

## PSD（1次元位置検出器）で検証する実体振り子の周期運動Ⅱ

高田 遼太<sup>※1</sup>

森 啓樹<sup>※2</sup>

宇藤 茂憲

福岡教育大学教育学部

(Accepted for publication October, 1<sup>st</sup>, 2014)

Periodic Motion Ⅱ of a physical pendulum verified experimentally using PSD (position sensitive detector)

Ryohta TAKADA

Hiroki MORI

Shigenori UTOH

Department of Physics, Fukuoka University of Education

キーワード：実体振り子，制動力モーメント，空気抵抗モーメント，回転軸摩擦モーメント，  
PSD，4次のルンゲ・クッタ法，最小自乗法，VBA

### 概要

振り子の実験は，小・中学校期から高等学校，更には大学に至る長い期間にわたって学び続ける物理学の基礎事項に位置付けられるものであり，振り子にはたらく力やエネルギー，或いは振り子の周期の詳細については多くの物理学の入門書および専門書に記載がある。しかし，周期運動における摩擦力や空気抵抗などの制動効果に関する実験的検証の報告はあまりみあたらない。そこで，前回の報告<sup>1)</sup>では，①広角度領域での振り子振動の振れ角度を正確にモニターする必要から位置検出器<sup>2)</sup>に Position sensitive detector（以下，PSD）を使用して，実体振り子を用いた実験システムを新たに構築し，②空気抵抗モーメントの制動効果を増大させる形状の実体振り子を用いて，最大振れ角度 30° 以下の領域で，実体振り子の振れ角度のデータを収集して，③4 次のルンゲ・クッタ法による数値解析と実験データを組み合わせた定量的解析で推進力モーメントと制動力モーメントを評価して議論をおこなった。本報告では，データ処理の方法に改善を加えたうえで，最大振れ角度を 60° とした広角度領域での実験をおこなって実体振り子の運動を更に詳細に検証した。実体振り子の制動力モーメントの 1 つである回転軸摩擦モーメントの広角領域（45° 以上）での特異な変化を提示し，また周期変化を実験データ，一般解，および近似解で比較検討して議論した。今回使用した円柱棒アームの先に円柱形状のおもりを取り付けた実体振り子では，重心位置の条件を満たすことで，単振り子周期測定の代用になることもあわせて報告する。

### 1. はじめに

振り子の周期  $T$  を実験でもとめる場合，数回程度の測定の平均で周期を得ることが多いので，振動を抑制する空気抵抗や摩擦力は無視できるとしてこれらの効果が考慮されることはほとんどない。しかし，どのような振り子実験でも有限回数の振動の繰り返しの末に運動は終息するので，振れ角度が広角度から小角度領域に至るまでの振動の抑制効果の特性を明らかにすることは力学的に興味深いものがある。本報告では，最大振れ角度が 60° から 10° までの測定結果に基づいて検証をおこなった。

重力効果のみを考慮した実体振り子の回転の運動方程式は，

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -m'gh\sin\theta \quad \cdots (1)$$

※1 現在，福岡市立西福岡中学校

※2 現在，北九州市立日明小学校

と示すことができ、周期の一般解は

$$T_1(k) = 4K(k) \sqrt{I/m'gh} \quad \cdots (2)$$

と示せるのは力学の一般書に解説する通りである。<sup>3)</sup> 但し、 $g$ : 重力加速度、 $\theta$ : 振れ角度、 $I$ : 実体振り子の慣性モーメント、 $h$ : 振り子の回転中心から重心までの距離、 $m'$ : 実体振り子の全質量、 $K(k)$ : 第1種の楕円関数で  $k = \sin(\theta_{\max}/2)$ 、 $\theta_{\max}$ : 最大振れ角度。微小角度 ( $\theta \approx 0$ ) 領域では  $\sin\theta \approx \theta$  より周期の近似解は、

$$T_0 = 2\pi \sqrt{I/m'gh} \quad \cdots (3)$$

である。一方、実体振り子に作用する空気抵抗力や回転軸摩擦力の制動力モーメントを考慮した運動方程式は、

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -m'gh\sin\theta - \sum_i F_i(L_i, v_i) L_i - Y \quad \cdots (4)$$

となる。右辺第1項は重力作用下での実体振り子の推進力 (或いは制動力) モーメントで、右辺第2項に空気抵抗力の制動力モーメントを、また第3項に回転軸摩擦力の制動力モーメントを追加している。ここで、 $L_i$ : 実体振り子の回転中心からの距離、 $v_i$ :  $L_i$  の位置の速度、 $F_i(L_i, v_i)$ : 空気抵抗力、 $Y$ : 回転軸摩擦力モーメントとする。前回の報告では、(4) 式に基づいて最大振れ角度  $\theta$  が比較的狭い領域 ( $30^\circ \geq \theta$ ) での実験およびデータ解析をおこなって、実体振り子の推進力モーメントと制動力モーメント (空気抵抗力モーメント、回転軸摩擦モーメントおよび重力作用のモーメント) の検証をおこなって実体振り子の運動の特徴を明らかにした。本報告では、実体振り子の運動の詳細を更に検証するため、データ処理に改良を加えたうえで最大振れ角を  $60^\circ$  までに拡大した広角度から小角度に至る領域で実験をおこなった。実験データと数値計算を組み合わせた広角度域でのデータ解析を提示し、特に回転軸部の制動力の特異な運動を示した後、実体振り子の周期を詳細に検討した。

## 2. 実験システム

実験システムは、(i) PSD による変位検出部、(ii) A/D コンバーターによるパソコンへのデータ転送部、(iii) データ処理・数値計算プログラム部から構成されている。システム全体を写真1に示す。

(i) 実体振り子は  $0.4\phi$  cm で長さ 84.0 cm (質量 28.5 g) のアルミニウム円柱棒でアームを形成し、アームの一端に  $5.5\phi$  cm  $\times$  8.0 cm で中が空洞のステンレス製円柱形状おもりを固定した。この円柱形状おもりの中に球 (或いは円柱) 形状鉛および油粘土を詰めて質量を調整した。1.0  $\phi$  cm の真鍮製円柱棒と2個のベアリング (イトー製 BE08: 外径 2.6 cm, 内径 1.0 cm, 厚み 0.8 cm) で回転軸を構成 [写真2(a)] し、回転軸断面円の中心と実体振り子の回転中心を一致させて取り付け [写真2(b)]。振れ角度のモニターには1次元の位置を検出できる PSD センサー [浜松ホトニクス製 1次元位置検出センサー S8543 (有効長 2.4 cm)]<sup>4)</sup> を用いた。PSD センサーの中央部から  $x$  の位置にレーザーポインター ( $\lambda = 620$  nm, 出力約 1 mW) のスポット光が当たると [写真2(c)], PSD センサー両端に光電流  $I_1$  と  $I_2$  が発生し、照射された位置  $x = (I_2 - I_1) l_0 / [2(I_1 + I_2)]$  を検出できる。PSD センサーからのフォト電流の電圧変換に PSD 信号処理回路 [浜松ホトニクス製 C3683-01]<sup>5)</sup> を使用した。PSD 信号処理回路から分岐した信号をディジタルオシロスコープ (P&A Technologies 製 PA-S2000: 2チャンネルサンプリングレート 100 MS/sec) に接続し、振動をモニターしながら PSD センサーの回転軸への設置を調整した後、実験をおこなった。

(ii) パソコンへのデータ転送には 12 ビット USB-AD コンバーター [LabJack 製 U3HV-LJ:  $-10$  V  $\sim$   $+10$  Vdc (分解能 4.88 mV) 4チャンネルと 0.4 V  $\sim$  2.4 Vdc (分解能 600  $\mu$ V) 4チャンネル併用型] を使用した。汎用表計算ソフト (Microsoft Excel) 付属の Visual Basic for Application (以下、VBA) でデータ収集プログラムを製作した。収集するデータ数とデータ収集時間間隔

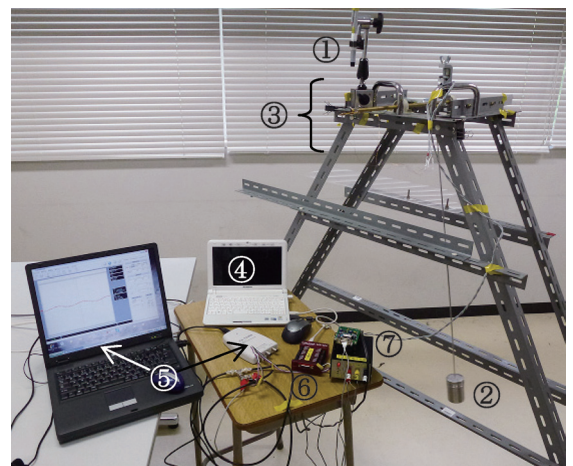


写真1 実体振り子の実験システム

①レーザーポインター、②実体振り子の円柱形状おもり、③実体振り子回転軸部とPSD検出部 [写真2(a)(b)(c)参照]、④データ収集用パソコン、⑤パソコンオシロスコープ、⑥USB-A/Dコンバーター、⑦ $\pm 15$ V電源 (黒色ボックス) と  $I$ - $V$ 変換機 (上部回路)

