

PSD (1次元位置検出器) で検証する実体振り子の周期運動

永吉 将人^{*1}

宇藤 茂憲

福岡教育大学教育学部

Periodic Motion of a physical pendulum verified experimentally using PSD (position sensitive detector)

Masato NAGAYOSHI

Shigenori UTOH

Department of Physics, Fukuoka University of Education

キーワード：実体振り子, 振り子の空気抵抗力, 振り子の軸摩擦係数, PSD, ルンゲ・クッタ法, 最小自乗法, VBA

概要

微小角度から広角度領域(約 60° 以下)におよぶ実体振り子の振れ角度を1次元位置検出器(Position Sensitive Detector, 以下 PSD)で測定し, このデータをADコンバーター経由でパソコンに収集して実体振り子の周期運動を検証した。実験システムの制御, データ処理プログラムおよびシミュレーションプログラムは汎用表計算ソフトを用いて製作した。ルンゲ・クッタ法によるシミュレーションの値と実験で得たデータを最小自乗法で評価して実体振り子の回転軸の摩擦係数を求め, 振り子運動における推進力や制動力(空気抵抗や回転軸摩擦など)の時々刻々と変化するようにすを定量的に解析する試みをおこなったので報告する。

1. はじめに

物理学実験の中でも力学で学ぶ振り子の周期運動は, 小・中学校から高等学校, 更には大学教養レベルに至るまでの長い期間にわたって学び続ける物理学の主要なテーマの1つである。しかし, その実験のほとんどは微小な振れ角度における限定された条件下での運動を対象としたものである。振れ角度が微小な場合, 振り子の先端(おもり部分)の描く軌跡は最下点接線方向の直線運動とみなせるので, 例えば, 超音波距離計¹⁾などでこの運動をモニターすることができるが, 運動の解析は近似的な取り扱いになる。これに加えて, これまでの振り子運動に関する報告では実際に生じている振動中の空気抵抗力や摩擦力の影響を定量的に考慮されることは殆どなかった。そこで, 振れ角度の大きさに限定されずに振り子運動を容易に実験するため, 定量的に振れ角度をモニターできるセンサーとして PSD を使用し, また, ADコンバーター経由でパソコンへのデータ収集・制御およびデータ処理するプログラムを汎用表計算ソフト[Micro Soft Excelとこのソフトに付属する Visual Basic for Application (以下, VBA)]で製作して, 実験システムを構築した。実験データとシミュレーションを組み合わせた解析で, 時間の経過に伴って変化する推進力や空気抵抗および回転軸摩擦などの制動力を求めて, 振り子運動の検証をおこなった。小・中・高の教育現場での振り子を使った実験で, 好ましいデータが示せなかったときによく耳にする「空気抵抗力のために……」とか「摩擦力のために……」の説明の根拠となる基礎データの提示を考慮して, 現象の詳細を実験とシミュレーションで探ってみた。但し, 製作した装置の構造的な制限のため, 振れ角度約 60° 以下で測定可能なシステムとなった。また, PSDで周期運動をモニターするため, 実験システムの構成上, 振り子は実体振り子とした。

※1 現在, 福岡市立元岡中学校教諭

2. 実験システムと実験手順

2-1. 実験システムについて

実験システムは、①実体振り子と PSD 位置検出部、②パソコン制御によるデータ転送部、③データ処理およびシミュレーションプログラムから構成されている (図 1)。以下、実験システムの各部を概説する。

① 実体振り子は 4.0ϕ mm で長さ 0.840 m (質量 28.5 g) のアルミニウム円柱棒をアームとし、先端に直方体 (80 mm \times 80 mm \times 40 mm) の箱を固定してこの中に鉛などを入れて質量を調整した。本報告では空気抵抗の影響を増大させるため、このような直方体形状のおもりを実体振り子に取り付けた。2 個のベアリング (イトー製 BE08 : 外径 26.0 mm, 内径 10.0 mm, 厚み 8.0 mm) と真鍮製円柱棒 (10ϕ mm) で回転軸をつくり、回転軸断面の中心と実体振り子の振動の支点を一致させて実体振り子を回転軸に取り付けた。実体振り子の周期運動の振れ角度をモニターするため、PSD センサー²⁾ (浜松ホトニクス製 1 次元位置検出センサー S8543 : 有効長 24 mm) を用いた。回転軸と実体振り子および PSD の取り付けの位置関係を図 2(a) と図 2(b) に示す。PSD はセンサー部に照射された光スポットの 1 次元の位置を検出するもので、PSD センサーからのフォト電流の電圧変換に PSD 信号処理回路 [浜松ホトニクス製 C3683-01 (電源 ± 15 V)]³⁾ を使用した。PSD センサーの中央部から x の位置にスポット光が当たると (図 1), PSD センサー両端に光電流 I_1 と I_2 が発生し、照射された位置 $x = (I_2 - I_1) l_0 / [2(I_1 + I_2)]$ を検出することができる。ここで、今回用いた PSD センサー S8543 の感度波長は $320 \sim 1100$ nm であるので、スポット光にレーザーポインター ($\lambda = 620$ nm,

出力約 1 mW) を用い、減光フィルター [Edmund 製光学濃度 0.6 (透過率 $25 \pm 2.5\%$)] で強度を弱めて使用した。PSD 信号処理回路から分岐した信号をパソコンオシロスコープ (P&A Technologies 製 PA-S2000 : 2 チャンネルサンプリングレート 100 MS/sec) に接続し、振動をモニターしながら PSD センサーの軸設置を調整した後、実験をおこなった。

② 1 回の実験で収集するデータ数は数千点以上になるため、12 ビット AD コンバーター [LabJack 製 U3HV-LJ : -10 V \sim $+10$ Vdc (分解能 4.88 mV) 4 チャンネルと 0.4 V \sim 2.4 Vdc (分解能 600 μ V) 4 チャンネル併用型] を使用して PSD 信号処理回路からの電圧信号を USB 端子経由でパソコンへ取り込んで解析した。汎用表計算ソフト付属の VBA でプログラムを自作して、AD コンバータを次のように制御した。収集するデータ数とデータ収集間隔時間を指定して、“測定開始”、“測定中断”と“データクリア”のコマンドで制御した。計測後、計測に要した時間 (最小値はミリ秒) と測定データ数とで測定点の時間を確定した。

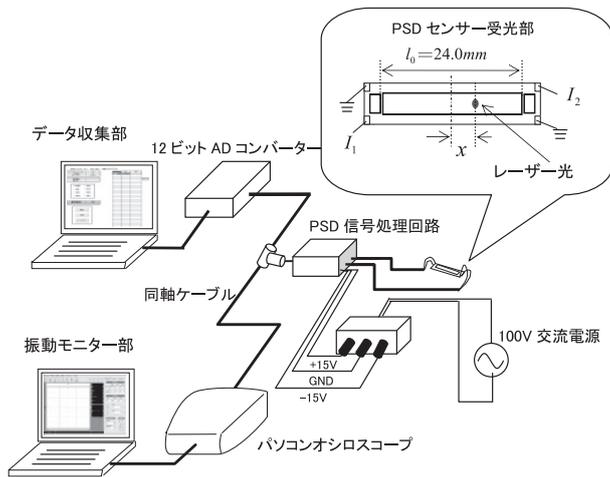


図 1 PSD を用いた振り子実験のシステム図。PSD センサー部分を拡大している。PSD センサー受光部は図 2 (a) の矢印部に固定した。

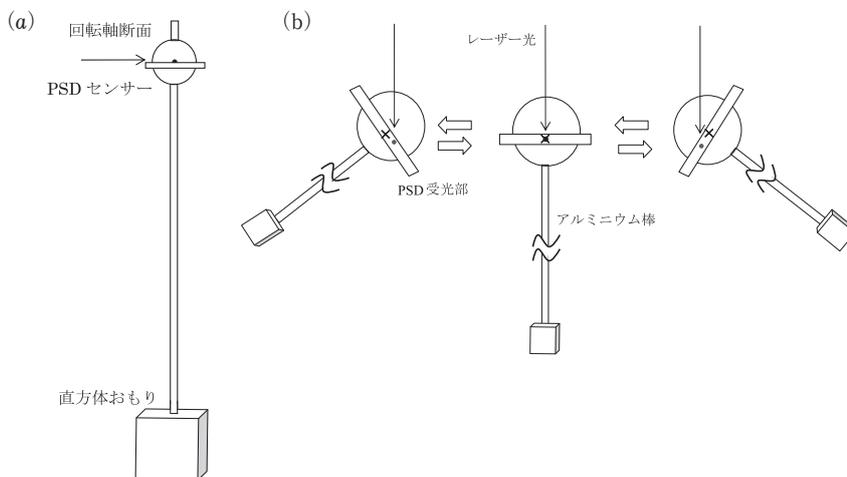


図 2 (a) 実体振り子の全体図, (b) 実体振り子の振動状態とレーザー光が PSD に照射される位置関係を示した断面図。

③ データ処理プログラムを汎用性ソフト Excel と VBA で自作した。実験で得た生データを、次の(イ)から(ハ)の6段階のステップを経てデータ処理した。対応するグラフおよびプログラム操作画面を図3から図7に示す。

