁石の源、単位磁石となる。(なお、特に電子の自転は、「スピン」と呼ばれ、物理学の中で非常に重要な役割を果たす。)電子の回転は(右ネジ進行方向の規則で)ベクトルで表すのが普通である。(一般に、磁性を示すある方向のベクトルは、その進行を示す「右ねじの法則」で対応する回転を表している。)

強磁性体において角運動量は同じ方向に揃う傾向がある。(同じ方向に揃うとエネルギーが低くなる。)しかし、ある強磁性体の物体の全体にわたって、角運動量と同じ方向に向かうことは、世界の始めからそうでない限りありそうな事ではない。このことを、高温(ここでは温度効果による乱雑さによって角運動量方向はばらばらである。これを常磁性相と呼ぶ。)から温度低下させ、強磁性相(角運動量が揃う相)に向かわせることを用いて説明しよう。

常磁性相のバラバラな角運動量方向に対して、温度の低下によって強磁性体となり、「向きを揃えよ」と号令がかかったとき、各場所で揃っていくしかない。系の右端のある領域の角運動量たちの向きがどちらが多いかについて、はるかかなたの系の左端のある領域のスピンたちはその情報を得ることができない。(角運動量は隣合うものどうし、揃っていきこうという傾向があるだけであり、遠隔地の情報は得られない。)よって、例えば偶然、右端の角運動量たちは上向きに、左端の角運動量達は左下向きに揃ってしまう、ということもありうる。

右側は右側で揃ってゆく現象が、左側は左側で揃ってゆく現象が拡がってゆき徹底すれば、両者の情報が、ある場所(すなわち境界線)で突き合わされ、ここで「交渉」(どちらかが譲歩し、相手の方向に合わせましょう、という交渉)が始まるとも考えられる。しかし、すでに大きな領域にわたって勢揃いした角運動量たちの方向を廻すには莫大なエネルギーが必要となる。よって、この(方向の矛盾する)領域の存在が最終的形態となるのである。ここで、2領域の接触境界において、徹底して、ある1つの角運動量は領域Iの方向、となりの角運動量は領域IIの方向に従う訳ではない。当然、両

者はある程度、向きを揃えたいのである。すなわち、ある程度の幅をもった方向転換用の、換言すれば「緩衝地帯的な角運動量の領域」が存在し、その間で、領域Ⅰから領域Ⅱへ方向転換がなされる。この状況は、連成振り子モデルの振り子を、空間方向に沿って一周させる状況と同様である。



(図9) 磁壁の形成

### (3-3) 光、素粒子 (線形波動)

伝搬している光 (あるいは電波) も、連成振り子によってうまく説明できる。(但し、これらは線形振り子に限る。) ただし、光においては、2つのタイプの連成振り子が共存し、片方の振り子の変位は電場 (ベクトル)、もう一方の振り子の変位は磁場 (ベクトル) である。

このように光、等の素粒子の存在を説明するものが「場の量子論」である。(この学問は、量子力学の次に完成された学問である。) それによると、ほとんどの場合、素粒子の存在は、各々の素粒子に付随している「場」の線形振動によって解釈される。ここでまさに、連成振り子 (2) がそのモデルとなりうる。「場」とは宇宙の全空間に配備されている振り子の質点のようなものであり、それが振動すれば、そこに素粒子が存在すると解釈できる。

さて読者の中には、「素粒子」とは、必ず空間のある一点に存在 (「局在」) しているものではないか、だから連成振り子のような空間に無限に連なるモデルとは様相が異なるのではないか、と思う方もいるであろう。素粒子の局在、波動的姿、等の状態は、その時の形態 (特に観測の形態) による。素粒子の「局在」の描像も、「無限の拡がり」の描像も両方正しいと考えられる。

### (3-4) 核子 (=陽子、中性子) はソリトンか?

素粒子の存在に関して、次のような考え方が提唱されている。「真空とは  $n$  中間子の凝縮相 ( $n$  中間子の場の位相が一定値をとっている場所) である。この相の位相が振動していれば、それは中間子として観測される。さらに、この相の位相が位相ソリトンを形成していれば、核子 (=陽子、あるいは中性子) として観測される。」この理論モデルは難解ではあるが、本質的には連成振り子モデルが基本である。(図10)