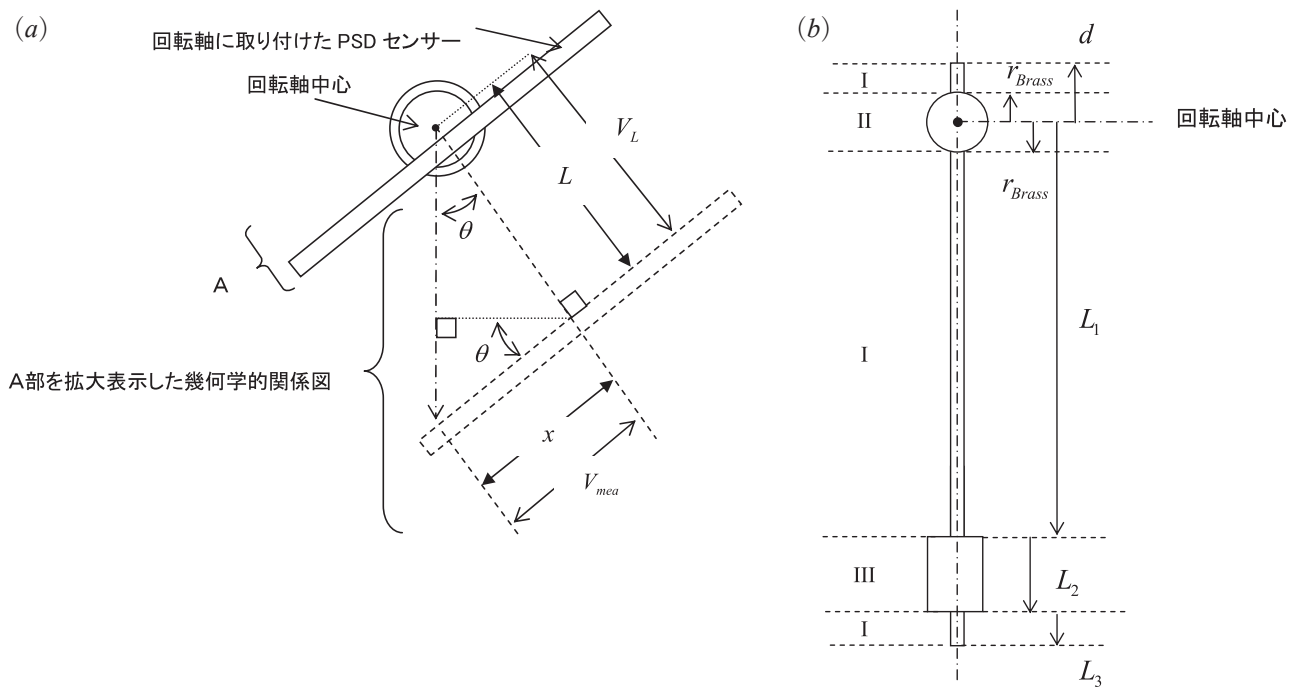
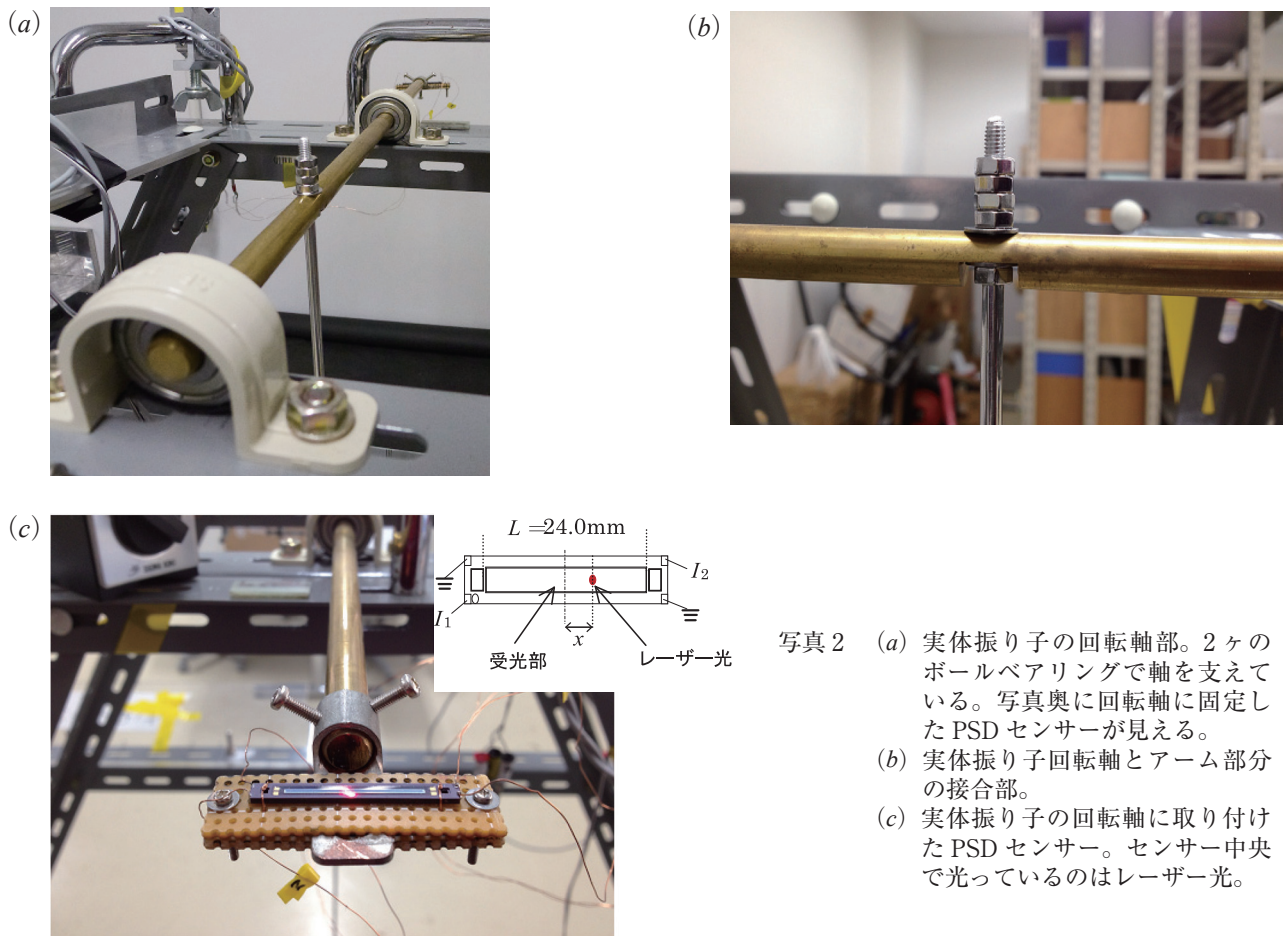


図1 (a) 実体振り子の振れ角度 $\theta$ とPSDセンサーの幾何学的位置の拡大図。(b) 実体振り子の全体図。図中のⅠ, Ⅱ, Ⅲは3-1. 慣性力モーメントについての項参照。



( $\Delta t = 25$  ms) を指定して, “測定開始”, “測定中断” と “データクリア” のコマンドで制御した。計測に要した時間 (時間分解能は 1 ms) と測定データ数とで測定点の時間を確定した。

(iii) データ処理プログラムおよび数値計算プログラムも汎用表計算ソフトの VBA を用いて製作した。実験で得た生データは (ア) から (カ) の手順で処理した。

(ア) 振幅の基準値設定: オシロスコープでモニターする振り子の振動中心をオシロスコープの時間軸と完全にゼロクロスさせる振動中心の補正。

(イ) 角度補正: PSD の変位信号の振れ角度に対する補正。ここで, 回転軸の回転中心から PSD センサー中央位置までの距離の電圧換算値を  $V_L$  として,  $\theta = \tan^{-1}(V_{mea}/V_L)$  とした [図 1(a)]。但し,  $V_{mea}$ : PSD 測定値。