- (イ) 振幅の基準値の設定：PSD センサーを回転軸上に設置する際のわずかなズレのため、振り子運動をモニターするオシロスコープの振動中心をオシロスコープの時間軸と完全にゼロクロスさせることは難しいので、振動中心を設定し直して対称性の良いデータに補正する。
- (ロ) 振幅データの規格化：最大振幅を1としてデータの振幅を規格化する [(イ) (ロ)は図3]。
- (ハ) データの平滑化：データの雑音を軽減し、SN比を向上させるため、2次3次多項式適合の重みつき(5点)移動平均法⁴⁾でデータを平滑化処理した(図4)。
- (ニ) データの初期設定：異なるデータでは振り子運動の開始状態がそれぞれ違うため、各データの振幅や位相を比較するには、開始点をあわせる必要がある。例えば、図5に示す左側グラフの赤点(図中の※印)を開始点とする場合、補正後は各データを右側グラフのように統一する。
- (ホ) 振幅の極大値・極小値抽出：実験データから振幅の極大値と極小値のデータを抽出するプログラム。処理前後のグラフを図中に示す(図6)。

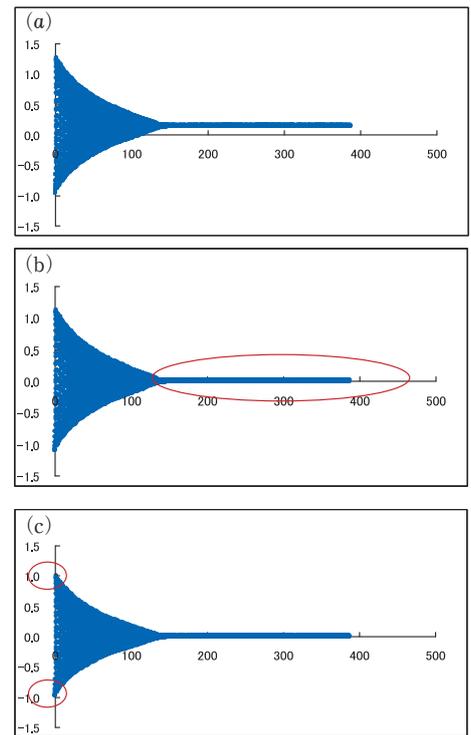


図3 (イ)と(ロ)のデータ処理プロセスを示す。横軸は時間(s), (a)(b)の縦軸は測定値, (c)の縦軸は規格値。(a)生データ, (b)(イ)のデータの対称性補正, (c)(ロ)のデータの振幅規格化

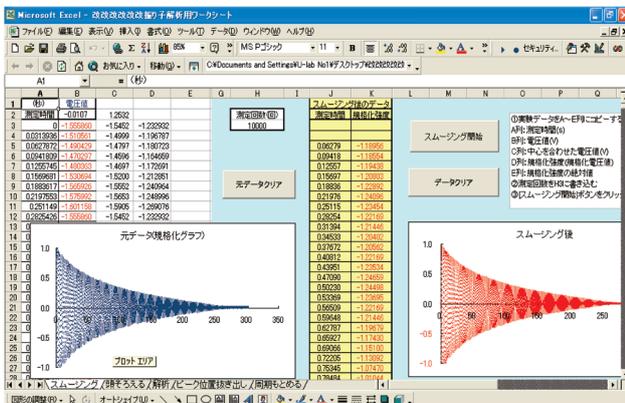


図4 (ハ)のデータの平滑化操作画面

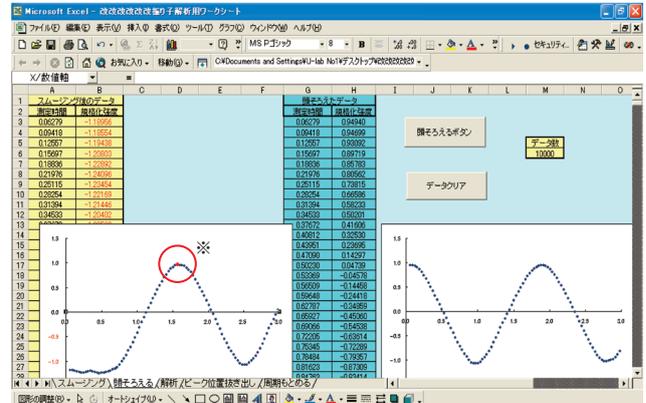


図5 (ニ)のデータの初期設定操作画面

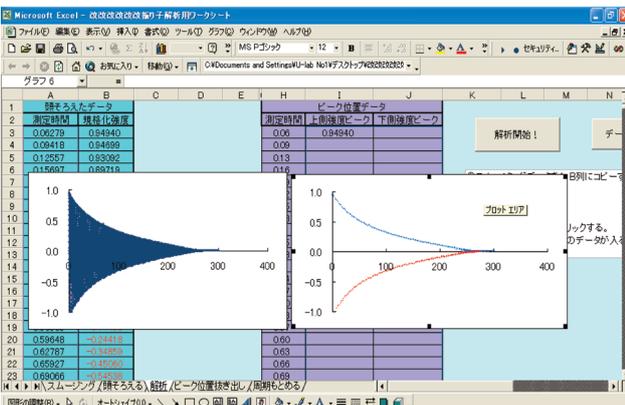


図6 (ホ)の振幅の極大値と極小値抽出操作画面

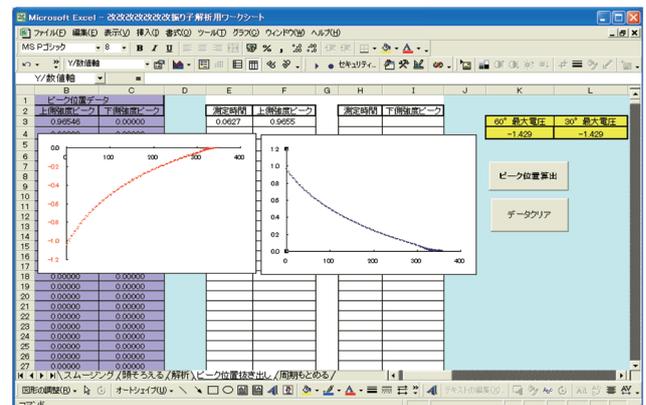


図7 (ハ)の振り角度規格化操作画面

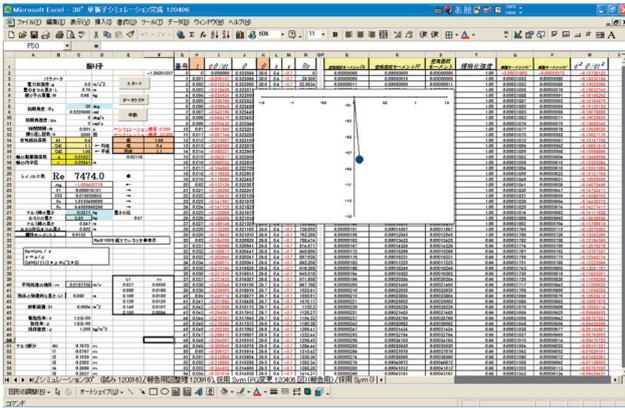


図8 シミュレーション操作画面

(ハ) 規格化：初期 ($t=0s$) の最大振れの角度が異なるデータを比較する場合にデータ処理するプログラム。今回の実験では、最大振れ角度 30° のときの PSD 信号処理回路からの直流電圧信号を 1 として、振れの角度を規格化した (図 7)。図 8 にシミュレーションプログラムの操作画面を示す。実体振り子の基本的な数値 (例えば、質量、重心の位置、抵抗係数など) および条件 (例えば、初期角度、時間間隔など) を代入して計算を実行した。計算途中で、各物理量の値を抽出してグラフで表示した (詳細は「3-5. シミュレーションプログラムの概説」を参照)。