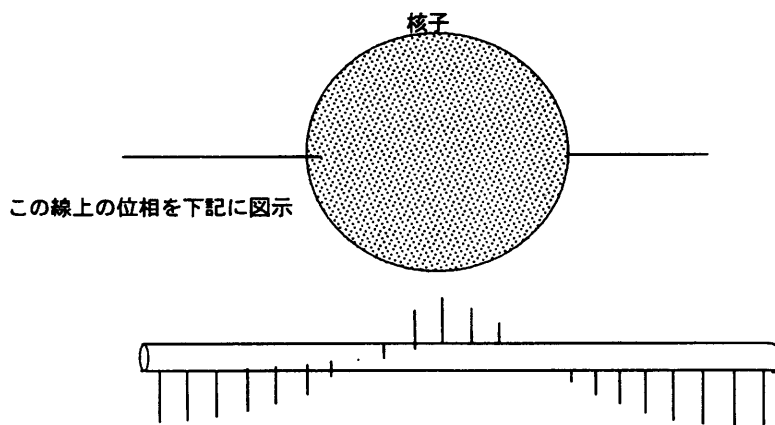


図10 核子は位相ソリトンか？

#### (4) 最後に

物理学の研究分野は、大きく、「素粒子物理学」と「物性物理学」に分類される。われわれが目にする物体は原子等、微細な要素が集合してできている。この微細な構成要素の究極の姿を追求するのが「素粒子物理学」である。それらが集合してできている物体の性質を知るのが「物性物理学」である。これらはちょうど、森は木からできているので、木の性質を知ろうとする事と、森の性質を、木の集合体として知ろうとする事に対応している。

木の性質を知ろうとする事 → 「素粒子物理学」

森の性質を（木の集合体として）知ろうとする事 → 「物性物理学」

物理学における波動の登場は、比喩的に言えば、木が振動し、その振動が森において何らかの姿として現れる、（たとえば「森がざわめく！」）という現象である。実際の系では、例えば、原子たちが莫大な数集まり、物体を構成、その原子が振動し、物体は何らかの様相を見せる（温度が上がる、固体が液体になる等）。これらは、「物性物理学」の範疇である。話題（3-1）（3-2）は、まさにこれらに相当する。

しかし、4つの例の内、最後の2つ、（3-3）と（3-4）では、各時空間に備わっている「場」が、「振り子の質点」の役割をし、振り子の「振動」、あるいは「ねじれ」が素粒子の存在を表す、というものである。このことは、「素粒子物理学」自体も、要素と全体という、「物性物理学」的な概念を持っていることを示す。特に、素粒子こそが要素かと思えば、さにあらずで、素粒子も何かの要素の集合的性格である、という、自然界における階層的傾向の存在を知ることができる。（下表参照）

	(木のレベル)	(森のレベル)
	素粒子／原子	物体
	素粒子／原子の振動	物体の性質
(木のレベル)	(森のレベル)	
素粒子の場（の運動）	素粒子	



以上、振り子のおもちゃ等を使って力学、ひいては自然界に横たわる粒子の存在の原理を概観した。ここで、振動、波動という現象が非常に普遍的なものであり、通常考えられる「素粒子が振動する」という概念もむろん正しいが、素粒子の存在自体が「振動が実体として具現しているもの」という驚くべき概念も存在する。これらの概念すべてを、振り子のおもちゃを使ってイメージする事ができる事も驚きである。

## 謝 辞

連成振り子のおもちゃ（特に、ソリトン伝搬を示す事のできる動的な連成振り子）の作成を、筆者とともに行いました中雄哲三君（平成7年当時、学生）に感謝します。

公開講座の聴講生の中には、受講後のアンケートの中で、「ただの、「お話し」だけでなく、数式を用いての本格的な説明を。」との意見を示す方もいた！このような声は、講師としては感激の極みである。これに応え、これらを付録として書き記す。

## 付録 A 線形振り子、非線形振り子の運動

エネルギーの式

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(\theta) = E.$$

なお、

$$v = l \frac{d\theta}{dt}.$$

∧∧

$$V(\theta) = mgl(1 - \cos \theta).$$

$$\frac{1}{2}ml^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgl(1 - \cos \theta) = E. \quad (A-0-1)$$

A-1) 線形振り子

この場合、次の近似が成立する。

$$1 - \cos(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 \quad (\theta \ll 1)$$

これによりエネルギーの式は、

$$\frac{1}{2}ml^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 = E. \quad (A-1-1)$$

以下、変形してゆく。

$$\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2E}{ml^2} - \frac{l}{g}\theta^2.$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{ml^2}} \sqrt{1 - \frac{mgl}{2E}\theta^2}.$$

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{mgl}{2E}\theta^2}} = \pm \sqrt{\frac{2E}{ml^2}} \int dt. \quad (A-1-2)$$

次のように変数変換する。

$$\psi = \sqrt{\frac{mgl}{2E}}\theta.$$

$$\sqrt{\frac{2E}{mgl}} \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \psi^2}} = \pm \sqrt{\frac{2E}{ml^2}} \int dt. \quad (A-1-3)$$

さらに、次のように変数変換する。  $\Psi = \sin y$ . 以降、  $y$  を使用。

$$\sqrt{\frac{2E}{mgl}} (y + c') = \pm \sqrt{\frac{2E}{ml^2}} (t + c'').$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0).$$

もとの変数に戻す。

$$\sin^{-1} \psi = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0).$$

$$\psi = \pm \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0)\right).$$

$$\theta = \pm \sqrt{\frac{2E}{mgl}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0)\right).$$

このように単振動が導出できた。

#### A-2) 非線形振り子

再び、エネルギーの式から出発

$$\frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgl(1 - \cos\theta) = E. \quad (A-0-1)$$

ここで、  $E \equiv \frac{1}{2} mv_0^2$ , と置く。

$$\frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgl(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2} mv_0^2.$$