(ウ) データ平滑化: 2 次 3 次多項式適合の重みつき (5 点) 移動平均法<sup>6)</sup> によるデータの平滑化処理。

(エ) データの初期設定: 異なるデータでは振り子運動の開始状態が異なるため, 開始点をあわせる補正。

(オ) 振幅の極大値・極小値の抽出: 振幅の大きさと周期をもとめるため, (ア) から (エ) の処理をおこなった実験データから振幅の極大値と極小値を抽出。

(カ) 規格化: 初期 ( $t=0$  s) の最大振れ角度が異なるデータを比較するためのデータ規格化。

今回の報告では (イ) を追加して改善した。また, 数値計算プログラムでは, 実体振り子の基本的な値を代入して 4 次のルンゲ・クッタ法 (3-4. 数値計算についての項参照) で (4) 式の数値計算を実行し, 計算途中で各物理量の値を抽出してグラフに表示した。このルンゲ・クッタ法の計算結果を用いて, (オ) で処理した極大値間の時間を平均して (4) 式に基づく周期をもとめた。

### 3. データ解析

#### 3-1. 慣性力モーメントについて

図 1(b) に示す実体振り子の慣性モーメント  $I$  は定義式より求めた。

$$I = \int_{-d}^{-r_{Brass}} L^2 \rho'_1 dL + \int_{-r_{Brass}}^{r_{Brass}} L^2 \rho'_2 dL + \int_{r_{Brass}}^{L_1} L^2 \rho'_1 dL + \int_{L_1}^{L_1+L_2} L^2 \rho'_3 dL + \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} L^2 \rho'_1 dL \cdots (5)$$

但し,  $\rho'_1 = \pi \cdot r_{AL}^2 \cdot \rho_{AL}$ ,  $\rho'_2 = (\pi \cdot r_{AL}^2 \cdot \rho_{AL} \times 2r_{Brass} + \pi \cdot r_{Brass}^2 \cdot \rho_{Brass} \cdot l_{Brass}) / 2r_{Brass}$ ,  $\rho'_3 = (\pi \cdot r_{AL}^2 \cdot \rho_{AL} \times L_2 + m) / L_2$ ,  $\rho_{AL}$ : アルミニウムの密度,  $r_{AL}$ : アルミニウム円柱棒の直径,  $\rho_{Brass}$ : 真鍮の密度,  $r_{Brass}$ : 回転軸真鍮棒の直径,  $l_{Brass}$ : 回転軸真鍮棒の長さ,  $m$ : おもりの質量, であり,  $\rho'_1$ ,  $\rho'_2$ ,  $\rho'_3$  は実体振り子の各形状 [図 1(b) の I, II, III] での線密度をそれぞれ示す。  $d$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  は図 1(b) に示す長さである。

#### 3-2. 空気抵抗力モーメントについて

抵抗係数 ( $C_d$ ) とレイノルズ数 ( $Re$ ) の関係で流体中で受ける物体の抵抗力 ( $D$ ) をもとめることができ, この  $C_d - Re$  の関係図は物体の形状によってその特性が異なることは流体力学が示すところである。今回製作した実体振り子のアーム部およびおもり部は何れも円柱形状なので, 参考文献 7 の  $C_d - Re$  の関係図に基づいて空気抵抗をもとめた。ここで, レイノルズ数は  $Re \equiv Ul/\nu$  と定義できる無次元量で,  $U$  は平均流速,  $l$  は物体の特徴的な長さ,  $\nu = \mu/\rho$  は動粘性率 ( $\mu$ : 粘性率,  $\rho$ : 流体の密度) である。本報告では, 実体振り子の受ける空気抵抗を円柱形状おもり

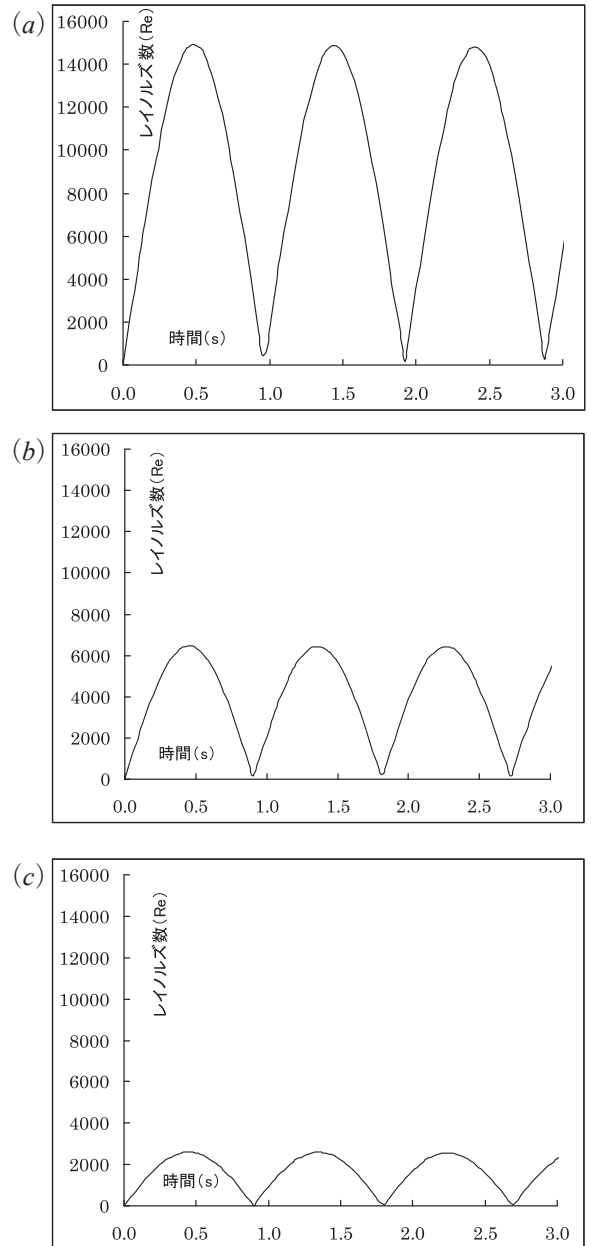


図2 レイノルズ数の周期変化を示す。横軸は時間(s)を, 縦軸はレイノルズ数を示す。最大振れ角度を  $\theta_{max}$  とすると, (a)  $\theta_{max} = 60^\circ$ , (b)  $\theta_{max} = 25^\circ$ , (c)  $\theta_{max} = 10^\circ$

部分と円柱棒アーム部分とに分けて各部の速度からレイノルズ数を計算した。円柱形状おもりでは中心の速度でレイノルズ数を評価し、空気抵抗力 ( $f_0$ ) と回転軸からおもり重心までの距離を掛けた  $f_0 \cdot h$  をおもり部の空気抵抗力モーメントとした。また、円柱アーム部分は 0.76 m と長いので、10 分割した各中心の速度をもとめて、10ヶ所のレイノルズ数の評価からそれぞれの箇所が受ける空気抵抗力  $f_i$  ( $f_i$ :  $i$  番目の受ける空気抵抗力,  $i=1,2,3,\dots,10$ ) を計算し、各距離  $r_i$  を乗じたモーメント  $\sum_{i=1}^{10} f_i \cdot r_i$  で実体振り子アームの空気抵抗力モーメントとした。実体振り子に作用する空気抵抗力を厳密に計算するのであれば、 $C_d-R_e$  の関係図に基づいた場合分けを多用して計算する必要があるが、本報告では近似的に  $R_e=10^2$  を境として、速度 ( $V$ ) の 1 乗則 ( $V^1$ ) と 2 乗則 ( $V^2$ ) に振り分けた。<sup>8)</sup> 最大振れ角度  $60^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $10^\circ$  で振動する場合、振動中のレイノルズ数の変化を図 2 に示す。本報告の近似では、いずれの振れ角度の場合でも、実体振り子が瞬間的に静止する最大振れ角度の前後での角度領域でのみ 1 乗則の適用となることを確認できた。例えば、最大振れの角度  $\theta=30^\circ$  では、 $\theta=29.6^\circ \sim -29.6^\circ$  の振れ角度で  $R_e > 10^2$  を満たしている。

### 3-3. 回転軸摩擦力モーメントについて

実体振り子の重心の運動方程式

$$\left. \begin{aligned} m'(d^2x/dr^2) &= f_x \\ m'(d^2y/dr^2) &= f_y - m'g \end{aligned} \right\} \cdots (6)$$