2-2. 実験手順について

実体振り子のアーム部分をアルミニウム円柱棒 (4ϕ mm, 密度 $\rho=2.70$ g/cm³) で、また、振り子の進行方向に対する面積が 80 mm \times 80 mm (厚み 40 mm) の直方体おもりを工作紙で作ってこの中に鉛球、鉛円筒と油粘土などを入れて質量を調整して実体振り子を製作した。この直方体形状のおもりは空気抵抗を増すために用いた。

実験手順は、(i) 実体振り子と PSD センサーを真鍮製回転軸に設置、(ii) データ収集・制御プログラム画面でデータ収集条件 (回数と測定間隔時間) を入力して測定、(iii) データ保存、(iv) 実験条件を変えて (i)~(iii) を繰り返して測定した後、(v) データ処理とデータ解析、をおこなった。振り子の最大振れ角度 θ_{\max} はアルミニウム円柱棒アームに傾斜角度計を合せて測定した後、振り子の振動方向が真鍮製回転軸に対して垂直になるように幾何学的な位置決めをおこなった。位置決め用レーザーポインターを振り子アームに照射して θ_{\max} 設定の再現性を確保した。

3. 理論とシミュレーション

3-1. 運動方程式について

単振り子の長さを P (m)、おもりの質量を m (kg)、重力加速度を g (m/s²)、鉛直からの振れの角度を θ (rad) とすると、運動方程式は

$$mP \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta \quad (1)$$

で示せる。振れ角度の小さな振動 (数学的には $\theta \approx 0^\circ$ だが、実験では $\theta < 10^\circ$ 程度) では、 $\sin\theta \approx \theta$ の近似を用いて、 $mP \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta \quad (1')$

より、 $\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (2)$ の解、および $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{P/g} \quad (3)$ の振動周期を得ることができる。振れ角度が微小でない場合、周期が $T = 4\sqrt{P/g}K(k) \quad (4)$ であらわされることは多くの力学書⁵⁾ に解説がある。但し、 θ_0 : 初期角度、 $\omega = \sqrt{g/P}$: 角振動数、 $K(k)$: 第 1 種楕円積分である。

振り子の周期運動を現実に近い形に、つまり、重力下での振り子運動の振幅は時間とともに減衰してやがて静止するので、制動力 (例、空気抵抗力や軸摩擦力など) を考慮した運動方程式を立てる必要がある。図 9 の O 点を振動軸とした実体振り子の回転の運動方程式は

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -m'gh\sin\theta - F(L, v)L - Y \quad (5)$$

となる。右辺第 1 項は重力下での実体振り子の推進力 (或いは制動力) モーメントで、右辺第 2 項および第 3 項に空気抵抗力と回転軸摩擦力の制動力モーメントを追加している。ここで、 m' : 実体振り子の質量、 I : 実体振り子の慣性モーメント、 h : 回転軸からおもり重心までの距離、 L : 実体振り子の回転軸からの距離 (変数)、

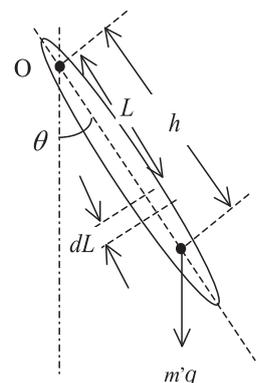


図9 実体振り子の図 [本文(5)式参照]

v : L の位置の速度, $F(L,v)$: 空気抵抗力, Y : 回転軸摩擦力モーメントとする。(5)式を用いて, 実験データと4次のルンゲ・クッタ法によるシミュレーションの組み合わせで, 実体振り子の運動を解析した。

3-2. 空気抵抗力について

振動中に実体振り子が受ける空気抵抗力モーメントをもとめるには, 実体振り子の各位置でのレイノルズ数 $R_e \equiv Ul/\nu$ (無次元量) を求めて, 空気抵抗力が近似的に速度の1乗に, 或いは2乗に比例するかを判定する必要がある。但し, U を平均流速, l を物体の特徴的な長さ, $\nu = \mu/\rho$ を動粘性率 (μ : 粘性率, ρ : 流体の密度) とする。 D を流体中の抵抗力, S を物体の流れに直角方向の断面積 (射影面積) として, 流体中の抵抗係数 (無次元量)

$$C_d \equiv D/(0.5\rho U^2 S) \quad (6)$$

を考えると, レイノルズ数 R_e との関係は, 実験で得ることのできる C_d-R_e グラフ⁶⁾ から,

$$C_d = H(R_e) \quad (7)$$

で表される。但し, C_d-R_e グラフにおける C_d と R_e の関係を $H(R_e)$ で示している。(6)と(7)式から,

$$D = 0.5\rho U^2 S H(R_e) \quad (8)$$

と示せる。例えば, 球が空気抵抗力を受ける場合, 公表実験データの C_d-R_e グラフから次のように近似的に現象を特徴付けることができる。

$$(i) R_e < 1 \quad : \quad H(R_e) = k_1/R_e \quad (9)$$

$$(ii) 10^5 > R_e > 10^3 \quad : \quad H(R_e) = k_2 \quad (10)$$

但し, k_1, k_2 : 定数。この関係から流体中の抵抗力 D は,

$$(i) R_e < 1 \quad \text{では, } D = \rho U^2 S k_1 / (2R_e) = k_1 \rho U^2 S \mu / (2\rho U l) = k_1 \mu U S / (2l) \quad \rightarrow \quad D = k_3 \mu U l \quad (11)$$

$$(ii) 10^5 > R_e > 10^3 \quad \text{では, } D = k_4 \rho U^2 S \quad (12)$$

但し, k_3, k_4 : 定数 ($k_3 = k_1 S / 2l^2$, $k_4 = C_d / 2$)。

時間と共に変化する実体振り子の各部の速度を計算してレイノルズ数を求めることで, 実体振り子の各位置が受ける空気抵抗力を見積もることができる。シミュレーションでの計算を簡単にするために, 今回の実験で用いた直方体おもりの平板と円柱棒アームの受ける抵抗力は C_d-R_e グラフから判断して, $R_e < 10^2$ 領域は近似的に(9)の関係より(11)式の抵抗力を受け, また $10^5 > R_e > 10^2$ では(10)の関係より(12)式の抵抗力を受けるとみなし, $R_e = 10^2$ を境にして, 空気抵抗力が速度の1乗則と2乗則に分かれると近似して計算した。

3-3. 回転軸摩擦力について

実体振り子の振れ角度に対する重力効果は $m'g \sin\theta$ であり, これが推進力, 或いは制動力として実体振り子に作用する力を計算できるが, 実体振り子の荷重が回転軸部のベアリングに作用し, その反作用として, ベアリングが実体振り子の回転軸を押す力 [抵抗力: $\vec{N} = (f_x, f_y)$] をあらかじめ知ることはできない。そこで, 図10(a)に示すように, 実体振り子の荷重が回転軸部のベアリングに作用するのは点Aのみとして, 振動とともに移動するものと仮定し, 実体振り子の重心の加速度 $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y)$ を $\alpha_x = d^2x/dt^2 = L(d^2\theta/dt^2) \cos\theta$ と $\alpha_y = d^2y/dt^2 = L(d^2\theta/dt^2) \sin\theta$ とすると, 実体振り子の重心の運動方程式⁷⁾ は

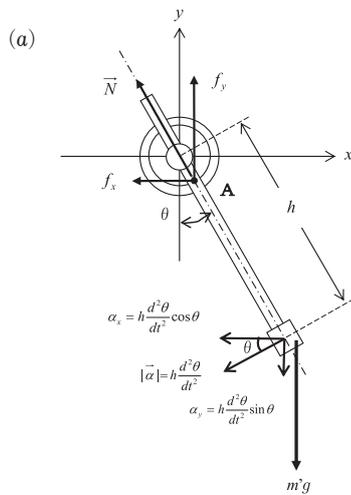
$$m'(d^2x/dt^2) = f_x \quad (13)$$

$$m'(d^2y/dt^2) = f_y - m'g \quad (14)$$

で示せる。抵抗力に回転軸の摩擦係数を掛けて摩擦力を計算し, 運動方程式(5)式の右辺第3項の制動力モーメントをもとめた。ここで, m' は実体振り子 (おもりとアーム部) の質量である。尚, 回転軸はベアリングに固定しているので, このベアリングの摩擦係数は実験で求める必要がある。また, 製作した実験システムでは2個のベアリングで回転軸部を構成した。図11に実体振り子の1周期の各状態を①から⑧で示している。

3-4. 慣性モーメントについて

実体振り子 [図2(a)] を “アルミニウム円柱棒のみ” の部分と “直方体おもり + アルミニウム円柱棒” の部分にわけて考えると, 振り子の慣性モーメントは(15)式であらわすことができる。アルミニウム円柱棒上端から回転軸までの長さを d とし, 回転軸からおもり上端までの長さを L_1 , おもりの部分の長さを L_2 とする。おもり部分の直方体 (80 mm × 80 mm × 40 mm) は均質で直線状に質量が集中しているとして近