変型して行く：

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{v_0^2}{l^2} - \frac{2g}{l}(1 - \cos\theta).$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{l} \left(k^2 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right). \quad (A-2-1)$$

ここで、  $1 - \cos(\theta) = 2\sin^2(\theta/2)$ , を利用した。

$$k \equiv \frac{v_0}{2\sqrt{lg}}$$

以降、  $k$  の値に応じて、3つに分類する。 ( $k < 1, k = 1, k > 1$ )

(i)  $k < 1$  振り子は振動する。

最大振幅（最大角度）を  $\theta_0$  とする。

$$k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \quad (0 \leq k < 1)$$

と置くことができる。

(A-2-1)式から、

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{k^2 - \sin^2(\theta/2)}. \quad (A-2-2)$$

ここで、

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = k \sin(\phi), \quad (A-2-3)$$

と置く。これから、

$$\frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{d\phi}{dt} \cdot k \cos \phi.$$

$$2\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot k \cos \phi \cdot \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{d\phi}{dt} \cdot k \cos \phi.$$

(A-2-3)を使って：

$$\sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} = \frac{d\phi}{dt}.$$

$$\frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt.$$

両辺を積分して、

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = \sqrt{\frac{g}{l}} t. \quad (A-2-4)$$

左辺の積分に関しては：

$$u \equiv \int \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = \int \frac{dz}{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}. \quad (A-2-5)$$

ここで、 $z = \sin \phi$ 、と置いた。

上式：(A-2-5)を次のように関数とみなす。

$$u = F(\phi) = G(z).$$

特に、 $u = G(z)$  の逆関数を定義する。

$$z = G^{-1}(u),$$

これは次のように名付けられている。

$$z = sn(u, k).$$

これまでの結果である

$$z = \sin \phi, \quad u = \sqrt{\frac{g}{l}} t, \quad (A-2-4)$$

を利用して、

$$\sin \phi = \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t, k\right), \quad (A-2-6)$$

故に、

$$\theta = 2 \sin^{-1}\left(k \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t, k\right)\right).$$

(ii)  $k > 1$  振り子は回転する。

前出の式：

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{l} \left(k^2 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right), \quad (A-2-1)$$

を書き替えて、次のようにする。

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4gk^2}{l} \left(1 - \frac{1}{k^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}} k \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

ここで、 $\theta/2 = \phi$  と置く。

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{1 - (1/k^2) \sin^2 \phi}} = k \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

$$\theta = 2 \sin^{-1}\left(\operatorname{sn}\left(k \sqrt{\frac{l}{g}} t, \frac{1}{k}\right)\right). \quad (A-2-7)$$

(iii)  $k = 1$  振り子は最高点から出発し、最高点に戻る。

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{l} \left(1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right), \quad (A-2-8)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\frac{d\theta}{2 \cos(\frac{\theta}{2})} = 2 \sqrt{\frac{g}{l}} dt. \quad (A-2-9)$$

ここで、 $\phi = \frac{\theta}{2}$  を用いて、積分すると、

$$\log\left(\tan\frac{\theta + \pi}{4}\right) = \exp\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right),$$

$$\theta = 4 \tan^{-1}\exp\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) - \pi.$$

## 付録B-1 静的ソリトン模型

ゴム弾性のエネルギー

$$\frac{c}{2}\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2.$$

全エネルギーの式

$$\frac{c}{2}\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + mgl(1 - \cos\theta) = E. \quad (B-1)$$

これは、振り子に関する全エネルギーの式(A-0-1)と同様の形式。

しかし、この最小化(次節(C-3)参照)は、振り子に関する全エネルギーの式の最小化(次節(C-4)参照)と異なる。

## 付録C 連成振り子模型

ここでは、ラグランジェの力学を用いる。

この系のラグランジアン：

$$L = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{c}{2}\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 - mgl(1 - \cos\theta). \quad (C-0)$$

ラグランジェ方程式：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial\theta}{\partial x})} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0. \quad (C-1)$$

その内容は、

$$m\ddot{\theta} - c\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + mgl\sin\theta = 0. \quad (C-2)$$

特に時間に関して不動の場合、

$$c\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = mgl\sin\theta. \quad (C-3)$$

特に振り子系の場合、

$$m\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta. \quad (C-4)$$

エネルギー項として、運動エネルギー項とゴム弾性エネルギー項を見れば、2者は全く同一の形式を持っている。(C-0)参照。ところが、最小作用の原理(=ラグランジェ方程式)によって、運動方程式を作ってみると、前2者に起因する項(加速度項とゴムの彎曲度項)は符号を逆転させ、外部ポテンシャル項と並ぶ。(C-2)参照。これが、両者の「運動」の傾向を逆転させる理由である。

1つの例として、付録A-3で述べた振り子が、最高点から最下点経由で最高点まで運動する場合は、弾性ゴムがx座標とともに、1つの谷から1つの山を越えて隣の谷まで移動する情況に相当する。(ここで、「情況」とは「速度」という観点における定義であり、「速度」とは、振り子の場合は通常のを指し、ゴム弾性系の場合は、x軸に応じての位相変化を指している。)