から回転軸部に発生する摩擦力をもとめることができる。<sup>9)</sup> 実体振り子の荷重が回転軸部のベアリングに作用し、ベアリングがその反作用として回転軸を押す抗力  $\vec{N} = (f_x, f_y)$  と回転軸摩擦係数  $\mu'$  および回転軸からの距離  $|\vec{r}_0|$  (回転軸半径) より運動方程式 (4) の右辺第 3 項の制動力モーメントがもたらされる。実体振り子に作用する力を図 3 に示す。ここで、抗力の作用点は回転軸部の 1 点に作用し、振動とともに移動すると仮定した。

回転軸摩擦係数  $\mu'$  は不明なので、実験データと数値計算 (3-4. 数値計算についての項参照) の値を用いた最小自乗法の解析で  $\mu'$  を決定した。今回製作した実体振り子の最大振れ角度を  $30^\circ$  として振動させた場合、振動開始から約 350 秒後に実体振り子は静止した。最大振れ角度が  $30^\circ$  から  $10^\circ$  近傍に変化するまでに実体振り子は約 154 回振動したが、この実験と同じ条件を適用した 4 次のルンゲクッタ法による数値計算した結果と比較すると、振動開始から 154 回目の振動終了までの両者の時間のズレは約 0.76 秒であった。実験データと数値計算間で生じる周期のずれ ( $0.76/154=0.005$  秒) を補正するため、数値計算で  $i$  番目の振幅の極大値  $M_{cal}(t_i)$  と実験で得た  $i$  番目のデータの極大値  $M_{exp}(t_i)$  を時間的に一致 ( $t_i=t_i'$ ) させて、同時刻に割り振り直して解析をおこなった。1/1000 刻みで  $\mu'$  を 0.031 から 0.038 まで変化させて計算を実行し、得た値を実験システムの項で概説した (iii) の (オ) と (カ) のデータ処理を実施して極大値のみを抽出した。最大振れ角度が  $30^\circ$  から  $10^\circ$  近傍までの振幅の極大値の全てに対して  $M_{cal}(t_i)$  と  $M_{exp}(t_i)$  の差を 2 乗し、この総和である

$$Sum(\Delta M^2) = \sum_{i=1}^n [M_{cal}(t_i) - M_{exp}(t_i)]^2 \cdots (7)$$

が最小となるときの  $\mu'$  を回転軸のベアリングの摩擦係数とした。<sup>10)</sup> 横軸に  $\mu'$  を、縦軸に  $Sum(\Delta M^2)$  を表示した計算結果が図 4 である。このグラフが 2 次関数で近似できるとして、2 次関数の最小自乗法でもとめた曲線  $y=6458.4x^2 - 446.7x + 7.734$  から、 $y'=12916.8x - 446.7=0$  で計算した

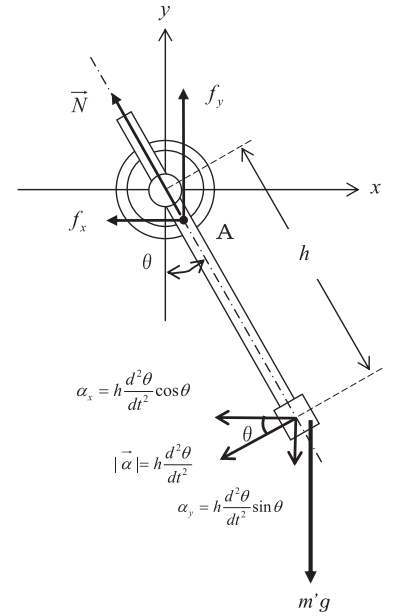


図 3 実体振り子の回転軸部に作用する抗力と実体振り子の重心の加速度を示す。但し、回転軸部に作用する抗力は 1 点 (図中の A) に作用すると仮定した。

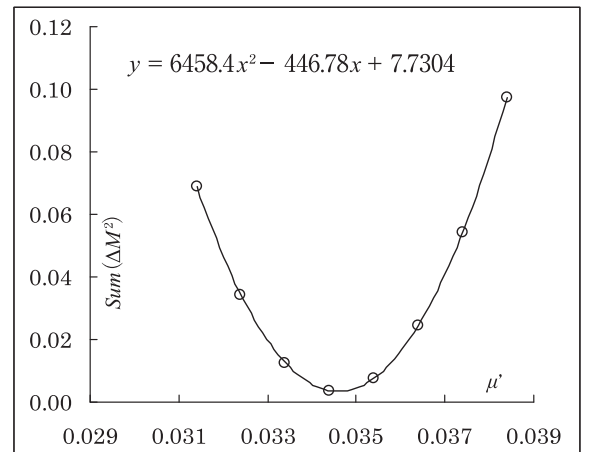


図 4 実験データと数値計算でもとめた値を最小自乗法で解析して、回転軸摩擦係数  $\mu'$  をもとめた。ここで、 $y=Sum(\Delta M^2)$ ,  $x=\mu'$  である。

$x=\mu'=0.0345$  のときに  $Sum(\Delta M^2)$  が最小値を示すので、この値を製作した実験システムで使用したベアリングの摩擦係数とみなした。

### 3-4. 数値計算について

角加速度  $A(t, \theta, \omega)$  および角速度  $B(t, \theta, \omega)$  を運動方程式(4)から次のように定義すると、

$$A(t, \theta, \omega) \equiv d^2\theta/dt^2 = \{-m'g \sin\theta \cdot h - ff_0 \cdot h - \sum_{i=1}^{10} ff_i \cdot L_i - (f_x \mu' \cdot r_0 + f_y \mu' \cdot r_0)\} / I \cdots (8)$$

$$B(t, \theta, \omega) \equiv d\theta/dt = \omega \cdots (9)$$

4 次のルンゲ・クッタ法より、<sup>11)</sup>

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= A(t, \theta, v) \\ u_1 &= B(t, \theta, v) \\ s_2 &= A(t + \Delta t/2, \theta + \Delta t \times u_1/2, v + \Delta t \times s_1/2) \\ u_2 &= B(t + \Delta t/2, \theta + \Delta t \times u_1/2, v + \Delta t \times s_1/2) \\ s_3 &= A(t + \Delta t/2, \theta + \Delta t \times u_2/2, v + \Delta t \times s_2/2) \\ u_3 &= B(t + \Delta t/2, \theta + \Delta t \times u_2/2, v + \Delta t \times s_2/2) \\ s_4 &= A(t + \Delta t, \theta + \Delta t \times u_3, v + \Delta t \times s_3) \\ u_4 &= B(t + \Delta t, \theta + \Delta t \times u_3, v + \Delta t \times s_3) \end{aligned} \right\} \cdots (10)$$

となるので、角加速度と角速度は、

$$d^2\theta/dt^2 = (s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4)/6 \cdots (11)$$

$$d\theta/dt = (u_1 + 2u_2 + 2u_3 + u_4)/6 \cdots (12)$$

でもとめることができる。ベアリングが回転軸を押す力は図3より、

$$\left. \begin{aligned} f_x &= m'h \cos\theta (s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4)/6 \\ f_y &= m'h \sin\theta (s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4)/6 + m'g \end{aligned} \right\} \cdots (13)$$

となり、実体振り子の回転軸摩擦による制動力モーメントがもとまる。また、(12)式より実体振り子のアーム各分割部や円柱おもり中心部での速度からレイノルズ数が決まるので、 $C_d-R_e$  の関係より実体振り子に作用する空気抵抗による制動力モーメントをもとめることができる。

時刻  $t$  での角加速度、角速度および角度が決まると、 $t=t+\Delta t$  として  $\Delta t$  [s] 後の次のステップへ進んで設定した時刻、或いは回数まで繰り返して計算を実行した。プログラムはVBAで製作し、重力作用下で振動する実体振り子の推進力や制動力などの力学的な各物理量の時間変化を検証した。

## 4. 議論

### 4-1. 制動力モーメントについて

実体振り子の周期運動の検証から、次のような実体振り子の力学的現象を確認できた。

解析を簡単にするため、図3に示すように回転軸断面において抗力  $\vec{N} = (f_x, f_y)$  は1点に作用し、振動とともに作用点は変化すると仮定した。ベアリングが回転軸を押す抗力の  $x$ - $y$  成分別の変化(約1.5周期)を図5に示す。抗力  $f_y$  は常に正の力であり、また実体振り子の振動両端の最大振れ角度で  $f_y$  が最小となり、 $\theta=0^\circ$  で  $f_y$  が最大となることから  $f_y$  が変化する周期は実体振り子の周期の1/2である。一方、実体振り子の振動に伴って  $f_x$  は正と負の値