似して、慣性モーメント I を計算すると、

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-d}^{L_1} L^2 \rho_1 dL + \int_{L_1}^{L_1+L_2} L^2 \rho_2 dL \\
 &= \rho_1 [L^3/3]_{-d}^{L_1} + \rho_2 [L^3/3]_{L_1}^{L_1+L_2} \\
 &= \rho_1 [L_1^3/3 - (-d)^3/3] + \rho_2 [(L_1+L_2)^3/3 - (L_1)^3/3]
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

となる。但し、 ρ_1 をアルミニウム円柱棒の部分の線密度、 ρ_2 をおもり部分の線密度として、(15)式に $\rho_1 = (L_1+L_2) \pi r_{AL}^2 \rho_{AL} / (L_1+L_2)$ と $\rho_2 = (m+L_2 \pi r_{AL}^2 \rho_{AL}) / L_2$ を代入した。ここで、 ρ_{AL} : アルミニウムの密度、 m : おもりの質量、 r_{AL} : アルミニウム円柱棒の半径である。この方法でもとめた実体振り子の慣性モーメントの値と、アルミニウム円柱棒と直方体おもりの大きさをもとに平行軸の定理で計算した値⁸⁾との差は0.02%程度であった。

3-5. シミュレーションプログラムの概説

(5)式の運動方程式に基づいた4次のルンゲ・クッタ法のプログラムをVBAで製作し、重力作用下で振動する実体振り子の推進力や制動力などの力学的な各物理量の時間変化を検証した。シミュレーションでの計算の流れを図12に示す。メインプログラムの流れを図12(a)に、角加速度 $A(t, \theta, \omega) = d^2\theta/dt^2$ と角速度 $B(t, \theta, \omega) = d\theta/dt = \omega$ の関数を定義するサブルーチンを図12(b)に示している。図12(b)の関数①は(5)式より、
 $A(t, \theta, \omega) = d^2\theta/dt^2 = (-m'g \sin\theta \cdot h - ff_0 \cdot h - (ff_1 \cdot L_1 + ff_2 \cdot L_2 + \dots + ff_{10} \cdot L_{10}) - f_x \mu' \cdot r - f_y \mu' \cdot r) / I$
 で示せる。但し、 ff_0 : 直方体おもりに作用する空気抵抗力、 ff_i : 10等分したアルミニウム円柱棒の i 番目に作用する空気抵抗力、 h : 実体振り子の回転軸から重心までの距離、 r : 回転軸の半径、その他の各文字は「3-1. 運動方程式」の項を参照。時刻 t における各物理量(例、空気抵抗力モーメント、回転軸摩擦力モーメント等)を代入して、メインプログラムで時刻 t での $A(t, \theta, \omega)$ の関数値を決めている。

直方体おもりとアルミニウム製の振り子アーム部分に加わる空気抵抗力に速度の1乗則、或いは2乗則の適用を判断するため、適用境界となる速度をレイノルズ数から逆算して求めた。具体的には、80 mm × 80 mm × 40 mm 直方体の重心位置での速度を計算し、また、アルミニウム棒の円柱部分を10分割して、各分割の重心位置での速度を計算して、適用法則を決定した後、それぞれの部分に一樣な空気抵抗力が作用するとして各部分の空気抵抗力モーメントをもとめた。ベアリングが回転軸を押す力 (f_x, f_y) は、ルンゲ・クッタ法でもとまる時刻 t の角加速度から(13)と(14)式より、

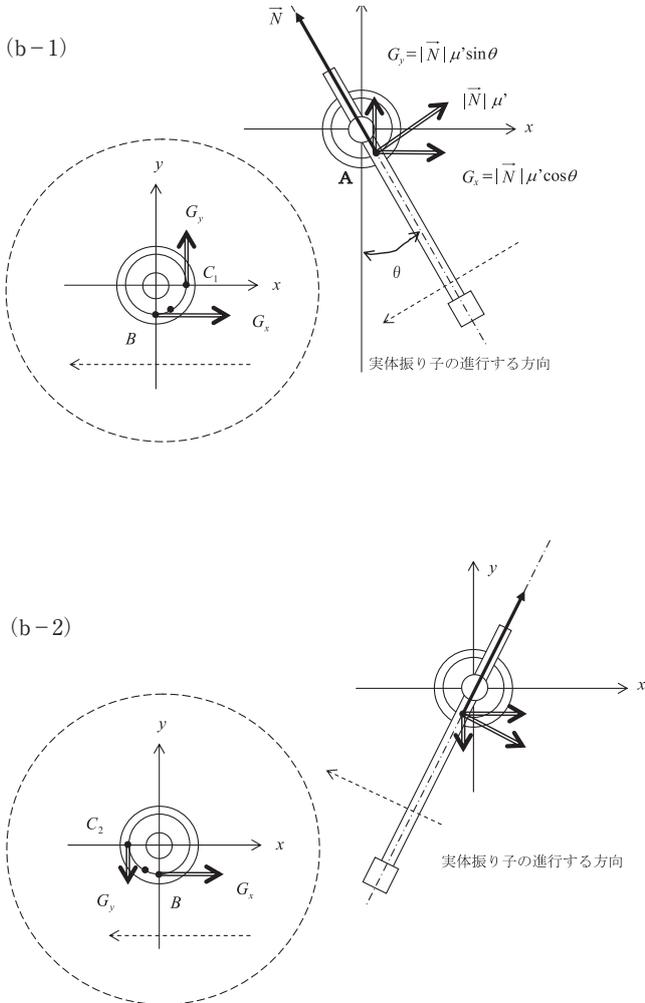


図10 (a) 実体振り子の重心部の加速度と回転軸を押す力、(b-1) 図11の②の状態にある回転軸摩擦力が作用する概念図、(b-2) 図11の④の状態にある回転軸摩擦力が作用する概念図。断面図の内側の円がベアリングと接する回転軸を示す。

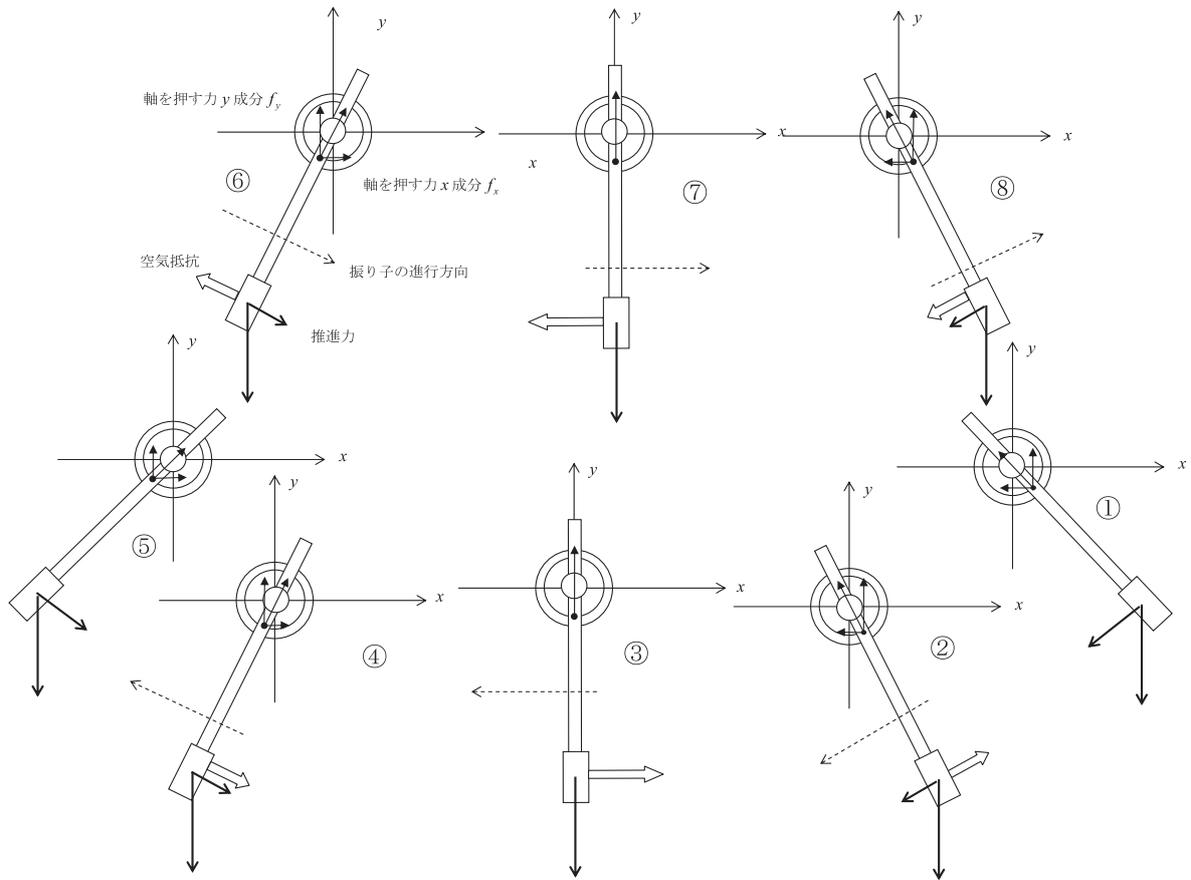


図11 実体振り子が①から⑤を経て①に戻るまでの1周期における $\vec{N}=(f_x, f_y)$ の変化のようすを概念的に示す。ベアリングが回転軸を押す力はA点のみで作用すると仮定している。