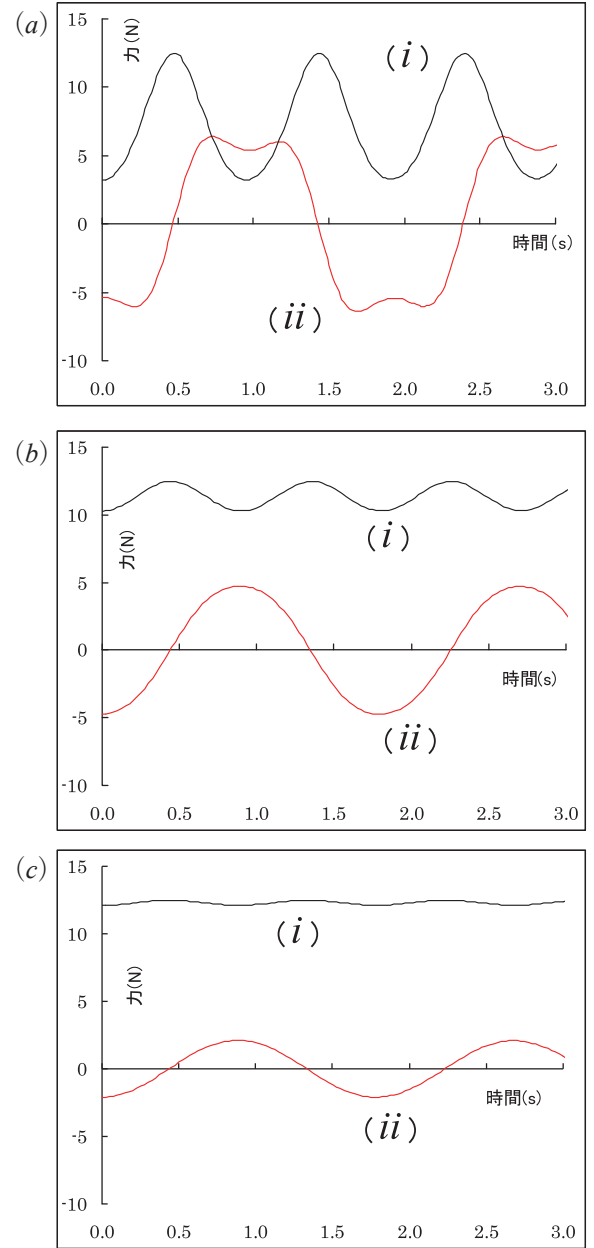


図5 回転軸に作用する抗力  $\vec{N} = (f_x, f_y)$  の変化を示す。横軸は時間(s)を、縦軸は力(N)を示す。(i)は  $f_y$ 、(ii)は  $f_x$  である。最大振れ角度を  $\theta_{\max}$  とすると、(a)  $\theta_{\max} = 60^\circ$ 、(b)  $\theta_{\max} = 25^\circ$ 、(c)  $\theta_{\max} = 10^\circ$



を交互にとり、その周期は実体振り子と同じである。最大振れ角度を  $\theta_{\max} > 45^\circ$  として振動させると、 $f_x$  の特徴的な振る舞いが出現する。最大振れ角度が  $25^\circ$  では  $f_x$  の極大値、或いは極小値のピークは単一であるが、例えば、 $60^\circ$  ではこれらが2つに分離している [図 5(a)]。ここで、図 3 に示すように回転軸への抗力の成分は  $\vec{N} = (f_x, f_y) = (-m'g \cos \theta \sin \theta, m'g \cos \theta \cos \theta)$  と表せるので、最大振れ角度が  $60^\circ$  と  $90^\circ$  における  $x$  成分と  $y$  成分の規格化した値の変化の計算結果を図 6 に示す。この図では横軸を振れ角度としているので、時間変化による振動のようすを矢印で示している。図 6(a) より図 5(a) の  $\theta_{\max} = 60^\circ$  のときの  $f_x$  と  $f_y$  の変化のようすが理解できる。最大振れ角度が  $90^\circ$  で実体振り子が振動した場合、 $f_x = 0$  となるのは  $\theta = 90^\circ, 0^\circ, -90^\circ$  のときであり、 $f_x$  の変化が複雑化する。

最大振れ角度  $\theta_{\max} = 60^\circ$ 、 $25^\circ$  および  $10^\circ$  の振動において、運動方程式 (4) の右辺第 2 項の実体振り子に作用する全空気抵抗力モーメントおよび第 3 項の回転軸摩擦力モーメントの大きさの周期変化を図 7 に示す。但し、空気抵抗力モーメントと回転軸摩擦力モーメントは制動力として実体振り子の運動に作用するので、何れも負の値で示している。また、各最大振れ角度の振動において、右辺第 1 項の重力作用による実体振り子の推進力、或いは制動力モーメントの大きさの周期変化を図 8 に示す。

最大振れ角度  $60^\circ$  での 1 周期の振動において、回転軸摩擦力で生じる制動力モーメントの値は空気抵抗力モーメントの値と比べて、大きく変動はせず [図 7(a)]、最大振れ角度が小さくなるとほぼ一定となる [図 7(c)]。一方、空気抵抗力モーメントはレイノルズ数  $Re \equiv Ul/\nu$ 、つまり振動中の速度と関係するので、空気抵抗力モーメント絶対値の大きさは 0 から最大に至るまで時々刻々と変化する。最大振れ角度が減少するに伴って、1 周期における空気抵抗力モーメント絶対値の最大値 (以下、 $|RM_{\max-air}|$ ) は図 7(a)  $\rightarrow$  (b)  $\rightarrow$  (c) のように小さくなっていく。各最大振れ角度の振動において、振り子の推進力モーメント最大値に対する  $|RM_{\max-rot}|$  と  $|RM_{\max-air}|$  の各割合 (%) は図 9(b) で示せる。ここで、1 周期における回転軸摩擦力モーメント絶対値の最大値を  $|RM_{\max-rot}|$ 、1 周期における重力の推進力モーメント最大値を  $|RM_{\max-g}|$  とする。例えば、最大振れ角度が  $60^\circ$  の場合、 $|RM_{\max-g}|$  に対する  $|RM_{\max-air}|$  の割合 (%) は 0.22%，また  $|RM_{\max-rot}|$  の割合 (%) は 0.05% である。最大振れ角度が  $10^\circ$  の場合、前者は 0.03%，また後者は 0.24% となる。 $|RM_{\max-g}|$  に対する  $|RM_{\max-air}|$  の割合  $p_\theta$  (%) は、最大振れ角度の減少にともなって顕著にその割合を低めていく。最大振れ角度が  $60^\circ$  から  $10^\circ$  に変化することで、 $p_{10}/p_{60} = 0.03/0.22 = 0.14$  である。一方、 $|RM_{\max-g}|$  に対する  $|RM_{\max-rot}|$  の割合  $q_\theta$  (%) は、最大振れ角度の減少にともなって逆にその割合を徐々に増している。最大振れ角度の  $60^\circ$  から  $10^\circ$  の変化で、 $q_{10}/q_{60} = 0.24/0.05 = 4.80$  となる。しかし、何れの最大振れ角度においても  $|RM_{\max-air}|$  と  $|RM_{\max-rot}|$  の和は、 $|RM_{\max-g}|$  に対して約 0.3% 以下であることがわかる [図 9(c)]。

#### 4-2. 周期について

実体振り子の微分方程式 (1) の周期一般解 (2) 式の  $T_1(k)$ 、周期近似 ( $\theta \approx 0$ ) 解 (3) 式の  $T_0$ 、および実験データから得た周期 [2. 実験システムの iii の (ウ)  $\rightarrow$  (エ)  $\rightarrow$  (オ) のデータ処理からとめた] の値  $T_{\exp}(\theta)$  を図 10 に示す。アームの長さが 0.76 m で、円柱形状おもりの質量が 1.244 kg である実体振り子の最大振れ角度を  $60^\circ$  から  $5^\circ$  までの  $5^\circ$  刻みで変化させてもとめた。 $T_{\exp}(\theta)$  と一般解  $T_1(k)$  は、約 2/100 秒以内の精度でよく一致し、また、最大振れ角度  $\theta_{\max}$  が  $20^\circ$  以内であれば、 $T_{\exp}(\theta)$  は約 4/100 秒以内の精度で近似解  $T_0$  ともよい一致を示している。

一方、重力作用に加えて空気抵抗力や回転軸摩擦力による制動力モーメントを考慮した運動方程式 (4) に

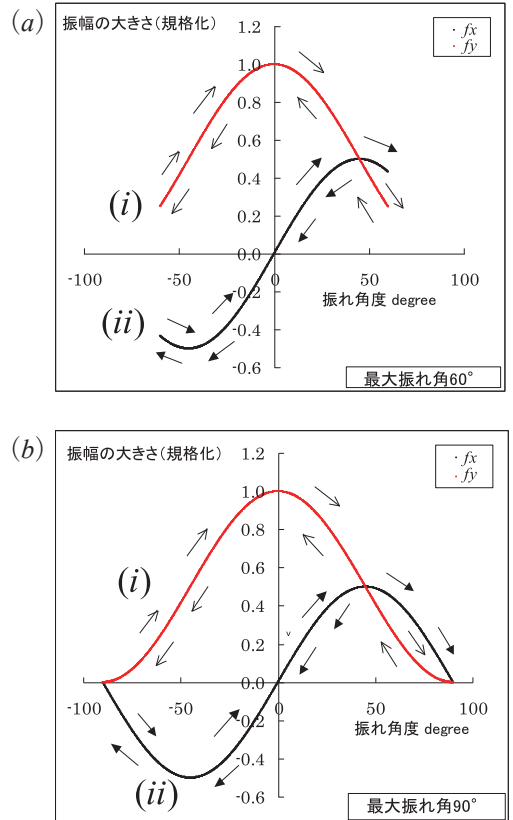


図 6 回転軸に作用する抗力  $\vec{N} = (f_x, f_y) = (-m'g \cos \theta \sin \theta, m'g \cos \theta \cos \theta)$  の  $x$  と  $y$  成分の規格化した値の変化を示す。矢印で時間の経過を示す。(i) は  $f_y$ 、(ii) は  $f_x$  である。但し、横軸は振動角度を示す。最大振れ角度を  $\theta_{\max}$  とすると、(a)  $\theta_{\max} = 60^\circ$ 、(b)  $\theta_{\max} = 90^\circ$

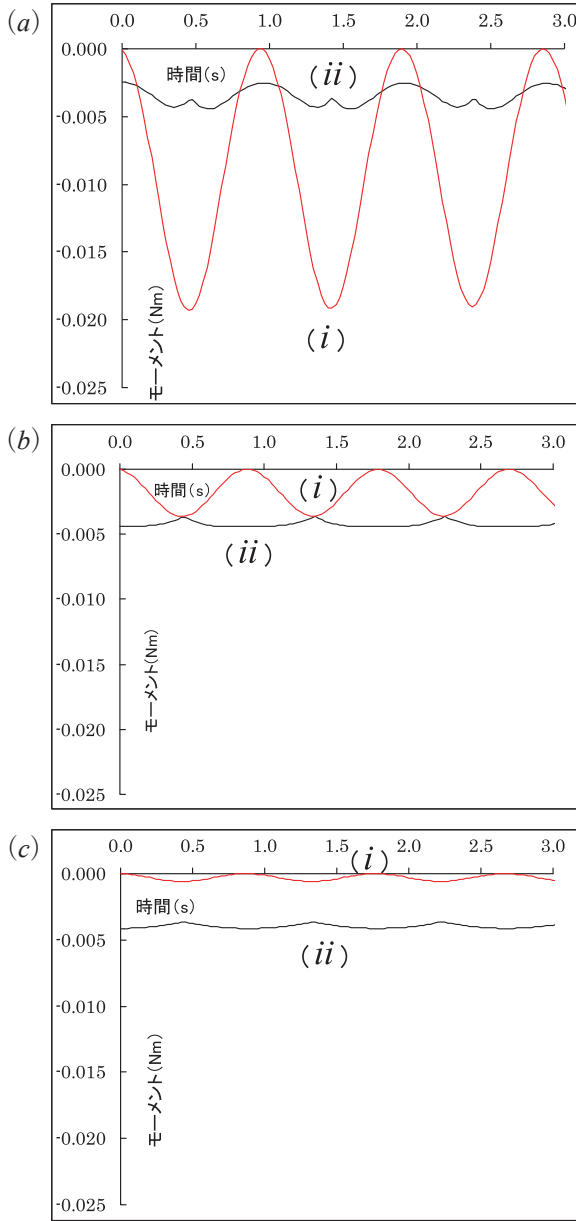


図7 実体振り子に作用する(i)全空気抵抗力モーメントと(ii)回転軸摩擦力モーメントの変化を示す。横軸は時間(s)を、縦軸はモーメント(Nm)を示す。最大振れ角度を $\theta_{\max}$ とすると、(a) $\theta_{\max}=60^\circ$ 、(b) $\theta_{\max}=25^\circ$ 、(c) $\theta_{\max}=10^\circ$

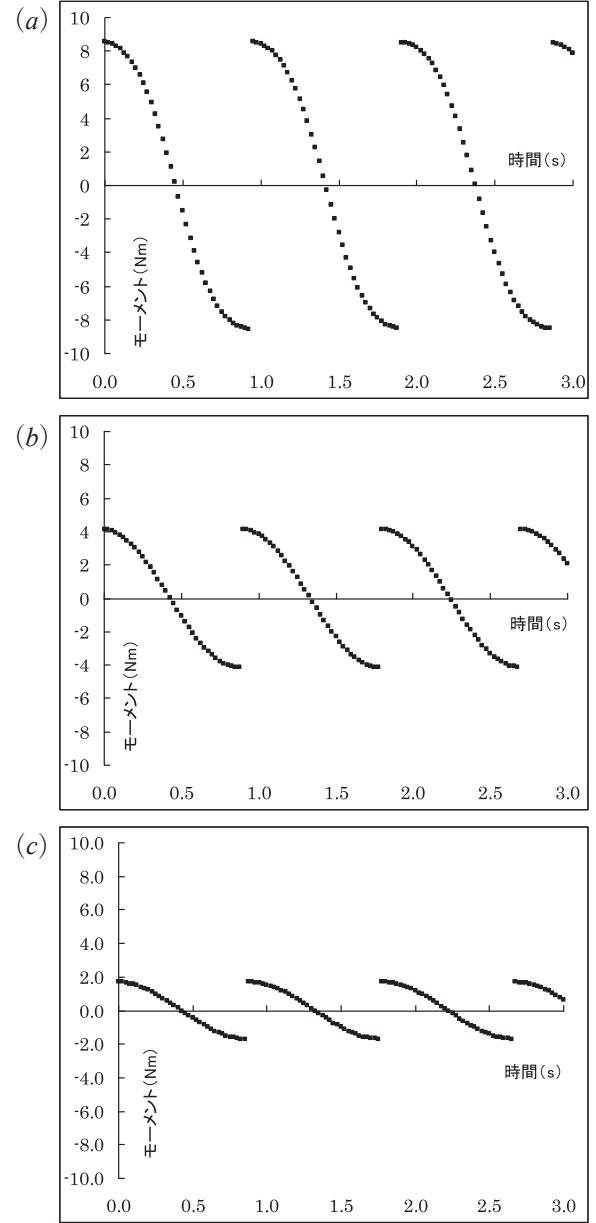


図8 実体振り子に作用する重力による推進力モーメント、および制動力モーメントの変化を示す。横軸は時間(s)を、縦軸はモーメント(Nm)を示す。最大振れ角度を $\theta_{\max}$ とすると、(a) $\theta_{\max}=60^\circ$ 、(b) $\theta_{\max}=25^\circ$ 、(c) $\theta_{\max}=10^\circ$

基づいて、4次のルンゲ・クッタ法の数値計算で振動振幅の時間変化から周期をもとめた結果を図11に示す。各最大振れ角度での周期の一般解 $T_1(k)$ および実験から得た周期 $T_{\text{exp}}(\theta)$ のいずれのデータも1/100秒の精度でよく一致している。実体振り子に作用する制動力モーメントの定量的検証において示したように、1周期の振動における $|RM_{\max-\text{air}}|$ の値と $|RM_{\max-\text{rot}}|$ の値は重力作用の $|RM_{\max-g}|$ の値と比べて極めて小さい。例えば、最大振れ角度が $30^\circ$ の場合、何れも約0.10%以下の大きさである[図9(b)]。数回の往復振動でもとめるような周期測定では、空気抵抗や回転軸摩擦の制動力モーメントの周期におよぼす影響は殆ど無視できると改めて確認できる。

実体振り子回転軸から円柱形状おもりの上面までのアームの長さを0.76 mとし、円柱形状おもり内の質量を0.05 kgから1.10 kgに変化させて、最大振れ角度 $60^\circ$ の数値計算から周期をもとめた結果を図12と図