---> : 実体振り子の進行方向, —> : 回転軸を押す力, —> : 重力作用下の分力,
=> : 直方体おもりに作用する空気抵抗

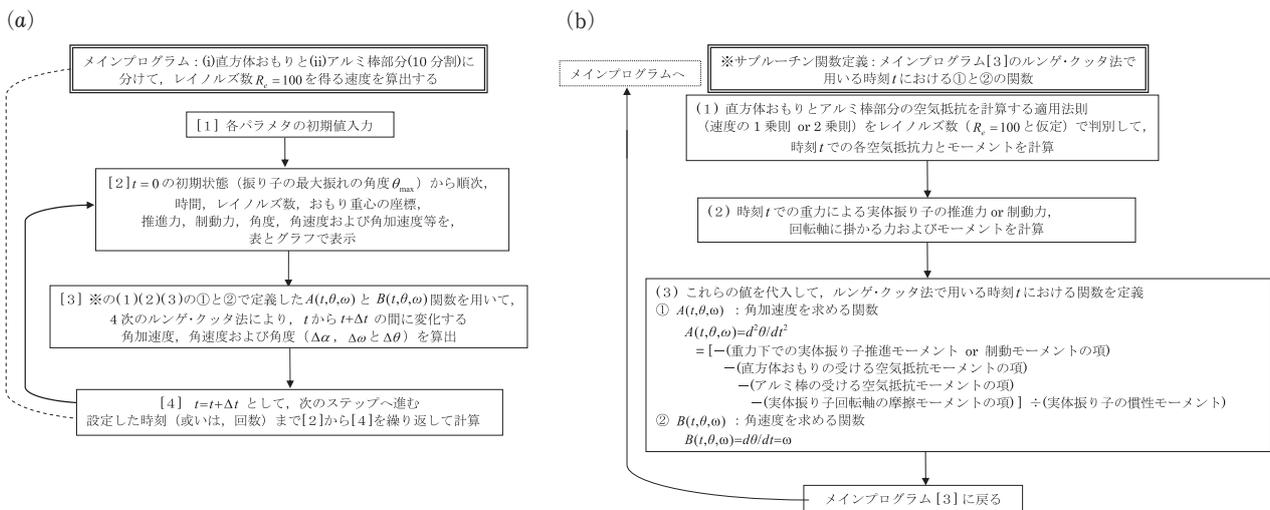


図12 4次のルンゲ・クッタ法によるシミュレーションのプログラムの流れ
(a) メインプログラム, (b) サブルーチン関数定義部のプログラム

$$f_x = m' h \cos \theta (s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4) / 6, \quad f_y = m' h \sin \theta (s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4) / 6 + m' g$$

と示せる。但し、 m' ：実体振り子（おもりとアーム部）の質量、 θ ：振れの角度、 $(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4) / 6$ ：ルンゲ・クッタ法の重価平均による角加速度である。ここで、

$$s_1 = A(t, \theta, v)$$

$$u_1 = B(t, \theta, v)$$

$$s_2 = A(t + \Delta t / 2, \theta + \Delta t \times u_1 / 2, v + \Delta t \times s_1 / 2)$$

$$u_2 = B(t + \Delta t / 2, \theta + \Delta t \times u_1 / 2, v + \Delta t \times s_1 / 2)$$

$$s_3 = A(t + \Delta t / 2, \theta + \Delta t \times u_2 / 2, v + \Delta t \times s_2 / 2)$$

$$u_3 = B(t + \Delta t / 2, \theta + \Delta t \times u_2 / 2, v + \Delta t \times s_2 / 2)$$

$$s_4 = A(t + \Delta t, \theta + \Delta t \times u_3, v + \Delta t \times s_3)$$

$$u_4 = B(t + \Delta t, \theta + \Delta t \times u_3, v + \Delta t \times s_3)$$

である。⁹⁾ 時刻 t での角加速度、角速度および角度が決まると、 $t = t + \Delta t$ として次のステップへ進んで設定した時刻（或いは、回数）まで図 12(a) の [2] から [4] を繰り返して計算を実行した。尚、シミュレーションをおこなうにあたって、回転軸摩擦係数 μ' は不明なので、実験データとシミュレーション値を最小自乗法で評価する方法で決定した後、解析をおこなった。

4. データ解析

実体振り子の振れ角度の時間変化を測定して、ある条件下での角速度や角加速度および空気抵抗力の値を求めることは可能だが、実体振り子の回転軸で使用しているベアリングの摩擦係数 μ' は実験データとシミュレーションを組み合わせた解析でもとめる必要がある。実体振り子（外形 80 mm × 80 mm × 40 mm の直方体形状で質量が 0.949 kg のおもりと、長さが 0.840 m で 4φ mm の円柱アルミニウム製アームで構成）の最大振れ角度を 30° に設定して測定し、図 3～図 5 に示す (i) から (ii) のデータ処理したものを図 13 に示す。今回の実験条件では、振動開始から約 350 秒後に実体振り子は静止した。製作した実体振り子の回転軸部を構成する 2 枚のベアリングの摩擦係数 μ' をこのデータから決定するため、最小自乗法¹⁰⁾ による解析をおこなった。振れの最大角度が 30° から 5° 近傍に変化するまでに実体振り子は約 166 回振動したが、この実験と同じ条件を適用した 4 次のルンゲ・クッタ法によるシミュレーション結果と比較すると、振動開始から 166 回目の振動終了までの両者の時間のズレは約 0.85 秒であった。実験データとシミュレーション間で生じる周期のずれ (0.85/166 = 0.005s) を補正する必要があるため、シミュレーションで i 番目の振幅の極大値 $M_{cal}(t_i)$ と実験で得たデータの極大値 $M_{exp}(t'_i)$ を時間的に一致 ($t_i = t'_i$) させるため、同時刻に割り振り直して修正した。 μ' を 0.0354 から 0.0380 に至るまで 1/1000 刻みで変化させて計算し、得た数値データを実験システムの項で概説したデータ処理で (A) まで実施して極大値のみを抽出した。最大の振れの角度 30° から振れ角 5° 近傍までの振幅の極大値の全てに対して $M_{cal}(t_i)$ と $M_{exp}(t_i)$ の差を 2 乗し、この総和 $M_{sum} = \sum_{t_i} [M_{cal}(t_i) - M_{exp}(t_i)]^2$ が最小となる時の μ' を回転軸のベアリングの摩擦係数とした。横軸に μ' を、縦軸に M_{sum} を表示した計算結果が図 14(a) である。これらのデータが 2 次関数で近似できるとして、2 次関数の最小自乗法でもとめた曲線 $y = 5377.9x^2 - 395.34x + 7.268$ から、

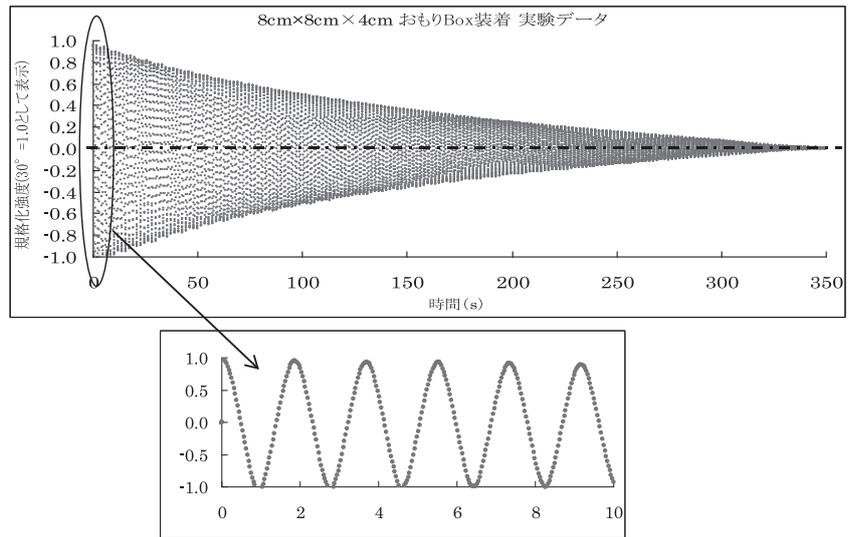


図13 80 mm × 80 mm × 40 mm 直方体おもり (0.949 kg) とアームの長さ 0.840 m の実体振り子の処理後のデータ。下の図は振動開始から 10 秒間の振動を示す。

振り子は静止した。製作した実体振り子の回転軸部を構成する 2 枚のベアリングの摩擦係数 μ' をこのデータから決定するため、最小自乗法¹⁰⁾ による解析をおこなった。振れの最大角度が 30° から 5° 近傍に変化するまでに実体振り子は約 166 回振動したが、この実験と同じ条件を適用した 4 次のルンゲ・クッタ法によるシミュレーション結果と比較すると、振動開始から 166 回目の振動終了までの両者の時間のズレは約 0.85 秒であった。実験データとシミュレーション間で生じる周期のずれ (0.85/166 = 0.005s) を補正する必要があるため、シミュレーションで i 番目の振幅の極大値 $M_{cal}(t_i)$ と実験で得たデータの極大値 $M_{exp}(t'_i)$ を時間的に一致 ($t_i = t'_i$) させるため、同時刻に割り振り直して修正した。 μ' を 0.0354 から 0.0380 に至るまで 1/1000 刻みで変化させて計算し、得た数値データを実験システムの項で概説したデータ処理で (A) まで実施して極大値のみを抽出した。最大の振れの角度 30° から振れ角 5° 近傍までの振幅の極大値の全てに対して $M_{cal}(t_i)$ と $M_{exp}(t_i)$ の差を 2 乗し、この総和 $M_{sum} = \sum_{t_i} [M_{cal}(t_i) - M_{exp}(t_i)]^2$ が最小となる時の μ' を回転軸のベアリングの摩擦係数とした。横軸に μ' を、縦軸に M_{sum} を表示した計算結果が図 14(a) である。これらのデータが 2 次関数で近似できるとして、2 次関数の最小自乗法でもとめた曲線 $y = 5377.9x^2 - 395.34x + 7.268$ から、

$y' = 10755.8x - 395.34 = 0$ として $\mu' = 0.0368$ のときに M_{sum} が最小値を示すので、この値を製作した実験システムのベアリングの摩擦係数とみなした。図 14(b) は、実験データおよび $\mu' = 0.0368$ のときのシミュレーションでもとめた振れの角度が 30° から 5° 近傍に至るまでの振幅の極大値をグラフで示している。

決定した μ' の値を用いて、図 13 の実験条件でシミュレーションをおこない、重力の作用により振動とともに時々刻々と変化する実体振り子の推進力 (或いは制動力)、レイノルズ数と空気抵抗力および回転軸部の摩擦力などの数値を抽出し、これらが振動開始から約 1.5 周期において変化するようすを図 15(a-1)、15(a-2)、15(b)、15(c)、15(d-1)、15(d-2)、15(e-1)、15(e-2) に示す。各図に示す①から⑧の番号は、図 11 の実体振り子の各振動状態に対応している。また、最大振れの角度が 30° 、 15° 、 10° と 5° 近傍での全空気抵抗力および回転軸摩擦力の各制動力モーメントの変化を図 16(a)、16(b)、16(c)、16(d) に示す。

重力下における実体振り子に作用する力 $m'g\sin\theta$ のシミュレーション結果を“力(N) vs. 経過時間(s)”で図 15(a-1) に示す。 x 軸正方向の力をプラスの符号で、 x 軸負方向の力をマイナスとしているが、実体振り子の振動方向によって推進力或いは制動力となるので、これらの力を実体振り子の運動方程式(5)に適用するモーメント [(5)式参照] で示し、振動の推進力モーメントとなる場合は y 軸正の領域に、また制動力モーメントになる場合は y 軸負の領域で表示した [図 15(a-2)]。振動中の直方体おもりの重心部におけるレイノルズ数の変化を図 15(b) に示す。実験で得ることのできる平板および円柱の“流体中の抵抗力 vs. R_e (レイノルズ数)”のグラフ⁶⁾ から判断して、 $R_e = 10^2$ の値を境界として空気抵抗力を速度の 1 乗則、或いは 2 乗則に比例するとして近似的に取扱った (3-2. 参照)。最大振れの角度が 30° の振り子運動では、 $R_e < 10^2$ となる実体振り子の状態は、直方体おもりの速度の 0 近傍領域でしか出現しない [図 15(b) での点線以下の領域を参照]。振れの角度が 29.7° 以上で $R_e < 10^2$ となっているので、振動中のほとんどの状態が $R_e > 10^2$ であることが理解できる。シミュレーションした速度の 1 乗則でもとまる直方体おもりの空気抵抗力モーメントは、図 15(c) の x 軸と接する近傍であり、図 11 の①と⑤の振動方向が逆転する前後の状態に対応する。今回の解析では、直方体のおもり部分だけでなく 4.0ϕ mm のアルミニウム円柱棒に作用する空気抵抗力モーメントももとめた。アルミニウム円柱棒は長いので、アルミニウム円柱棒を 10 等分した各空気抵抗力モーメントを足し合わせてアルミニウム円柱棒の空気抵抗力モーメントとした。図 15(c) に結果を示す。空気抵抗力は図 11 の①から⑧の全ての状態で、運動における制動力モーメントとして実体振り子に作用するのでマイナスの値で示している。但し、瞬間的に静止する①と⑤は 0 である。両者を足し合わせたこれらのモーメントが制動力モーメントとして作用する。

方程式 (13) と (14) に基づいて、ベアリングが回転軸を押す力 $\vec{N} = (f_x, f_y)$ の f_x と f_y の値をシミュレーションで抽出して振動中のこれらの変化を示したのが図 15(d-1) である。 \vec{N} は回転軸の 1 点 A [図 10(a)] に作用するとし、この A は振動とともに移動すると仮定する。回転軸を押す力 f_y は常にプラスの値であり、鉛直下方向の位置 (図 11 の③と⑦) に実体振り子がある状態で f_y は最大値を示し、また振動の両端 (図 11 の①と⑤) で最小の値となる。一方、 f_x は図中の y 軸のプラスとマイナスの値にまたがって変化している曲線で示される。振動開始時に f_x は図 11 の①に示すように x 軸マイナス方向に作用するが、実体振り子が鉛直下方に位置する③では $f_x = 0$ となり、実体振り子が④の状態に移行すると f_x は x 軸プラス方向に作用する。

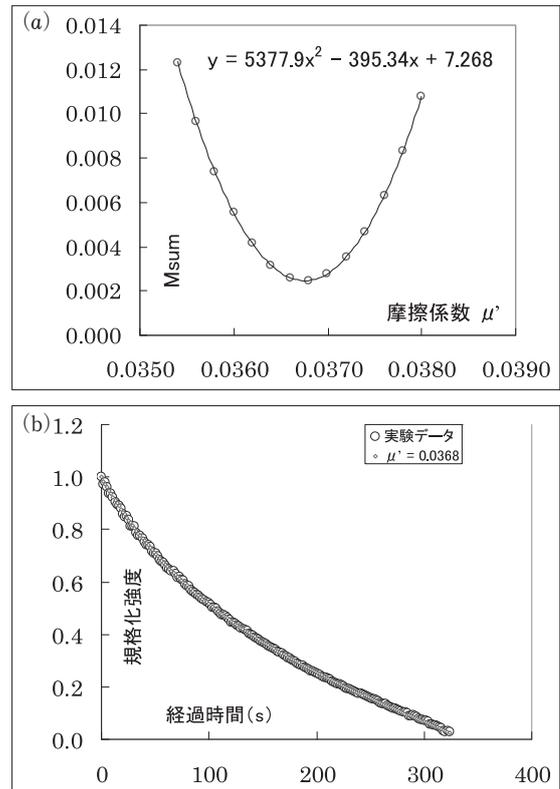


図14 (a) 回転軸摩擦係数 μ' を、実験データとシミュレーション値を用いた最小自乗法の解析でもとめた
(b) 実験データを処理して抽出した極大値の値と $\mu' = 0.0368$ でシミュレーションして得た値を重ねて表示した