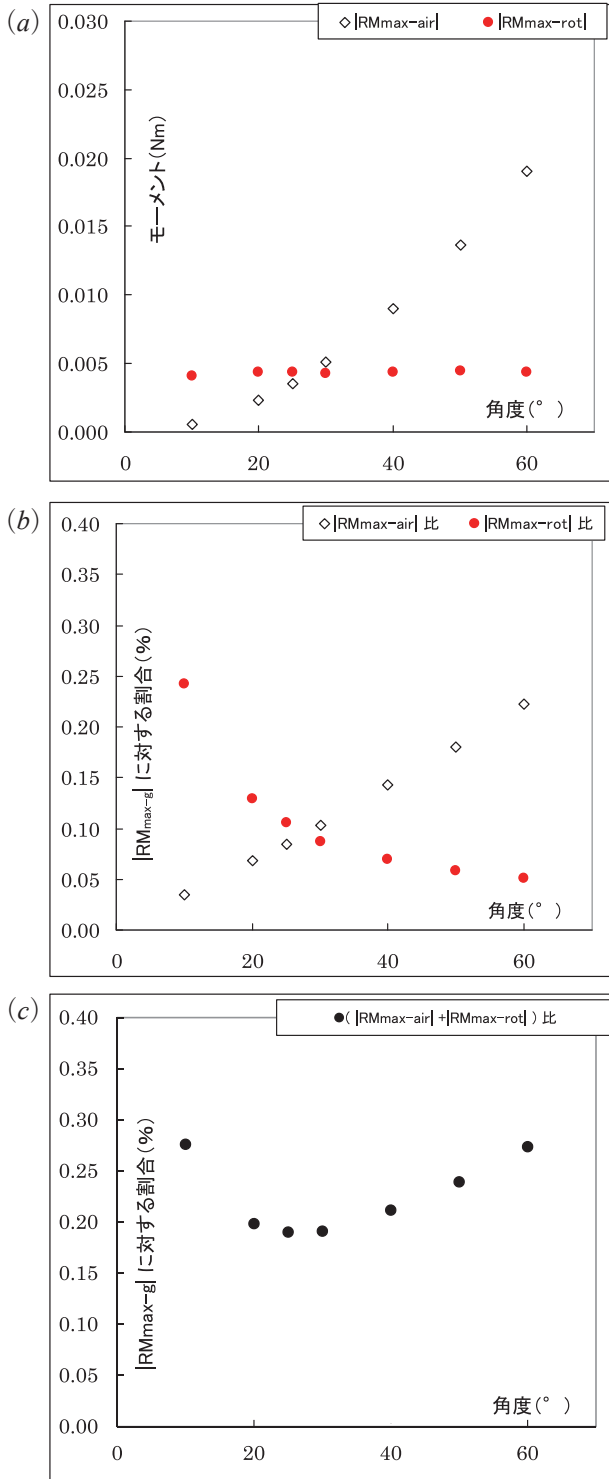


図9 (a)  $|RM_{\max-air}|$  と  $|RM_{\max-rot}|$  の値(Nm), (b)  $|RM_{\max-g}|$  に対する  $|RM_{\max-air}|$  と  $|RM_{\max-rot}|$  の各割合(%), (c)  $|RM_{\max-air}|$  と  $|RM_{\max-rot}|$  の和の  $|RM_{\max-g}|$  に対する割合(%)を示す。どれも横軸は最大振れ角度である。

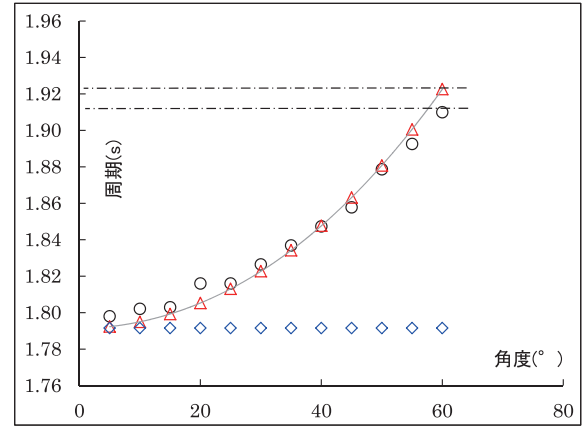


図10 本文中の(2)式, (3)式と実験でもとめた実体振り子の周期を示す。○: 実験値, △: 一般解(2)式の値, ◇: 近似解(3)式の値

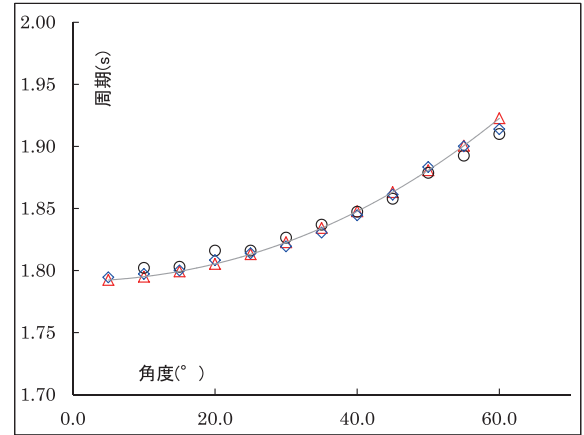


図11 本文中で示した(2)式, 4次のルンゲ・クッタ数値計算, および実験でもとめた周期を示す。○: 実験値, △: 一般解(2)式の値, ◇: 4次のルンゲ・クッタ法の値(空気抵抗力モーメントと回転軸摩擦力モーメントの効果を含む)

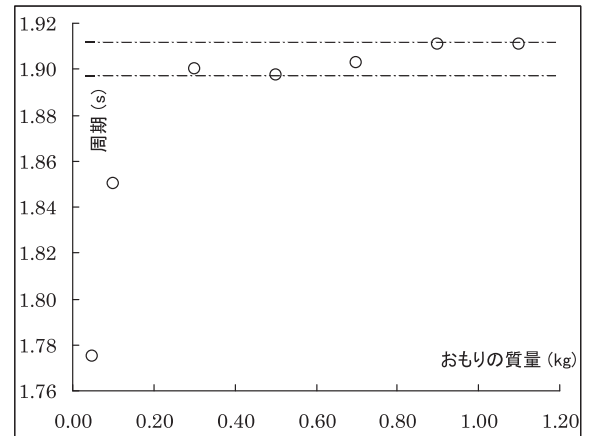


図12 実体振り子の円柱形状おもりの質量変化と周期の関係を示す。横軸はおもりの質量。

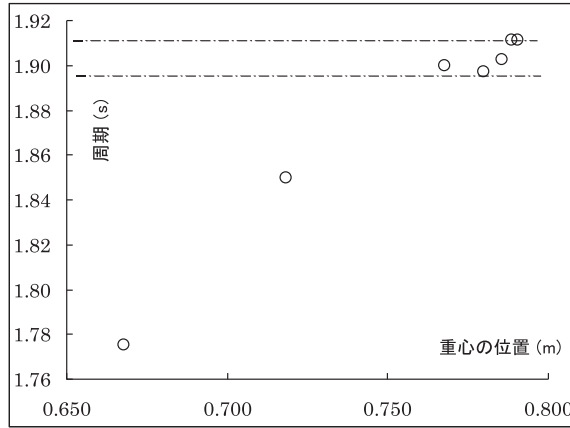


図 13 実体振り子の円柱形状おもりの質量変化と周期の関係を示す。横軸は実体振り子の重心の位置。

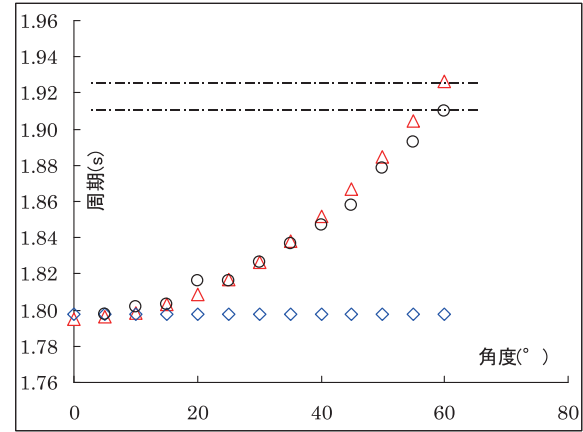


図 14 単振り子周期の一般解  $T'_1 = 4K(k)\sqrt{L_0/g}$ 、近似解  $T'_0 = 2\pi\sqrt{L_0/g}$ 、および実験でもとめた周期を示す。○：実験値、△：一般解の値、◇：近似解の値

13に示している。おもりの質量変化を横軸として表示したものが図12であり、実体振り子の重心位置の変化を横軸として示したものが図13である。図13の一点破線に示すように重心の位置が円柱形状おもり内にある場合、つまり重心の位置が実体振り子の回転中心から0.76 m以上である場合、約2/100秒の精度内でほぼ同じ周期の値を示すことが分かる。本報告の実験で用いた形状の実体振り子であれば、円柱形状おもり内の質量が約0.3 kg以上であるとき、この条件を満たす。

本実験で製作した実体振り子を用いて測定した周期の値  $T_{\text{exp}}(\theta)$  と、長さが0.76 mの単振り子の周期の一般解  $T'_1(k) = 4K(k)\sqrt{L_0/g}$  を比較すると (図14)、約2/100秒の精度内でよく一致する。但し、 $L_0$ ：単振り子の回転中心からおもりまでの距離。本実験で用いた形状の実体振り子を使用し、実体振り子の重心位置が円柱形状おもり内の位置に存在するようにおもりの質量を設定すれば、このような実体振り子を単振り子とみなした周期運動の実験が可能である。最大振れ角度約20°以内であれば、近似解  $T'_0 = 2\pi\sqrt{L_0/g}$  と約4/100秒以内の精度で一致する。

## 5. まとめ

2ヶのボールベアリングで固定した真鍮製回転軸に直径0.4φcm×84.0 cmの円柱アームを固定し、このアームの一端に直径5.5φcm×8.0 cmの円柱形状おもりを取り付けた実体振り子を用いて、PSDセンサーとUSB-A/Dコンバータで構成したパソコン制御実験システムを製作した。実験データと4次のルンゲ・クッタ法の数値計算を組み合わせた解析で実体振り子の広角度から低角度領域での実体振り子の周期振動を検証した結果、次のことを確認できた。尚、本報告では、回転軸摩擦力モーメントは回転軸の1点に作用すると仮定して解析をおこなった。

- 回転軸に作用する抗力のx成分とy成分は、実体振り子の振れ角度の約45°を境にして特徴的な変化を示すことを確認できた。最大振れの角度が45°以下の場合、 $f_x$ の変化の周期は実体振り子の周期と同じであるが、 $f_y$ の周期は実体振り子の1/2である。最大振れの角度が45°以上になると、 $f_x$ と $f_y$ の各周期に変化はないが、振れ角度の増加とともに $f_x$ は複雑な変化〔例、図6(a)(b)〕を示すようになる。
- 最大振れ角度が約45°以下の領域では、1周期の振動中における回転軸摩擦力モーメントはおよそ一定〔図7(b)(c)〕であり、空気抵抗抗力モーメントに比べて大きく変動はしない。しかし、最大振れ角度が約45°以上の領域では、例えば、図7(a)の $\theta_{\text{max}} = 60^\circ$ に示すようになり、更に $\theta_{\text{max}} = 90^\circ$ では、図6(b)よりその値は0から、 $|RM_{\text{max-rot}}|$ に至る変化を示す。
- 空気抵抗抗力モーメントはレイノルズ数  $R_e \equiv Ul/\nu$ 、つまり振動中の速度と関係するので、1周期の振動におけるその大きさは0から $|RM_{\text{max-air}}|$ まで時々刻々と変化する。最大振れ角度が減少するにつれて、 $|RM_{\text{max-air}}|$ の値は小さくなっていく。各最大振れ角度における1周期中の $|RM_{\text{max-g}}|$ に対する $|RM_{\text{max-air}}|$ の割合(%)は、例えば、最大振れ角度60°においても約0.25%と低い。

- iv. 最大振れ角度  $60^\circ$  以下の領域においては、1 周期の振動における  $|RM_{\max-rot}|$  と  $|RM_{\max-air}|$  の値をあわせて制動力モーメントの  $|RM_{\max-g}|$  の値に対する割合 (%) は約 0.3% 以下である。
- v. 本実験で得た周期は、4 次のルンゲ・クッタ法による数値計算でもとめた値、或いは第 1 種の楕円関数によって得られる (2) 式の一般解と比べて 2/100 秒以内の精度でほぼ一致した。
- vi. 本実験で用いた形状の実体振り子では、重心の位置が円柱形状のおもり範囲内にあれば、単振り子の周期の一般解  $T_1$  と 2/100 秒以内で一致する。振れ角度が約  $20^\circ$  以内であれば、単振り子の近似解  $T_0$  と比較しても 4/100 秒以内で一致した。

本実験システムは、本報告で示した形状の実体振り子先端の円弧状の動きを、振れ角度に制限を受けることなく PSD で検出できるもので、学生実験レベルでは微小振れ角度領域の実験しか取り扱えなかったこれまでの制限を解消するものである。学生実験の予算制約により、廉価な 12 ビット A/D コンバータを使用しているシステム作りであったので、精度上の制限を受けざるを得なかった。しかし、実体振り子の制動力 (重力作用、空気抵抗力、軸摩擦力) モーメントのデータを収集する本実験では支障を生じなかった。

「単振り子」の推進力や制動力および周期変化を考察する際に役立つ基礎データの提示を目指したため、実体振り子の設計は本報告書で示した形状となった。本報告で得た結果を、①  $4\phi$  mm のアルミニウム製棒は単振り子の張った状態の紐 ( $1\phi$  mm 程度) に置き換えて、②円柱型おもり部分は単振り子のおもりに置き換えて、③回転軸部分の摩擦力は天井に単振り子の紐を留めることによる振動抑止力と置き換えて、近似的に各制動力を評価すれば、おおまかではあるが単振り子の運動に適用できると考えている。周期においては、本報告書で示した条件を満たしていれば、本実験で用いた実体振り子の周期データと単振り子の一般解はほぼ一致する。

最後に、本報告書に記載した形状の実体振り子を測定する場合、振動開始時の設定に工夫や注意を要する。振動開始時の最大振れ角度を正確に測定するため、また回転軸に垂直な平面内で実体振り子を振動させるため、振動の初期設定を 2 本のレーザーポイントや傾斜角度計を用いて幾何学的に正確に測定する必要がある。<sup>1)</sup> また、実体振り子のアーム ( $4\phi$  mm) と回転軸 ( $10\phi$  mm) の接合部のデリケートな設計 [写真 2 (b)] のため、細心の注意を払って振動の初期設定をおこなう必要がある。

## 6. 参考文献

- 1) 永吉 将人, 宇藤 茂憲, 九州地区国立大学教育系・文系研究論文集 2013 年第 1 巻第 1 号 p1 ~ p13
- 2) 例えば, 増田 健二, 大学の物理教育, 3(1999)p44  
鈴木 清光, 大学の物理教育, 1(2000)p18  
満田 節生, 渡邊 伸, 鈴木 清光, 大学の物理教育, 1 (2000)p22  
松本 節子, 大学の物理教育, 1(2002) p31 など
- 3) 例えば, 振動論, 戸田盛和 著, 倍風館  
振動・波, 近桂一郎 著, 裳華房 など
- 4) S8543 については, 次のホームページを参照  
[http://jp.hamamatsu.com/resources/products/ssd/pdf/s8543\\_kpsd1021j01.pdf](http://jp.hamamatsu.com/resources/products/ssd/pdf/s8543_kpsd1021j01.pdf)
- 5) C3683-01 については, 次のホームページを参照  
[http://jp.hamamatsu.com/resources/products/ssd/pdf/c3683-01\\_kpsd1004j03.pdf](http://jp.hamamatsu.com/resources/products/ssd/pdf/c3683-01_kpsd1004j03.pdf)
- 6) 例えば, 第 4 版 実験化学講座 3 コンピュータ利用基本操作Ⅲ, 丸善
- 7) 例えば, 大学講義 流体力学, 伊藤 英覚, 本田 睦 共著, 丸善  
流体力学序論 基礎理論から応用まで, 内田 茂男 著, 森北出版 など
- 8) 「流体中の物体の抵抗」 今井 巧, 数学セミナー (日本評論者) 1996 年 11 月号 p50
- 9) 例えば, 物理学, 小出 昭一郎 著, 裳華房 など
- 10) 例えば, X 線回折要論 (第 11 章 11-6 の項参照), カリティ著 松村 源太郎 訳, アグネ
- 11) 例えば, Excel で学ぶ微分方程式, 鈴木 肇 著, オーム社

---

附記：本論文は紀要論文 (福岡教育大学紀要, 第 63 号, 第 3 分冊, 2014 年, p9-19) を査読により一部修正し, 新たに掲載されるものである。