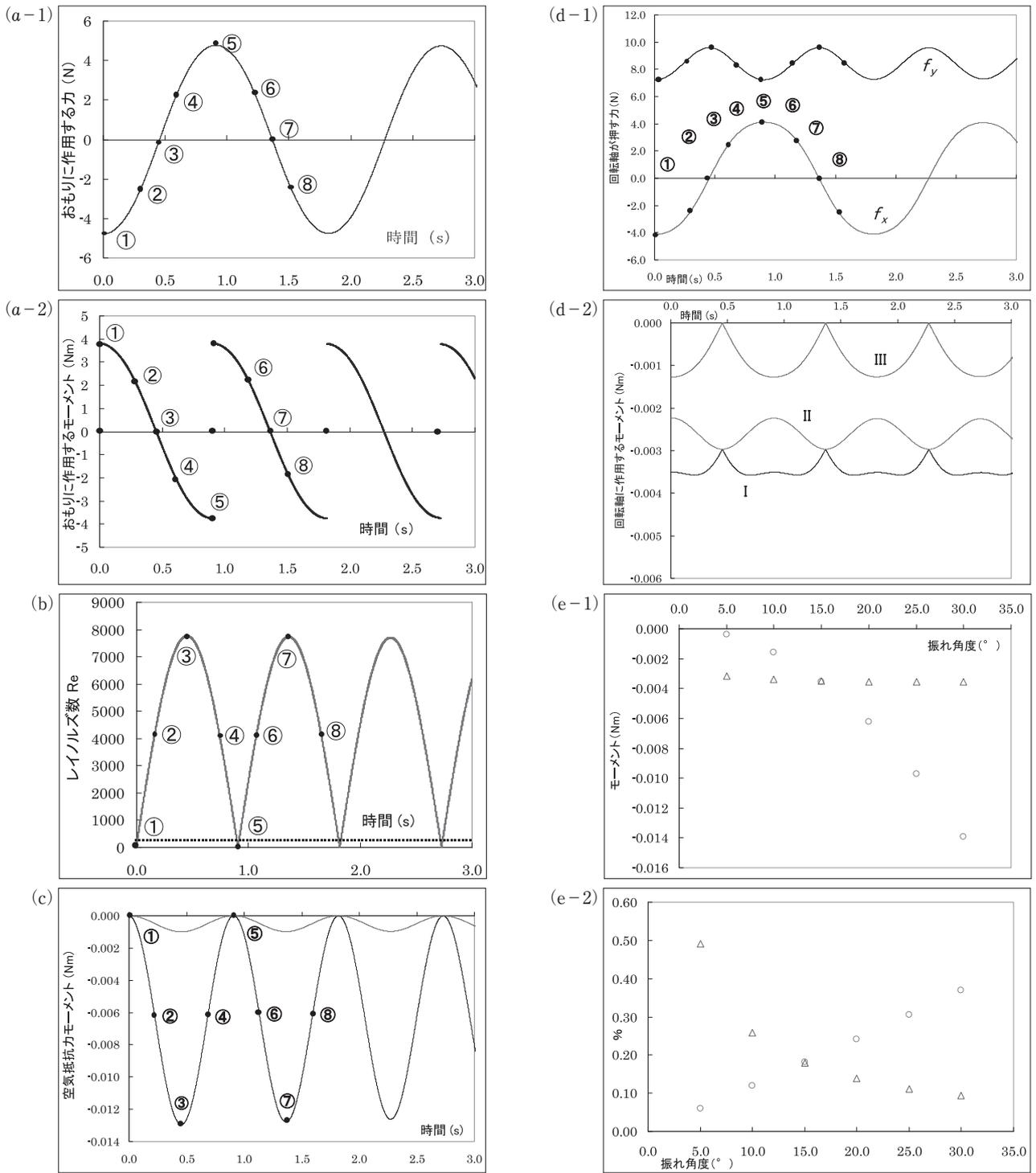


図15 (a-1) 重力による実体振り子に作用する力 $m'gsin\theta$ の変化 (図中の番号は図 11 に対応する。以下、同様)
 (a-2) 重力による実体振り子に作用する推進力モーメントと制動力モーメント
 (b) 直方体おもりの重心でのレイノルズ数の振動中の変化
 (c) 直方体おもりに作用する空気抵抗抗力モーメント (図中の 0.000 ~ 約-0.013Nm の変動) とアルミニウム円柱棒アーム部に作用する空気抵抗抗力モーメント (図中の 0.000 ~ 約-0.001Nm の変動) の変化
 (d-1) 回転軸の A 点に作用する抗力の x 成分と y 成分の変化 (符号は本文参照)。但し、2ヶのベアリングに作用する和で計算した。
 (d-2) 回転軸に作用する回転軸摩擦力による制動モーメントの変化。r は回転軸の半径である。但し、2ヶのベアリングに作用する和で計算した。I: 回転軸摩擦力の全モーメント, II: $G_x r$, III: $G_y r$
 (e-1) 全空気抵抗抗力モーメントと回転軸摩擦力モーメントの最大値の変化。○: 全空気抵抗抗力モーメント, △: 回転軸摩擦力モーメント
 (e-2) 全空気抵抗抗力モーメントと回転軸摩擦力モーメントの最大値の $m'ghsin\theta$ の大きさに対する割合の変化。○: 全空気抵抗抗力モーメント, △: 回転軸摩擦力モーメント

①と②は図11の $x-y$ 座標の第4象限内に実体振り子が位置するときであり、④と⑤は同図の $x-y$ 座標の第3象限内に実体振り子がある状態に対応する。振れの最大角度に達する⑤の状態では f_x は最大値に達する。①と⑤の状態では f_x は最大値を示し、方向のみが異なる。ここで、図に示すように、 f_x は①から⑤を経て⑦から再び①の状態に戻る繰返し運動となるが、 f_y は①から③を経て⑤の状態になるまでが繰返し運動の1周期となっている。 f_x の周期的変化は重力下での $m'g\sin\theta$ および空気抵抗力と同じ周期であるが、 f_y 変化の繰返し周期はこれらの1/2倍となっていることが確認できる。

回転軸を押す力 $\vec{N}=(f_x, f_y)$ は、A 点に回転軸摩擦力 $\vec{G}=(G_x, G_y)$ を生じさせる。但し、 $G_x=f_y\mu'$ 、 $G_y=f_x\mu'$ である。この回転軸摩擦力を成分に分けて回転軸に作用する様子を概念的に示したものが図10(b-1)と(b-2)である。図10(b-1)は図11の②の状態のとき、図10(b-2)は図11の④の状態のときに対応する。A 点での矢印方向に作用する回転軸摩擦力 $|\vec{N}|\mu'$ を成分で表示した場合、 $G_x=|\vec{N}|\mu'\cos\theta$ と $G_y=|\vec{N}|\mu'\sin\theta$ と表記できるが、例えば、これらの作用点は図10(b-1)と(b-2)の点線丸印内に示すように、実体振り子の状態が第4象限では回転軸断面の右半分、第3象限の場合では、回転軸断面の左半分に実体振り子の荷重が掛かるとして、 C_1 点と B 点に回転軸摩擦力の y 成分と x 成分がそれぞれ作用し、また、第3象限の場合では、回転軸断面の左半分に実体振り子の荷重が掛かるとして、 C_2 点と B 点に y 成分と x 成分の回転軸摩擦力が作用すると解釈してみる。ここで、 C_1 、 C_2 と B はそれぞれ x 軸と y 軸上の固定点とする。実体振り子が鉛直下方向(③と⑦の状態)に達した瞬間には x 成分のみの回転軸摩擦力が発生する。但し、実体振り子の振動方向が②や④とは逆方向となる⑧と⑥では、実体振り子と同じ象限内であっても②と④の回転軸摩擦力の各成分の方向とは逆になる。運動方程式(5)の右辺第3項に適用するモーメント(回転軸摩擦力×振動中心からの距離)に換算して示した振動中の変化が図15(d-2)である。図11の①と⑤の前後の状態を図15(d-1)に示す f_x の符号は逆転するが、回転軸摩擦力によるモーメントは実体振り子の振動を常に制動する効果として作用するので負の値として表示している。回転軸摩擦力モーメントの総和を図15(d-2)の I に示している。

アルミニウム棒と直方体おもりの全空気抵抗力モーメント(○)、および回転軸摩擦力モーメント(△)を実体振り子の振れ角度で示した結果を図15(e-1)に示す。前者は振れ角度が小さくなるに伴ってその大きさを減少させているが、後者はほぼ一定値で変化しない。実体振り子の重力下での推進力モーメント $m'gh\sin\theta$ の大きさに対するそれぞれの最大値の割合(絶対値で比較)を図15(e-2)に示す。今回の実体振り子は空気抵抗力を受けやすくするために直方体形状としたが、振れ角度が約 15° で両制動力モーメントの大きさがほぼ等しくなり、この振れ角度を境に実体振

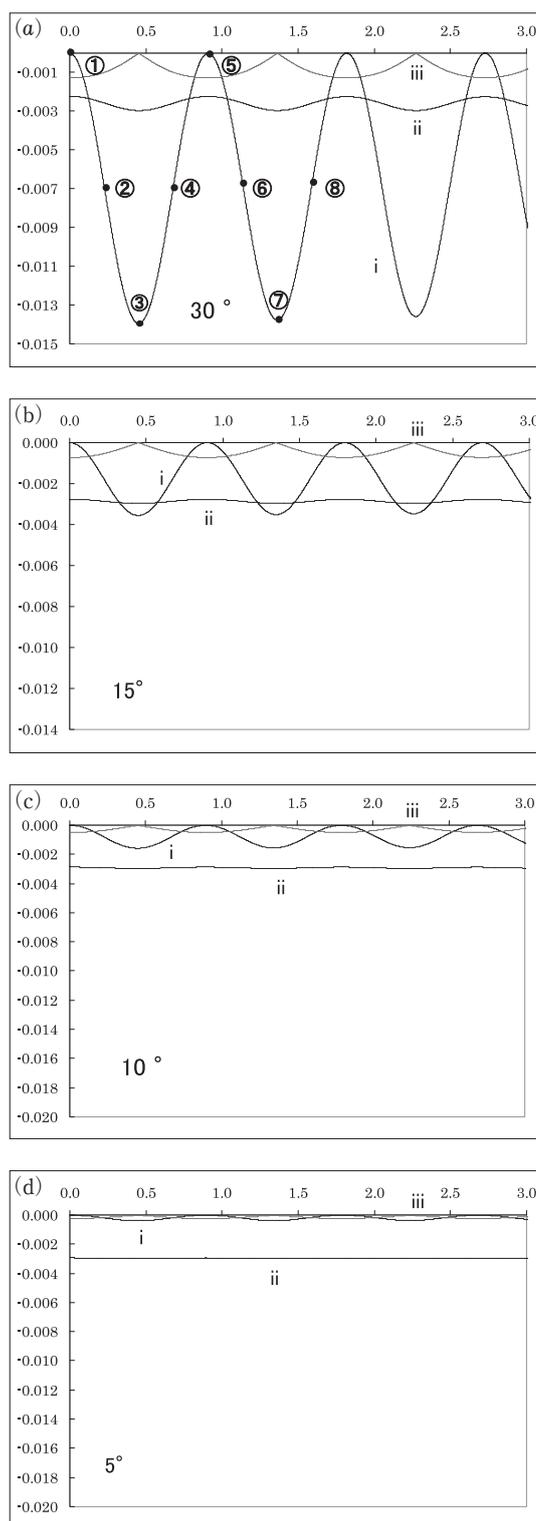


図16 全空気抵抗力モーメントと回転軸摩擦力モーメントの振動中の変化。横軸は時間(s)、縦軸はモーメント(Nm)。i: 全空気抵抗力モーメント、ii: $G_x r$ 、iii: $G_y r$ 、(r : 回転軸の半径) (a) 最大触れの角度 30° 、(b) 最大触れ角度 15° 、(c) 最大触れ角度 10° 、(d) 最大触れ角度 5°

り子における両制動力モーメントの抑制率の大小関係が変わっていることが分かる。図 16(a), (b), (c), (d)には実体振り子の最大振れ角度別に「全空気抵抗力モーメントおよび回転軸摩擦力モーメントの周期変化」を表示している。30°振れ角度では、全空気抵抗力モーメントが回転軸摩擦力モーメントよりも大きく(各最大値の比 = |全空気抵抗力モーメント/回転軸摩擦力モーメント| ≈ 3.90)作用していることが分かる。しかし、15°, 10°, 5°と振れの角度が減少していくと、この比は ≈ 1.01 , ≈ 0.46 , ≈ 0.12 と変化する。本実験では、直方体おもりへの空気抵抗力を増加させた条件での実験であるが、30°では全空気抵抗力モーメントが実体振り子の主な制動の原因となっている。最大振れの角度が15°近傍で全空気抵抗力モーメントと回転軸摩擦力モーメントがほぼ同程度となる [図 15(e-1)]。5°程度では、回転軸摩擦力モーメントが主な制動の原因となり、そのうちの約9割程度が今回の仮定でのB点に作用し、 G_x に起因する制動力が実体振り子振動の減衰を引き起こしていることが確認できる。

5. まとめ

振り子運動で実際に生じている現象を解析するため、PSDを用いた測定システムを製作し、周期運動において時々刻々と変化する振り子の推進力や制動力を実験データに基づいたシミュレーションで解析した。シミュレーションをおこなう上で、実体振り子の回転軸摩擦係数 μ' は未知数なので、実験データとシミュレーション値を用いた最小自乗法で μ' を決定した。

実体振り子の周期運動における重力作用による推進力と制動力、また、これまでに示されることがほとんど無かった実体振り子のアルミニウム円柱アーム部分や直方体おもり部分の空気抵抗力とそのモーメント、および回転軸摩擦力とモーメントを解析した。空気抵抗力の速度の1乗則、或いは2乗則の適用を C_d-R_e グラフより判断し、レイノルズ数の境界値を $R_e=10^2$ として近似的に取り扱った。最大振れ角度30°のデータでは、その殆どは速度の2乗則であることを確認できた。今回の近似的取扱いでは、最大振れの角度5°でもこの傾向は同じであった。本実験では直方体形状のおもりを実体振り子に取り付けて、空気抵抗力を増大させて実験をおこなったが、このような実験条件下では、最大振れの角度約15°で全空気抵抗力、および回転軸摩擦力の制動力の周期運動に対する効果は同程度となり、最大振れの角度が5°近傍では重力方向の抗力で生じる回転軸摩擦力が制動力の大部分を占めることを確認した。本実験システムで解析できたデータを基礎として、小・中・高等学校および大学教養レベルの振り子実験の考察に活用していきたいと考えている。

謝辞

本報告書での実験を快く手伝ってくれた鍛冶 陵介君と岡崎 駿弥君に心から感謝申し上げます。

6. 参考文献

- 例えば、「LED表示のある簡易測定器のデータをパソコンへ取り込む試み」
村山宏明, 宇藤茂憲: 物理教育 第50巻 第6号 (2002) p376
「パソコンを活用した実験データで学ぶ物理現象」
井上新悟, 宇藤茂憲, 他: 福岡教育大学紀要 第54巻 第3号 (2005) p7
- 浜松ホトニクスホームページ資料
http://jp.hamamatsu.com/resources/products/ssd/pdf/psd_kpsd0001j04.pdf
S8543については、次のホームページを参照
http://jp.hamamatsu.com/resources/products/ssd/pdf/s8543_kpsd1021j01.pdf
- C3683-01については、次のホームページを参照
http://jp.hamamatsu.com/resources/products/ssd/pdf/c3683-01_kpsd1004j03.pdf
- 例えば、第4版 実験化学講座3 コンピュータ利用基本操作Ⅲ, 丸善株式会社
- 例えば、「振動論」戸田盛和著, 培風館
「振動・波動」近 桂一郎著, 裳華房 など
- 例えば、「流体中の物体の抵抗」今井 功: 数学セミナー (日本評論者) 1996年11月号 p50
「流体力学」ランダウ・リフシッツ著 (竹内 均 訳), 東京図書
「大学講義 流体力学」伊藤 英覚, 本田 睦 共著, 丸善株式会社

「流体力学序論 基礎理論から応用まで」 内田 茂男 著, 森北出版株式会社

「粘性流体力学」名古屋大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻流体力学研究室 など

- 7) 例えば, 「物理学」小出 昭一郎 著, 裳華房 など
- 8) 「工業力学」入江 敏博, 山田 元 著, 理工学社
- 9) 例えば, Excel で学ぶ微分方程式, 鈴木 肇 著, Ohmsha (株)
- 10) 例えば, 「X線回折要論」の第11章, 11-6の項参照, カリテイ著 松村 源太郎 訳, アグネ株式会社

附記：本論文は紀要論文（福岡教育大学紀要，第62号，第3分冊，2013年，p1-13,）を査読により一部修正し，新たに掲載されるものである。